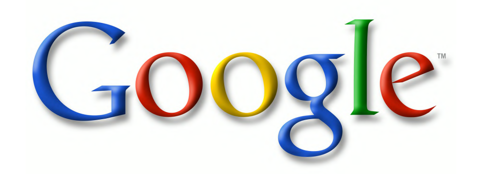
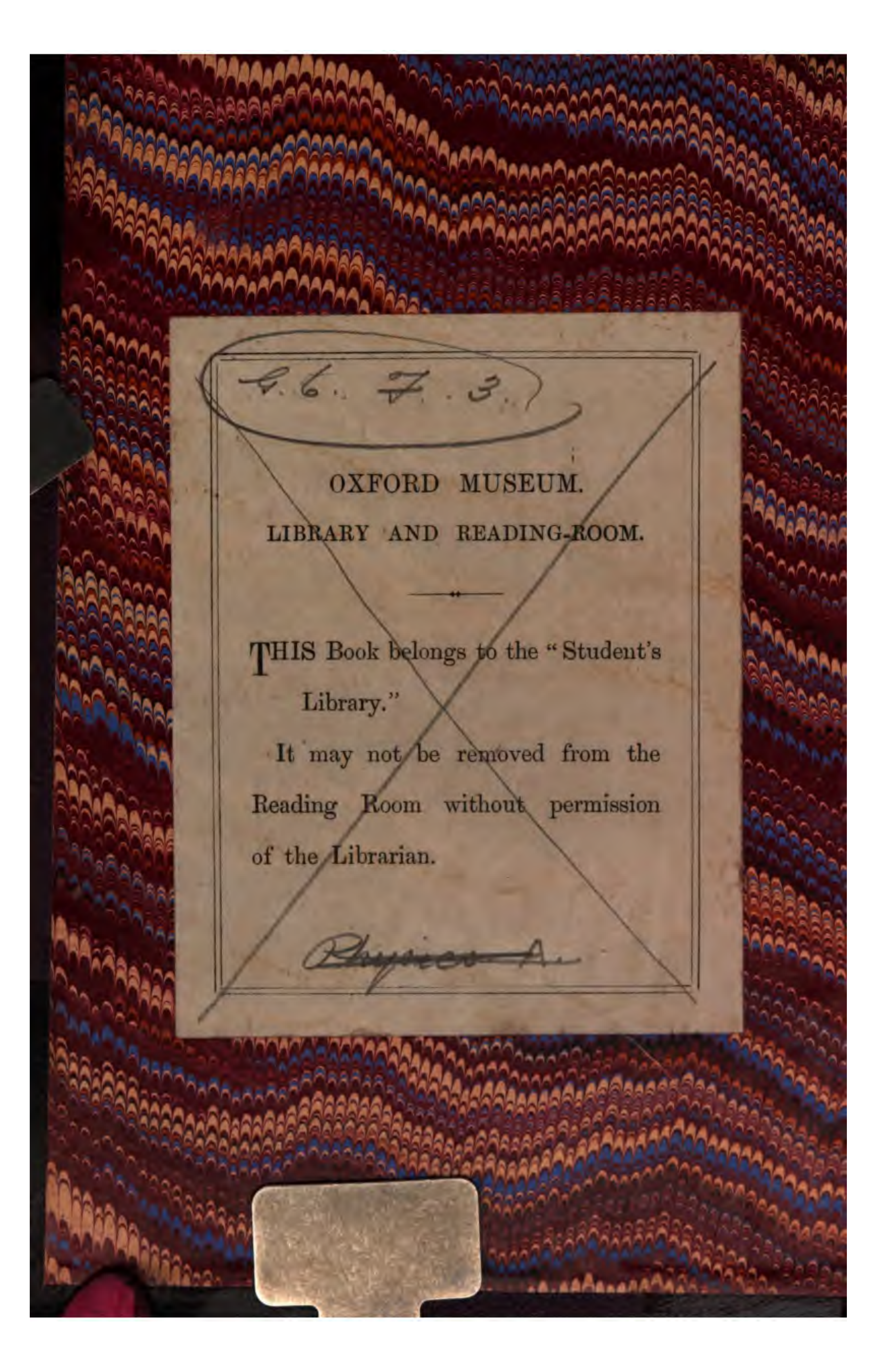
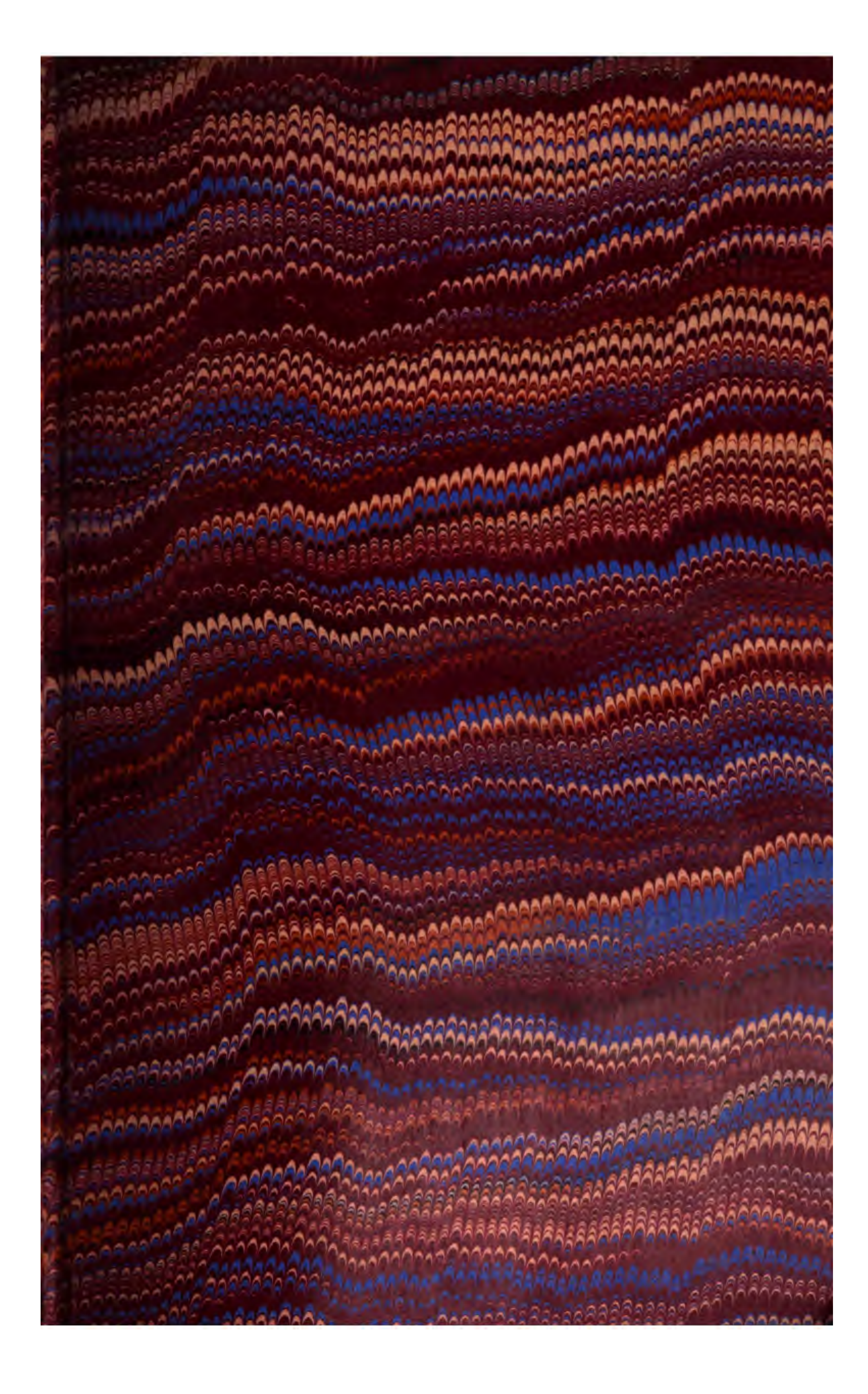






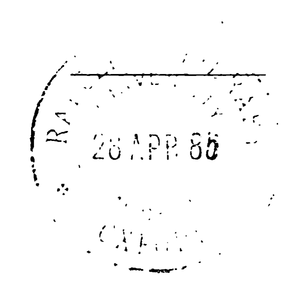
G. 6. 7. 3.
OXFORD MUSEUM.
LIBRARY AND READING-ROOM.
THIS Book belongs to the "Student's Library."
It may not be removed from the Reading Room without permission of the Librarian.




600044702N

DIE

MEDICINISCHE PHYSIK.



Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

DIE

MEDICINISCHE PHYSIK.

VON

ADOLF FICK,
Professor der Physiologie in Würzburg.

MIT 135 HOLZSTICHEN.

DRITTE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1885.

AUS DER

VORREDE ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Durch eigenthümliche Verkettung zufälliger Ereignisse hat sich ein culturhistorisches Curiosum herausgebildet, dessen zähe Dauerhaftigkeit künftigen Generationen ein Räthsel sein wird. Ich meine die so ziemlich in der ganzen civilisirten Welt bestehende Einrichtung, welche von denen, die sich der Medicin widmen wollen, wohl genaue Kenntniss der griechischen und lateinischen Sprache, aber nicht eine gediegene mathematische Vorbildung verlangt, und doch ist diese der Natur der Sache nach die einzig mögliche sichere Grundlage der medicinischen Bildung. In der That, Gegenstand der medicinischen Wissenschaft sind Bewegungsvorgänge materieller Massen in Raum und Zeit, erhalten und verändert durch die gegenseitige Wirkung dieser Massen aufeinander. Die einzige wissenschaftliche Form, solche Vorgänge zu erforschen und darzustellen, ist aber bekanntlich die mathematische. So sagt*) schon der grosse Königsberger Denker: „Ich behaupte, dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.“ Philosophisch principiell wird nicht leicht jemand etwas gegen unsere Behauptung einwenden, aber viele werden sich gegen die streng logische Folgerung daraus sträuben, dass jeder, der sich mit Medicin wis-

---

*) Metaph. Anfangsgr. d. Naturwiss. Vorrede. Hartenstein'sche Ausgabe von Kant's Werken, Bd. VIII, S. 444.

senschaftlich beschäftigen will, nothwendig eine mathematische Vorbildung erwerben muss. Solchem Sträuben wird wohl immer mehr oder weniger bewusst die Betrachtung zum Vorwande dienen: Die organischen Vorgänge sind so überaus verwickelt, dass die gegenwärtigen Mittel der Mathematik bei weitem nicht genügen, sie in Formeln zu bannen. Das ist freilich leider vollkommen richtig, allein die Logik, welche daraus folgert, man solle zur Erforschung der organischen Vorgänge auch nicht einmal die Mittel anwenden, welche die Mathematik jetzt schon bietet, weil sie doch nicht zum letzten Ziele führen, gleicht der Logik mancher Schuldner, die, weil sie nicht alle ihre Schulden tilgen können, lieber gar nichts bezahlen, als dass sie die Mittel, welche sie besitzen, wenigstens zur Abtragung einiger Schulden verwenden.

Wenn man die Sache genauer ins Auge fasst, so finden sich in den organischen Vorgängen auch heute schon Anhaltspunkte genug für die mathematische Behandlung. Man muss nur diesen Ausdruck richtig verstehen. Es ist keineswegs ein unerlässliches Erforderniss derselben, dass Alles in geschlossenen Formeln dargestellt wäre, nach denen man den Werth jeder Grösse sogleich bestimmt berechnen könnte. Unter mathematischer Behandlung eines Gegenstandes verstehen wir eine Behandlung desselben in mathematischem Geiste, d. h. eine Behandlung, die stets den letzten Zweck der Naturforschung vor Augen hat, die Gesetze zu ermitteln, nach welchen eine veränderliche Grösse von verschiedenen anderen Grössen abhängt. In diesem Sinne können wir es beispielsweise eine mathematische Betrachtung nennen, wenn wir darüber reflectiren, in welcher Weise die Temperatur eines menschlichen Körpers abhängt von der während der Zeiteinheit gebildeten Wärmemenge und von den Wärmeableitungsbedingungen, und wie ferner eine Veränderung der einen oder anderen dieser Grössen eine Veränderung der durchschnittlichen Körpertemperatur (z. B. im Fieber) zur Folge haben kann, und dergleichen. Ueberhaupt sind alle physikalischen Betrachtungen auf medicinischem Gebiete Beispiele mathematischer Behandlungsweise. In der That ist ja die ganze Physik, sofern sie überall Wissenschaft ist, nichts anderes als angewandte Mathematik, auch wenn sie sich keiner einzigen Formel bedient. Die Fähigkeit, sich in den Grundbegriffen der Physik und der Naturwissenschaft überhaupt (denn sie sind

überall dieselben) frei zu bewegen, kann daher nur durch gründliche mathematische Bildung erworben werden. Sie ist nicht etwa bloss für den nothwendig, der in den Fall kommt, wirklich rechnen zu müssen, sondern für jeden, der die Grundbegriffe der Naturwissenschaft klar zu seiner Verfügung haben will.

Die gründliche mathematisch-physikalische Vorbildung ist aber nicht nur von dem bisher eingehaltenen principiellen Gesichtspunkte aus für den Mediciner nothwendig, wenn er den Gegenstand seiner Beschäftigung, soweit es jetzt schon möglich ist, wissenschaftlich erfassen will, sie ist ihm gegenwärtig auch schon vom rein praktischen Gesichtspunkte aus nöthig, wenn er als handelnder Arzt alle Mittel in Bewegung setzen will, welche die Wissenschaft gegenwärtig darbieten kann. In der That bedient sich Therapie und Diagnostik schon so vieler und so verwickelter physikalischer Hülfsmittel, dass eine recht tüchtige Kenntniss der Physik dazu gehört, um zünftig damit zu handtieren. Wer z. B. nicht ganz genau mit den Gesetzen der Elektricitätsbewegung vertraut ist, wird selbst bei grosser Uebung immer nur höchst unbeholfen mit den verwickelten Apparaten der Elektrotherapie umgehen. Versagen dieselben durch irgend eine Zufälligkeit ihren Dienst, so sieht er sich auf die Hülfe des Mechanikers angewiesen, während der mit der Theorie Vertraute vielleicht durch einen Handgriff Alles in Gang setzen könnte. Ebenso klar liegt unsere Behauptung zu Tage in Bezug auf die Hülfsmittel der neueren ophthalmiatrischen Technik. Wer nicht eine deutliche Vorstellung vom Gange der Lichtstrahlen durch brechende Systeme hat — und diese ist eben Sache eines mathematisch geschulten Kopfes — der wird es durch jahrelange Uebung in der Handhabung des Augenspiegels, in der Diagnose und Correction der Refractionsanomalien im günstigsten Falle zur empirischen Routine bringen, die bekanntlich doch gerade in den kritischsten Fällen im Stiche lässt. Dahingegen wird sich ein mit mathematisch physikalischer Bildung Ausgerüsteter in allen diesen Dingen ohne Uebung sofort zurechtfinden und frei und sicher bewegen. Aber selbst auf dem Gebiete der inneren Medicin im engsten Sinne des Wortes kann heutzutage die mathematische Bildung eigentlich nicht mehr entbehrt werden. Wie oft ist zur feineren Diagnose einer Lähmung, Contractur etc. die genaueste Kenntniss vom Mechanismus der Gelenke und der darauf

wirkenden Muskeln nöthig. Eine rationelle Orthopädie kann natürlich überall nur auf diese Kenntniss gegründet werden. Leider muss zugestanden werden, dass in dieser Richtung die Physiologie dem Arzte, selbst wenn er sich die Mühe nehmen wollte, sich Alles Vorhandene anzueignen, noch lange nicht das bietet, was er eigentlich brauchte. Dies sollte aber gerade eine Aufforderung für den Arzt sein, nicht auch das wenige Dargebotene zu verschmähen, sondern vielmehr selbst Hand anzulegen an die Lösung jener schwierigen mathematisch-mechanischen Probleme, wenn er sieht, dass ihnen nun einmal die Physiologen von Fach meist weniger Aufmerksamkeit schenken. Es kann eben doch keinem Forscher zur Pflicht gemacht werden, gerade Probleme in Angriff zu nehmen, die für diesen oder jenen Andern ein besonderes Interesse haben. Jeder wird mit Recht an dem Punkte seines weiten Gebietes forschen, wo er seine Wissenschaft und damit die Heilkunst am wirksamsten fördern zu können glaubt. Die Aerzte sollten dem Beispiele der Techniker und Ingenieure folgen, die sich zunächst Alles, was ihnen der Mathematiker und Physiker fertig bieten kann, aneignen, dann aber selbst die mathematischen und physikalischen Probleme in Angriff nehmen, wenn ihre Lösung zu ihren praktischen Zwecken nöthig und von Anderen noch nicht gegeben ist. Durch solches Zusammenwirken fördern sich Praxis und Theorie wechselseitig.

Diese kurzen Erörterungen sollten, däucht mich, hinreichen, die Unentbehrlichkeit mathematischer Vorbildung für den Mediciner über jeden Zweifel zu erheben. Mit dieser Einsicht — selbst wenn sie allgemein wäre — ist aber der gegenwärtigen Generation von Aerzten und Medicin Studirenden wenig gedient, denn die in früherer Jugend versäumte mathematische Schulung des Kopfes lässt sich in späteren Jahren nur durch einen Aufwand an Zeit und Anstrengung nachholen, der nicht Jedem zugemuthet werden kann. Gleichwohl hat, wie gezeigt wurde, der Arzt selbst für seine rein praktische Thätigkeit das unabweisliche Bedürfniss einer Menge von physikalischen Kenntnissen, die über den Bereich des gewöhnlichen Unterrichtes hinausgehen und die eben nur von einem mathematisch geschulten Verstande leicht und sicher erworben werden können.

Radicale Abhülfe ist da natürlich unmöglich. Solche kann

eben nur eine radicale Umgestaltung des ganzen Bildungsganges derer, die sich der Medicin widmen, in Zukunft bringen. Aber für den Augenblick muss man streben, das dringendste Bedürfniss durch Flickwerk wenigstens in gewissem Maasse zu befriedigen. Ein solcher Versuch ist das vorliegende Werk. Ich habe darin versucht, diejenigen Lehren der Physik, welche ausser dem Kreise des gewöhnlichen Elementarunterrichtes liegen und die dennoch dem Mediciner unentbehrlich sind, in einer Form darzustellen, in der sie auch dem nicht mathematisch geschulten Verstande fasslich sind. Der Leser darf es daher dem Buche nicht zum Vorwurfe machen, wenn er darin systematischen Zusammenhang vermisst, denn der Verfasser kündigt es ja ausdrücklich als „Flickwerk“ an, das Lücken in der gegenwärtigen Bildung der Mediciner nothdürftig zustopfen soll. Immerhin wird der Sachkundige, wenn er dem Buche einige geneigte Aufmerksamkeit schenken will, zugeben müssen, dass dieses Flickwerk nicht ohne Mühe zu Stande gebracht ist, denn es ist keine kleine Aufgabe, schwierige physikalische Lehren ohne Hülfe der mathematischen Symbolik fasslich darzustellen. Auch den Vorwurf des Mangels an wissenschaftlicher Strenge glaubt der Verfasser von vornherein abweisen zu dürfen, da es eben unmöglich ist, die physikalischen Lehren, um die es sich hier handelt, ohne Anwendung der Mathematik in aller Strenge zu entwickeln.

Dieser zweiten Auflage habe ich einen Anhangsabschnitt hinzugefügt über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf medicinische Statistik. Obwohl dies eigentlich kein physikalischer Gegenstand ist, wird man doch, denke ich, denselben in diesem Buche am Platze finden, pflegt man doch auch in Werken über Physik im Allgemeinen nicht selten die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sofern sie Anwendung auf physikalische Probleme finden, abzuhandeln. Es wäre ohne Zweifel in diesem Abschnitte auch das Wichtigste über Ausgleichung der Beobachtungsfehler an seinem Platze gewesen, um so mehr als die hier gültigen Principien auch ganz unverändert Anwendung finden können auf die Beurtheilung der aus längeren Beobachtungsreihen gefolgerten Mittelwerthen von Grössen, auf welche verschiedene Umstände Einfluss haben. Diese Principien sind aber in so vielen, Jedermann zugänglichen Elementarlehrbüchern dargestellt, dass

ich sie ohne Schaden weglassen zu dürfen glaubte. Die Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung aber, auf welchen die Beurtheilung der medicinischen Statistik beruht, sind meines Wissens nur in einem populären Werke von Gavarret dargestellt, das leider ziemlich in Vergessenheit gekommen zu sein scheint. Die wiederholte populäre Darstellung dieser Lehren schien mir daher um so mehr Pflicht, als die Darstellung Gavarret's zwar durchaus richtig*), aber meines Erachtens doch zu breit und schleppend ist, als dass sie sich viel Beifall hätte erwerben können. Möchte es mir gelungen sein, diesen Ideen durch meine Darstellung mehr Eingang bei den Aerzten zu verschaffen. Ich dürfte mich in diesem Falle rühmen, der Heilkunst und damit der leidenden Menschheit einen grossen Dienst geleistet zu haben, denn die statistische Methode ist der einzige Weg, auf welchem die Heilkunst vorläufig grosse und sichere Fortschritte machen kann, und die Vernachlässigung oder mangelhafte Anwendung dieser Methode selbst von Seiten bedeutender Männer hat einzig darin ihren Grund, dass ihnen die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht klar und geläufig sind.

*) In einer deutschen Uebersetzung sind freilich die Anmerkungen — der weitaus wichtigste Theil des Werkchens — offenbar in Folge davon, dass der Uebersetzer die Formeln selbst nicht verstanden hat, so verstümmelt, dass es nur dem, der die Sache sonst schon kennt, möglich ist sie zu verstehen.

VORREDE ZUR DRITTEN AUFLAGE.

Schon vor einer Reihe von Jahren richtete der Herr Verleger an mich die Frage, ob ich geneigt sei eine neue Auflage der medicinischen Physik zu bearbeiten. Ich glaubte damals, dass ein Werk nach dem Plane meiner medicinischen Physik nicht mehr zeitgemäss sei, und lehnte das Anerbieten des Herrn Verlegers ab. Einige Jahre später brachten mich verschiedene zufällige Aeusserungen mir befreundeter Collegen zu der Ueberzeugung, dass doch wohl das Bedürfniss nach einem Werke dieser Art noch nicht ganz geschwunden sei. Ich entschloss mich daher zur Bearbeitung der dritten Auflage, welche nunmehr beinahe 20 Jahre nach der zweiten erscheint.

Die Umarbeitung ist nicht so radical wie die Umarbeitung der ersten Auflage, aber immerhin wird der Leser, der sich die Mühe einer Vergleichung nehmen will, sehr erhebliche Unterschiede finden. Mein Streben bei der neuen Bearbeitung ging besonders dahin, technische Einzelheiten, die doch nur in sehr ausführlicher Darstellung verständlich sind, mehr und mehr auszuscheiden und das Hauptgewicht zu legen auf die Darstellung von Principien, welche in das Verständniss ganzer Gebiete einführen. So hat z. B. die Dioptrik und die Lehre von den Wellen in elastischen Schläuchen eine durchgängige Umgestaltung erfahren.

Einen Abschnitt habe ich ganz neu hinzugefügt, nämlich den einleitenden Abschnitt über das Princip der Erhaltung der Energie, der hoffentlich dem Leser willkommen ist.

Die Betrachtungen über die Vorbildung der Mediciner, welche ich in der Vorrede zur zweiten Auflage ausgesprochen habe, sind

leider auch heute noch durchaus zutreffend. Das culturhistorische Curiosum, welches ich in jener Vorrede bezeichnet habe, hat nämlich in den verflossenen zwei Jahrzehnten mit der bekannten ledernen Zähigkeit des „historisch Gewordenen“ dem Ansturme der Vernunftgründe getrotzt, obwohl wir in Deutschland in den sogenannten Realgymnasien (welche eigentlich wissenschaftliche Gymnasien heissen sollten) weit bessere Vorbildungsanstalten für Mediciner besitzen als in den literarischen Gymnasien, die sich ganz ohne Grund allein als humanistische bezeichnen, und obwohl einige Nachbarstaaten, wie Dänemark und Belgien, mit dem guten Beispiele einer Verbesserung der Vorbereitung zum medicinischen Studium vorangegangen sind. Ich habe es daher für passend gehalten, einen Auszug aus der Vorrede zur zweiten Auflage auch dieser voranzuschicken.

Die „medicinische Physik“ kann als eine Ergänzung zu jedem Lehrbuche der Physik betrachtet werden; sie schliesst sich indessen am engsten an das in gleichem Verlage erschienene Lehrbuch der Physik von Müller-Pfaundler an, auf welches im Texte regelmässig verwiesen ist.

Würzburg, im Februar 1885.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNISS.

Fünfter Abschnitt.

Wärmelehre.

Sechster Abschnitt.

Optik.

Siebenter Abschnitt.

Elektricitätslehre.

Anhang.

EINLEITUNG.

Ueber das Princip der Erhaltung der Energie.

Der oberste Grundsatz der Naturwissenschaft lässt sich in folgenden Worten aussprechen: Eine Veränderung im Bewegungszustande einer Masse wird immer verursacht und kann nur verursacht werden durch den Vorgang, welchen man mechanische Arbeit nennt und welcher darin besteht, dass die bewegte Masse eine Verschiebung in einer Richtung erleidet, in welcher auf dieselbe eine Kraft (resp. Kraftcomponente) einwirkt. Das Maass der Arbeit, welches selbstverständlich in dem Producte aus der Grösse der wirkenden Kraft und der von der bewegten Masse in ihrer Richtung zurückgelegten Wegstrecke besteht, ist demgemäss eine von den Grössen, welche eines negativen und positiven Werthes fähig sind. In der Richtung der Kraft kann sich nämlich die Masse mit der Kraft gleichsinnig oder widersinnig bewegen. Im ersteren Falle nennt man die Arbeit eine positive, im letzteren eine negative. Der an die Spitze gestellte Satz zerfällt dem entsprechend in die beiden Sätze: Durch positive Arbeit wird der Bewegungszustand einer Masse gesteigert (ihre Geschwindigkeit vermehrt), durch negative Arbeit wird der Bewegungszustand einer Masse ermässigt (ihre Geschwindigkeit vermindert).

Um den Grundsatz anschaulich zu machen, wollen wir das Beispiel wählen, welches der Ausgangspunkt aller mechanischen Begriffsentwickelung gewesen ist. Ohne Zweifel hat sich die Vorstellung von der Kraft und von dem Eingreifen der Kräfte in die Bewegungsvorgänge der uns umgebenden Körper gebildet auf Grund des unmittelbaren Bewusstseins unserer eigenen Muskelanstrengungen und der dadurch hervorgebrachten Leistungen, welche man schon lange vor der Ausbildung einer mechanischen Wissenschaft mit dem Namen „Arbeit“ bezeichnet hat. Stemmen wir unsere Hand gegen einen festen Felsblock, so machen wir wohl eine

Anstrengung und es ist eine drückende Kraft vorhanden, aber wir leisten keine Arbeit und es wird auch keine Veränderung hervorgebracht. Stemmen wir aber durch Muskelspannung die Hand gegen einen frei darauf liegenden schweren Stein, so weicht derselbe und seine Bewegung wächst vom Unmerklichen an so lange, als die Muskelkraft durch den Druck der nachschiebenden Hand darauf wirkt, bis er zuletzt mit der erlangten Endgeschwindigkeit wagerecht fortfliegt. Hier hat nun unsere Muskelkraft wirklich positive Arbeit geleistet, indem die Masse des Steines in der Richtung und im Sinne der auf ihn wirkenden Kraft, nämlich des Druckes der Hand — das heisst nach vorn — um eine gewisse Wegstrecke verschoben ist. Dem entsprechend ist denn auch, wie schon gesagt, der Bewegungszustand der Masse gesteigert vom Unmerklichen (relativer Ruhe) bis zu der erlangten Endgeschwindigkeit, mit welcher sie weiter fliegt.

Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall. Es rolle eine schwere Kugel mit grosser Geschwindigkeit auf wagerechter Ebene gegen uns heran und wir nehmen uns vor, sie aufzuhalten. Wir werden uns niederbeugen und den herabhängenden Arm so stellen, dass die Kugel gegen die nach vorn gewendete Handfläche anläuft. Von dem Augenblicke an, wo dies geschieht, spannen wir die betreffenden Muskeln, so dass die Hand gegen die Kugel drückt, d. h. dass eine Kraft in der Bewegungsrichtung aber widersinnig auf die Kugel wirkt. Bekanntlich bewegt sich dieselbe nun noch ein Stück weiter, die gegendrückende Hand zurückdrängend, aber ihr Bewegungszustand wird dabei mehr und mehr gemässigt und sie kommt zuletzt zur Ruhe. Hier hat die Muskelkraft negative Arbeit geleistet und dem entsprechend ist eine negative Aenderung, Verminderung, im Bewegungszustande der Masse hervorgebracht, auf welche die Kraft gewirkt hat.

Der Bewegungszustand einer Masse ist offenbar eine mathematische Grösse, deren Werth abhängig ist einerseits von der Grösse der Masse und andererseits von der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich bewegt. Wenn nun Gleichheit oder Aequivalenz bestehen soll zwischen dem Betrage der Aenderung des Bewegungszustandes und der Grösse der Arbeit, durch welche diese Aenderung verursacht ist, so muss man zum Maasse des Bewegungszustandes wählen das halbe Product der Masse und des Quadrates der Geschwindigkeit. Man nennt diese Grösse die „kinetische Energie“ der Masse und wir können den nunmehr an die Spitze gestellten Satz so aussprechen: Die kinetische Energie einer Masse nimmt während irgend einer bestimmten Zeit um so viel zu resp. ab, als die positive resp. negative Arbeit beträgt, welche während dieser Zeit darauf gewirkt hat.

Die Kräfte, welche an einer Masse Arbeit leisten können, denkt man sich — sofern man zu den letzten Gründen vorschreitet — gegeben durch die Wechselwirkung zwischen dieser und anderen Massen. Es ist gut zu bemerken, dass diese Wechselwirkung zwischen je zwei

Massen absolut nur als eine Wirkung in die Ferne durch den leeren Raum hindurch gedacht werden kann, selbst in den Fällen, wo unserer beschränkten Sinneswahrnehmung nach die auf einander wirkenden Massen in unmittelbarer Berührung zu sein scheinen. In jüngster Zeit hat sich gegen diese Auffassung, besonders von englischen Naturforschern vertreten, eine ultraempiristische, oder besser gesagt, pseudoempiristische Strömung geltend gemacht, welche in einem stetig mit Materie erfüllten Raume ein Aufeinanderwirken der Theilchen in unmittelbarer Berührung annimmt. Es lassen sich nun schon gegen die Vorstellung einer stetigen Raumerfüllung durch die Materie an sich sehr gewichtige Einwände machen, die hier nicht erörtert werden sollen; dass aber die Vorstellung, die Wechselwirkung der materiellen Theilchen geschehe nur in Berührung, dem Principe der Bewegungsänderung durch Arbeit logisch widerspricht, ist mit einem Blicke zu übersehen. In der That schliesst ja der Begriff der Arbeit das Durchlaufen einer Wegstrecke in der Richtung der Kraft ein. Das Theilchen, dessen Bewegung durch Arbeit verändert werden soll, muss also in Beziehung zu dem, von welchem die Kraft ausgeübt wird, irgend welche Lageänderung erleiden und kann mithin nicht während der ganzen Wirkungszeit mit ihm in Berührung sein.

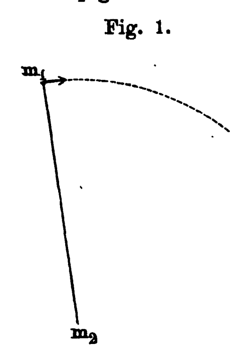
Die Richtung der Kräfte, welche in der Wechselwirkung je zweier materiellen Theilchen begründet sind, muss nothwendig mit ihrer geraden Verbindungslinie zusammenfallen und ihre Grösse kann nur von ihrer gegenseitigen Entfernung abhängen, so dass die beiden Theilchen zu allen Zeiten, wenn sie wieder in dieselbe Entfernung von einander kommen, auch wieder mit denselben Kräften aufeinander wirken. Dieser letztere Theil des Satzes ist a priori unmittelbar einleuchtend, denn es ist die erste Bedingung aller Erfahrung überhaupt, dass alles Geschehen unverbrüchlichen Regeln folgt, dass also insbesondere zwei bestimmte materielle Theilchen unter gleichen Umständen (d. h. im Besonderen aus gleicher Entfernung) auch genau gleiche Wirkung auf einander äussern. Ohne diese Voraussetzung wäre überall keine Erfahrung möglich.

Die Nothwendigkeit der Annahme, dass die Richtung der Kräfte, mit welchen je zwei materielle Theilchen auf einander wirken, in ihre Verbindungslinie fällt oder, was dasselbe sagt, dass alle Kräfte, welche aus der Wechselwirkung der materiellen Theilchen auf einander entspringen, nur einfach „anziehende“ oder „abstossende“ Kräfte sein können, lässt sich in folgender Art einsehen.

Nehmen wir an, ein Massentheilchen m_2, Fig. 1 (a. f. S.), wirkte auf ein anderes m_1 mit einer nicht rein anziehenden oder abstossenden, also mit einer nicht in die Richtung der Verbindungslinie fallenden Kraft, deren Intensität aber selbstverständlich ungeändert bleiben würde, so lange die Entfernung nicht geändert wird. Diese Kraft würde demnach eine auf der Verbindungslinie senkrechte Componente haben, sagen wir etwa im Sinne des Pfeiles bei m_1. Es werde nun durch irgend welche äussere

Einwirkungen m_2 an seinem Platze gehalten und m_1 gehindert, sich anders als in einem um m_2 beschriebenen Kreise zu bewegen, so dass m_2 und m_1 gleichsam durch einen starren Stab verbunden erschienen. Diese kreisende Bewegung würde nun unter den gedachten Umständen in der That stattfinden müssen und zwar mit unbegrenzt zunehmender Geschwindigkeit, denn die Masse m_1 legte ja ihre ganze, aus unbegrenzt vielen Umläufen bestehende Bahn im Sinne der gedachten Kraftcomponente zurück und ihre kinetische Energie würde also durch die Arbeit jener Kraftcomponente ohne Unterlass vermehrt. Von der so gewonnenen Energie könnte das Massentheilchen m_1 dann noch durch sogenannten Stoss beliebig viel an fremde Massentheilchen abgeben, ohne zur Ruhe oder in eine andere Entfernung von m_2 zu kommen, da ihm jeder Verlust an kinetischer Energie durch die unerschöpfliche Arbeitsquelle der vorausgesetzten Kraftcomponente bei weiterem Umlaufe ersetzt würde.

Fig. 1.



Wir hätten hiernach in der Zusammenstellung der beiden Massentheilchen m_2 und m_1, welche in einer anderen Richtung als der ihrer Verbindungslinie auf einander wirken, unter Mitwirkung von Kräften, welche m_1 in immer gleicher Entfernung von m_2 erhalten, also z. B. unter Mitwirkung der Cohäsionskräfte eines starren Stabes das sogenannte „Perpetuum mobile“ vor Augen, d. h. ein System von Massen, welches durch die zwischen seinen Bestandtheilen wirkenden Kräfte nicht nur sich selbst in beständiger Bewegung erhielte, sondern auch noch andere Massen *in infinitum* in Bewegung setzen könnte, ohne selbst zur Ruhe zu kommen.

Es mag dahin gestellt bleiben, ob die Möglichkeit des „Perpetuum mobile“ den Grundbedingungen möglicher Erfahrung an sich widerspricht, jedesfalls herrscht seit Jahrhunderten in der Wissenschaft volle Uebereinstimmung, dass ein Perpetuum mobile durch keine Zusammenstellung materieller Theilchen hergestellt werden kann. In die grundlegenden Voraussetzungen über die Wechselwirkung der materiellen Theilchen auf einander darf also keine aufgenommen werden, welche die Herstellung des Perpetuum mobile als möglich erscheinen lässt. Wir müssen also insbesondere die Voraussetzung fallen lassen, dass durch die Wechselwirkung zweier Theilchen auf einander Kräfte bedingt sein könnten, deren Richtung mit ihrer Verbindungslinie nicht zusammenfällt. Wir müssen mit anderen Worten als allgemeines Grundgesetz des Aufeinanderwirkens von je zwei materiellen Theilchen den Satz aufstellen, dass die dadurch bedingten Kräfte in der Verbindungslinie liegen, oder, was dasselbe sagt, dass je zwei Theilchen entweder mit anziehenden oder abstossenden Kräften auf einander wirken.

Es ist ferner klar, dass aus demselben Grunde die Gleichheit von Action und Reaction zwischen je zwei aufeinander wirkenden Massen angenommen werden muss. Das heisst, es muss angenommen werden, dass, wenn die Masse m_1 anziehend auf die Masse m_2 einwirkt, auch m_2 auf m_1 anziehend wirkt und dass ebenso eine etwaige Abstossung eine gegenseitige wäre. Denn wirkte m_1 auf m_2 anziehend, m_2 auf m_1 aber abstossend, so könnten sich die beiden Massen in der Richtung von m_2 nach m_1 mit immer beschleunigter Geschwindigkeit bewegen, ohne dass ihr Abstand vergrössert oder verkleinert zu werden brauchte. Wir hätten somit wieder das Perpetuum mobile.

Dass nun unter den gemachten beiden Voraussetzungen, nämlich der Gleichheit der Action und Reaction und des Aufeinanderwirkens je zweier Massen, nur in der Richtung ihrer Verbindungslinie in der Zusammenstellung von je zwei oder mehreren Theilchen keine ins Unbegrenzte fliessende Arbeitsquelle vorhanden sein kann, ist leicht zu sehen. Fassen wir zunächst wieder bloss zwei Theilchen, m_1 und m_2, ins Auge und nehmen wir an, sie wirkten anziehend auf einander. Das Theilchen m_1 bewege sich in einem gewissen Augenblicke, in welchem es sich in einer bestimmten Entfernung r_1 von m_2 befindet, mit einer gewissen Geschwindigkeit v_1, so dass es die kinetische Energie $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ besitzt. Wenn nun im weiteren Verlaufe der Bewegung m_1 in eine kleinere Entfernung r_2 von m_2 kommt, so wird die anziehende Kraft eine positive Arbeit geleistet und das Theilchen beschleunigt haben, so dass es eine grössere Geschwindigkeit v_2 und folglich eine grössere kinetische Energie $\frac{1}{2} m_1 v_2^2$ besitzt.

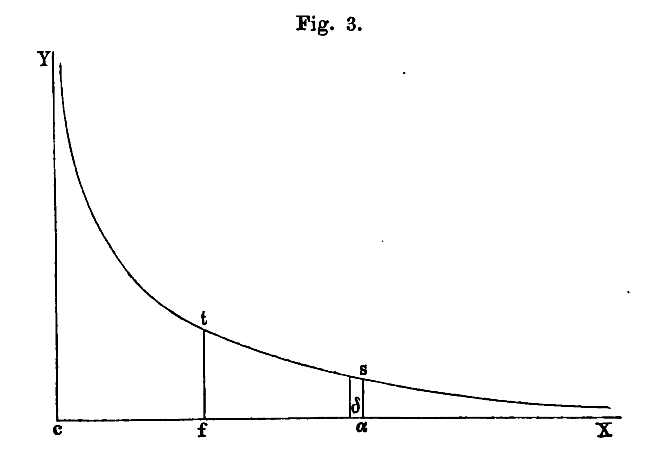
Nach dem an die Spitze gestellten Principe muss nun die Differenz der kinetischen Energien $\frac{1}{2} m_1 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ gleich sein der Arbeit, welche bei dem gedachten Bewegungsvorgange die anziehende Kraft von m_2 an der Masse m_1 geleistet hat. Der mathematische Ausdruck für diese Arbeit ist nicht ganz einfach darstellbar, da die Intensität der Kraft mit wechselnder Entfernung veränderlich zu denken ist. Aber das ist wenigstens sofort zu sehen, dass diese Arbeit ausser von der Natur der wirkenden Kraft nur abhängt von dem Unterschiede der beiden Entfernungen r_1 und r_2 und gar nicht von dem Wege, auf welchem das Theilchen m_1 aus der Entfernung r_1 in die Entfernung r_2 gekommen ist. Man kann nämlich die gesammte fragliche Arbeit in lauter unendlich kleine Stücke zerlegen, welche so kleinen Stücken des von m_1 zurückgelegten Weges entsprechen, dass auf einem solchen noch keine Aenderung der Entfernung von m_2 eintritt, die eine merkliche Aenderung der Kraftintensität bedingt. Es befinde sich beispielsweise m_1 zu Anfang im Punkte a (Fig. 2 a. f. S.) und m_2 im Punkte c, so dass $ac = r_1$ wäre. Es ist dann für das erste kleine Stück der Arbeit ganz gleichgültig, ob m_1 auf dem Wege ab oder auf dem schrägeren Wege ad geht, es kommt nur auf das Stückchen δ an, um welches sich beide Male die Masse m_1 der anziehenden Masse m_2 nähert. In der That sei die Intensität der

anziehenden Kraft in der Entfernung ac und also auch, da δ unendlich klein gedacht wird, noch in der Entfernung $ac - \delta$ gleich φ_1, dann ist die Arbeit bei Zurücklegung des Weges ab gleich der Länge ab mal der in die Richtung von ab fallenden Componente der Kraft φ_1, diese ist aber nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte $= \varphi_1 \frac{\delta}{ab}$. Die Arbeit ist also $= ab \times \varphi_1 \frac{\delta}{ab} = \varphi_1 \delta$. Aus demselben Grunde würde auf der Wegstrecke ad die Anziehung eine Arbeit leisten $= ad \times \varphi_1 \frac{\delta}{ad}$, also ebenfalls $= \varphi_1 \delta$. Man sieht hieraus ganz allgemein, dass die einzelnen unendlich kleinen Stücke der in Rede stehenden Arbeit die Producte sind aus den unendlich kleinen Beträgen der Annäherung, welche bei Zurücklegung der betreffenden Bahnstückchen stattfindet und den Kraftintensitäten, welche bei den betreffenden Entfernungen wirken.

Fig. 2.

Man kann sich hiernach von der Arbeit, welche eine anziehende Kraft an einer Masse m_1 leistet, während dieselbe auf irgend einem Wege aus der Entfernung r_1 in die Entfernung r_2 vom Anziehungs-

Fig. 3.



centrum m_2 übergeht, eine anschauliche Vorstellung durch graphische Darstellung verschaffen. Messen wir (Fig. 3) in der wagerechten Abscissenaxe die Entfernungen und tragen als Ordinaten die für die betreffende Entfernung wirksame Intensität der Anziehungskraft auf, die Abhängigkeit dieser von jener wird sich dann in Form einer Curve dar-

stellen, welche jedesfalls mit wachsenden Abscissen sinken muss, da die Intensität aller Kräfte, die auf Wechselwirkung zweier Massen beruhen, mit wachsender Entfernung zwischen denselben abnimmt — ein Satz, welcher, wofern man ihn nicht geradezu als a priori gewiss gelten lassen wollte, doch von keinem in Zweifel gezogen wird. Es sei nun $ca = r_1$ die Anfangsentfernung zwischen m_1 und m_2, also $as = \varphi_1$ die Kraftintensität bei dieser Entfernung, dann wird das unendlich kleine, merklich rechteckige Streifchen von der Breite δ durch sein Flächenmaass $as \times \delta = \varphi_1 \delta$ die Grösse der Arbeit darstellen, welche nach unserer obigen Bestimmung auf einer sonst ganz beliebigen Wegstrecke geleistet wird, welche das Theilchen m_1 aus der Entfernung r_1 in die davon nur unendlich wenig verschiedene Entfernung $r_1 - \delta$ bringt. Lassen wir nun m_1 auf irgend einem Wege aus der Entfernung $r_1 = ca$ in die Entfernung $af = r_2$ (s. Fig. 2) von m_2 gelangen, so kommen zu dem ersten weitere Stücke Arbeit hinzu, die sich alle durch solche unendlich schmale rechteckige Flächenstreifchen messen lassen und die ganze Arbeit misst sich durch die Summe, nämlich durch das endlich ausgedehnte Flächenstück $astf$ (s. Fig. 3), zwischen dem Curvenstück ts dem entsprechenden Stücke der Abscissenaxe und den beiden Grenzordinaten. Der Zuwachs, welchen die kinetische Energie von m_1 erleidet, wenn diese Masse aus der Entfernung r_1 in die Entfernung r_2 von m_2 auf irgend einem Wege versetzt wird, d. h. $\frac{1}{2} m_1 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_1^2$ ist also gleich jenem Flächenraume $astf$. Es ist gut zu beachten, dass diese beiden Grössen auch wirklich gleichartig sind, indem ja die kinetische Energie, sofern man den Massenwerth als absolute Zahl auffasst, auch als Flächengrösse — Quadrat einer als Linienlänge zu denkenden Geschwindigkeit — erscheint. Zwischen dem die Arbeit messenden Flächenraum und der dadurch bedingten Steigerung der kinetischen Energie besteht also nicht blosse Proportionalität, sondern bei geeigneter Wahl der Maasseinheiten völlige Einerleiheit. Die Kraft muss nämlich in Linienlänge dargestellt werden als diejenige Geschwindigkeitszunahme, welche sie auf die Masse m_1 während einer Zeiteinheit unverändert wirkend hervorbringen würde.

Die erste Folgerung von grundlegender Bedeutung, die wir aus der vorstehenden Betrachtung ziehen können, ist folgende: Durch die Annahme, dass die Kraft zwischen zwei materiellen Theilchen stets in die Richtung der Verbindungslinie fällt und ihre Intensität lediglich von der Entfernung abhängt, ist die bei der Annahme anderer Wirkungsrichtung, wie wir sahen, vorhandene widersinnige Möglichkeit ausgeschlossen, dass eine Masse auf irgend einem Wege in dieselbe Lage zum Kraftcentrum mit grösserer kinetischer Energie zurückkommen kann, als mit welcher sie davon ausgegangen ist, ohne dass fremde Kräfte Arbeit geleistet hätten. Man sieht nämlich sofort, wenn unter der jetzt gemachten Annahme über die Natur der Wechselwirkung zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 die erstere bei Fortsetzung ihrer Bewegung jemals wieder aus der Entfernung r_2 in die Entfernung r_1 zurückkehrt, so hat die Ein-

wirkung von m_2 auf dem Rückwege — er mag beschaffen sein wie er will — eine durch das Flächenstück $astf$ (Fig. 3) gemessene *negative* Arbeit an m_1 geleistet, da auf dem Rückwege sich m_1 immer in einem der wirkenden Kraftcomponente entgegengesetzten Sinne bewegte. Wenn also auf dem Rückwege keine fremde Kraft einwirkt, so nimmt auf ihm die kinetische Energie von m_1 um genau ebensoviel ab, als sie auf dem Hinwege zugenommen hatte, und m_1 kommt in der Entfernung r_1 wieder genau mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ an. So hat beispielsweise die Erde in jedem Sommer im Aphelium wieder genau dieselbe Geschwindigkeit resp. kinetische Energie. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wurde bisher vorausgesetzt, dass die eine Masse m_2 durch irgend welche geeignete Veranstaltung an ihrem Orte gehalten würde. Lassen wir diese Einschränkung fallen, so ergiebt sich, dass die kinetische Energie des Systems aus zwei Summanden besteht, nämlich $\frac{1}{2} m_1 \,.\, {}_1v^2$ und $\frac{1}{2} m_2 \,.\, {}_2v^2$, wenn wir die Geschwindigkeit der Masse m_1 allgemein mit ${}_1v$, die von m_2 allgemein mit ${}_2v$ bezeichnen. Es gilt nun von dieser gesammten kinetischen Energie immer noch der Satz, dass bei einer Annäherung von der Entfernung r_1 auf die Entfernung r_2 eine Zunahme derselben stattfindet, welche gleich ist der bei der Annäherung geleisteten Arbeit, d. h. gleich dem Flächenstück $astf$ in Fig. 3, nur dass jetzt dieser Werth sich vertheilt auf die beiden Posten der kinetischen Energie nach Maassgabe der Beträge, welche die Bewegungen der beiden Massen zur gesammten Annäherung geliefert haben. Diese Vertheilung im concreten Falle numerisch auszuführen, würde freilich eine sehr verwickelte Aufgabe sein, deren Lösung für uns aber gar kein Interesse hat. Es genügt, den Satz noch einmal in Zeichen auszusprechen $(\frac{1}{2} m_1 \,.\, {}_1v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \,.\, {}_2v_2^2) - (\frac{1}{2} m_1 \, {}_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, {}_2v_1^2)$ ist gleich der bei der Annäherung von r_1 bis auf r_2 geleisteten Arbeit oder gleich dem Flächenstücke $astf$ in Fig. 3, wo die auf die Entfernung r_1 bezüglichen Geschwindigkeiten durch den Index 1, die auf r_2 bezüglichen durch den Index 2 rechts unten am v bezeichnet sind.

Das in unserer Betrachtung auftretende Stück Arbeit kann man, wie auch die Anschauung der Fig. 3 sofort ergiebt, als eine Differenz darstellen, deren Minuend die Arbeit ist, welche die anziehenden Kräfte leisten, wenn sich die beiden Massen aus unendlicher Entfernung bis auf die Entfernung $r_2 (= cf)$ einander nähern, deren Subtrahend die Arbeit ist bei Annäherung aus unendlicher Ferne bloss bis zur grösseren Entfernung $r_1 (= ca)$. In graphischer Darstellung Fläche tfX — Fläche saX; der Punkt X ist in unendlicher Ferne zu denken, wo die Curve mit der Abscissenaxe asymptotisch zusammenkommt. Es ist gut zu bemerken, dass die ins Unendliche sich erstreckenden Flächenstücke und die durch sie dargestellten Arbeitswerthe jedesfalls endlich und numerisch angebbar sind, da die Kraftgrösse factisch stets noch rascher abnimmt, als die Entfernung zunimmt. Beiläufig bemerkt, ist die Arbeit, welche die anziehende Kraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 bei Annäherung

aus unendlicher Ferne bis auf eine beliebige Entfernung r leistet, einfach $= \frac{m_1 m_2}{r}$ für den Fall, dass die Kraft dem Quadrate der jeweiligen Entfernung umgekehrt proportional ist. Sie wird in diesem Falle genannt das „Potential" der Massen auf einander in der Entfernung r, und es spielt diese Grösse in den neueren Darstellungen der analytischen Mechanik eine hervorragende Rolle.

Machen wir von der soeben begründeten Zerlegung der Arbeit Gebrauch, so schreibt sich unsere Formel für die Zunahme der kinetischen Energie so:

$$(1/2\, m_1 \cdot {}_1v_2^2 + 1/2\, m_2 \cdot {}_2v_2^2) - (1/2\, m_1\, {}_1v_1^2 + 1/2\, m_2\, {}_2v_1^2)$$
$$= \text{Fläche } ft\, X - \text{Fläche } as\, X$$

oder:

$$(1/2\, m_1 \cdot {}_1v_2^2 + 1/2\, m_2 \cdot {}_2v_2^2) - \text{Fläche } ft\, X$$
$$= (1/2\, m_1 \cdot {}_1v_1^2 + 1/2\, m_2 \cdot {}_2v_1^2) - \text{Fläche } as\, X.$$

Hier steht links die Summe der kinetischen Energie für die Entfernung r_2 vermindert um die Arbeit, welche die Kraft bei Annäherung aus unendlicher Ferne bis in diese Entfernung r_2 leisten würde. Auf der rechten Seite steht die Differenz der entsprechenden Grössen, bezogen auf eine andere Entfernung r_1. Da die Wahl der beiden beispielsweise genommenen Entfernungen rein willkürlich war, so sagt unsere Gleichung aus, dass ganz allgemein in dem System der beiden Massen, so lange keine fremden Kräfte darauf wirken, die Differenz der gesammten kinetischen Energie bei irgend einem Abstande und der Arbeit, welche die Kraft bei Versetzung aus unendlicher Ferne in diesen Abstand leisten würde, immer dieselbe, d. h. eine constante Grösse ist, welche durch die gegenseitige Einwirkung der beiden Massen auf einander nicht verändert werden kann.

Die in Rede stehende Differenz kann möglicherweise einen negativen Werth haben, da die Arbeit, welche die Kraft bei Versetzung aus unendlicher Ferne leisten würde, grösser sein kann, als die vorhandene kinetische Energie. Wir können nun aber eine andere ebenfalls durch die inneren Wirkungen des Systems unveränderliche Constante definiren, welche der Natur der Sache nach immer positiv sein muss, wenn wir zu der obigen constanten Differenz eine gewisse positive Grösse addiren, welche nothwendig grösser ist als ihr Subtrahend. Diese Grösse ist die Arbeit, welche die Kräfte des Systems leisten, wenn die Massen aus unendlicher Ferne so nahe an einander heranrücken, als es überhaupt physisch möglich ist. Von dieser Grösse giebt der theilweise krummlinig begrenzte Flächenraum aYX eine Anschauung, wo die Anfangsordinate aY unendlich gross oder jedesfalls sehr gross zu denken ist. Es fragt sich nun, ob das in Rede stehende Flächenstück, resp. die durch dasselbe gemessene Arbeitsgrösse unendlich gross ist, in welchem Falle sie für weitere Betrachtungen allerdings unbrauchbar sein würde. Das von

irgend einer von c endlich entfernten Grenze an nach X ins Unendliche sich erstreckende Stück ist unzweifelhaft endlich, wie wir schon gesehen haben. Nicht so einfach ist zu zeigen, dass auch die mögliche Arbeit in kleinsten Entfernungen einen endlichen Werth hat, denn wenn wir z. B. das Wirkungsgesetz nach dem reciproken Werthe des Quadrats der Entfernung als uneingeschränkt gültig und eine Annäherung bis zur Entfernung Null als möglich ansehen, so wird allerdings die Arbeit aXY unendlich gross. Wir haben aber guten Grund anzunehmen, dass das wahre Wirkungsgesetz aller anziehenden Kräfte so beschaffen ist, dass sich bei Annäherung in sehr kleine Abstände die anziehende Kraft in eine unüberwindlich abstossende verkehrt, welche ein Nullwerden des Abstandes oder das Zusammenfallen der beiden Massen in einen Punkt unmöglich macht. Die gesammte mögliche Arbeit der Kräfte, zwischen den beiden Massen m_1 und m_2, gemessen durch den Flächenraum cXY, ist also in Wirklichkeit immer eine endliche Grösse, und wenn wir sie zu der obigen constanten Differenz addiren, so erhalten wir eine ihrer Natur nach positive und ebenso constante Summe. Nämlich die gesammte kinetische Energie plus der Arbeit, welche die Kräfte des Systems bei weiterer Annäherung von der jeweiligen Entfernung an möglicherweise noch leisten können. Diese Summe kann durch die inneren Kräfte des Systems nicht verändert werden, denn wenn die Entfernung wächst, so wächst der zweite Summand und der erste nimmt (durch die negative Arbeit) um ebenso viel ab; wenn die Entfernung abnimmt, so nimmt der zweite Summand ab und die erste, die kinetische Energie, nimmt (durch die positive Arbeit) um ebenso viel zu. Diese Summe, welche durch die inneren Kräfte des Systems nicht verändert werden kann, nennt man die gesammte Energie des Systems und den zweiten soeben definirten Summanden derselben bezeichnet man im Gegensatze zur kinetischen als die potentielle Energie. Alle durch innere Kräfte bewirkbaren Veränderungen bestehen nur in Verwandlung von potentieller in kinetische Energie und umgekehrt.

Unsere ganze Betrachtung lässt sich auch auf abstossende Kräfte anwenden, nur dass dann als potentielle Energie die Arbeit zu betrachten ist, welche die Kräfte bei Entfernung ins Unendliche leisten können.

Der Satz, den wir in Bezug auf ein System von nur zwei Massen möglichst anschaulich ausführlich begründet haben, gilt offenbar für jedes System von noch so vielen Massenpunkten, die mit anziehenden oder abstossenden Kräften aufeinander wirken. In der That entspringen ja die Kräfte sämmtlich aus der Wechselwirkung von je zwei Theilchen und man kann auf jedes Paar den Satz anwenden, wobei natürlich jedes Theilchen des Systems nicht nur mit einem, sondern mit jedem der anderen Theilchen zu einem Paar verbunden zu betrachten ist und man erhält so die potentielle Energie des Systems, indem man alle die Arbeitswerthe summirt, welche in allen diesen Paaren bei denkbar grösster

Annäherung (resp. Entfernung, ins Unendliche für den Fall der Abstossung) geleistet werden kann. Die Summe wird also aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Posten bestehen, wenn das System aus n Massenpunkten gebildet ist. Die gesammte potentielle Energie eines Systems aus mehr als zwei Massenpunkten oder die Arbeit, welche die Kräfte des Systems von irgend einer gegebenen Anordnung aus möglicherweise noch leisten könnten, ist hiernach eine Grösse, von der man sich zwar nicht leicht eine deutliche Vorstellung, wohl aber einen vollkommen klaren Begriff machen kann. Die kinetische Energie des Systems ist einfach die Summe aller halben Producte der Massen mit den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten im betrachteten Augenblicke und besteht also aus ebenso vielen Summanden, als materielle Punkte im System vorhanden sind. Die Summe der gesammten kinetischen und der gesammten potentiellen Energie oder mit einem Worte die ganze Energie des Systems ist eine constante Grösse, welche durch die Wechselwirkung der Punkte desselben weder vermehrt noch vermindert werden kann. Dieser Satz ist der Ausdruck des Princips der Erhaltung der Energie, das einen der sichersten Leitfäden in der Untersuchung der Naturvorgänge bildet, da ja bei diesen Vorgängen stets potentielle Energie eines Systems in kinetische oder kinetische in potentielle verwandelt wird resp. Energie überhaupt aus einem Systeme in ein anderes übertragen wird.

Was der Ausdruck „Uebertragung von Energie aus einem Systeme in ein anderes“ sagen will, bedarf noch einer näheren Erläuterung. Wenn auch streng genommen jedes Atom auf jedes andere des ganzen Weltalls stets eine Wirkung ausübt und von ihm eine Rückwirkung erleidet, so kann man doch oft ohne erheblichen Fehler einen Körper als ein System betrachten, dessen Energie nur von der Wechselwirkung seiner Theilchen abhängt, sie ist dann constant, so lange man von fremden Einwirkungen absehen darf. Nun bringe man diesen Körper mit einem zweiten in solche Beziehung, dass die Einwirkung der Theilchen des einen auf die des anderen merklichen Einfluss gewinnt. Dann haben wir ein zusammengesetztes System, dessen Gesammtenergie wieder constant ist, aber die Energie jedes einzelnen Körpers für sich braucht nun nicht mehr unverändert zu bleiben. Vielmehr kann unter dem Einflusse der Wechselwirkung der Theilchen des ganzen Systems eine neue Vertheilung der Energie eintreten, so dass, wenn man hernach die beiden Körper wieder ausser wirksamer Beziehung setzt, die Energie des einen gegen früher vermehrt erscheinen kann, dann muss aber eben nach dem Principe der Erhaltung der Energie die des anderen Körpers um genau ebenso viel vermindert erscheinen. Man sagt alsdann, es sei Energie aus dem einen Körper in den anderen übertragen, die sowohl in kinetischer als potentieller Form erscheinen kann.

Um die Fruchtbarkeit des Princips der Erhaltung der Energie

deutlich zu machen, wollen wir verschiedene Formen der Energie etwas näher ins Auge fassen. Die sinnfälligste Form der kinetischen Energie ist die fortschreitende oder rotirende Bewegung ganzer Massen im Zusammenhange. Man kann sie so charakterisiren. Die Bewegungsrichtung jedes Theilchens des Systems steht in jedem Augenblicke gleichsinnig senkrecht auf dem vom Theilchen zu einer gewissen Geraden — der augenblicklichen Rotationsaxe — gefällten Perpendikel und ist an Grösse der Länge dieses Perpendikels proportional. Hiermit scheint zunächst nur die rotirende Bewegung eines Körpers charakterisirt, allein man bedenke, dass die rein fortschreitende Bewegung unter den Begriff der Rotation gebracht werden kann, wenn man die Axe in unendlicher Ferne denkt.

Diese Form der kinetischen Energie haben wir im grossartigsten Maassstabe vor Augen in der fortschreitenden und rotirenden Bewegung der Weltkörper. Wir haben sie aber auch vor uns in zahllosen terrestrischen Erscheinungen, wie dem Winde, dem Laufe der Ströme und Flüsse, dem Falle des Regens und anderer schwerer Körper.

Bei diesem letzten Vorgange sehen wir auch die Entstehung dieser Form kinetischer Energie aus einer besonders wichtigen Form der potentiellen Energie ganz unmittelbar. Betrachten wir nämlich die Zusammenstellung eines schweren Körpers mit dem Erdkörper in einer bestimmten Entfernung von seiner Oberfläche, so ist darin, sofern wir lediglich die Schwerkraft berücksichtigen, ein Vorrath von potentieller Energie vorhanden, welcher sich sehr einfach darstellt als das Product aus dem Gewichte des Körpers P (zu messen in Kilogrammen) und seiner Höhe H über der Erdoberfläche, denn dieses Product misst die positive Arbeit, welche in dieser Zusammenstellung von der Schwerkraft überhaupt noch geleistet werden kann. Die kinetische Energie des Systems können wir einfach bemessen nach der lebendigen Kraft $^1/_2 Mv^2$ [halbes Product der Masse[1]) und dem Quadrate der Geschwindigkeit] des beweglichen schweren Körpers, da die Geschwindigkeit des Erdkörpers durch die Wechselwirkung in dem betrachteten Systeme nicht merklich verändert wird. Das Princip der Erhaltung der Energie kommt in diesem Systeme in folgender Weise zur Geltung. Die Summe der potentiellen und kinetischen Energie $PH + {}^1/_2 Mv^2 =$ Const., d. h. sie kann durch die W i r k u n g d e r S c h w e r e nicht verändert werden. Mag sich der Körper in der senkrechten Richtung der Schwere auf oder ab oder in irgend einer beliebigen schrägen oder krummen Bahn be-

[1]) Als Masseneinheit muss hier genommen werden die Masse eines ponderabeln Körpers, welcher auf der Waage gewogen 9,8 kg wiegen würde, d. h. die Masse, welche durch die Wirkung der Krafteinheit (1 Kilogramm) während einer Zeiteinheit (1 Secunde) die Geschwindigkeitseinheit (1 Meter per Secunde) erlangt. Der numerische Werth der Masse eines P Kilogramm wiegenden Körpers wäre also $\frac{P}{9,8}$ oder $\frac{P}{g}$, wenn wir, wie üblich, die Zahl 9,8, d. h. die Beschleunigung durch die Schwere mit dem Buchstaben g bezeichnen.

wegen, immer wird, wenn er bei seiner Bewegung dem Erdkörper näher gekommen ist, z. B. in die Höhe $(H - h_1)$, seine Geschwindigkeit um einen Betrag, den wir u_1 nennen wollen, zugenommen haben, so dass

$$P \, . \, (H - h_1) + {}^1/_2 M(v + u_1)^2 = PH + {}^1/_2 Mv^2$$

und wenn er sich bei der Bewegung vom Erdkörper um den Betrag h_2 entfernt hat, so wird seine Geschwindigkeit um einen entsprechenden Betrag u_2 abgenommen haben, so dass wieder

$$P(H + h_2) + {}^1/_2 M(v - u_2)^2 = PH + {}^1/_2 Mv^2$$

ist. Besonders leicht lässt sich dies durch die bekannten Gesetze des freien senkrechten oder parabolischen Falles und der Pendelbewegung bestätigen, doch wollen wir hier die Rechnungen nicht weiter ausführen.

Kinetische Energie in Form der drehenden oder fortschreitenden Bewegung ganzer zusammenhängender Körper sehen wir auch häufig in viel gebrauchten Vorrichtungen entstehen durch Aufwand einer anderen Form der potentiellen Energie, nämlich durch Aufwand sogenannter „elastischer Spannung“. Man denke z. B. an einen vom Bogen geschossenen Pfeil. Es ist freilich nicht leicht, eine ganz zutreffende Definition von dem selbst im wissenschaftlichen Sprachgebrauche etwas vieldeutigen Worte Elasticität zu geben, und ganz unmöglich ist es, die sogenannten elastischen Kräfte der festen Körper auf die letzten Gründe zurückzuführen, aber das steht fest, dass wir in einem aus seiner natürlichen Form gebrachten elastischen Körper, z. B. einem gebogenen Stabe oder gedehnten Strange einen Vorrath von potentieller Energie haben, welcher bei seinem Verschwinden — bei der Entspannung — Arbeit leistet, so dass entweder kinetische Energie oder ein Aequivalent von potentieller Energie in anderer Form, z. B. Hub einer Last und dergleichen entsteht. Der elastische Körper wirkt ja während des ganzen Ueberganges aus der gespannten ihm aufgezwungenen Form in die natürliche drückend oder ziehend auf andere in geeigneter Weise mit ihm verknüpfte Körper und wird sie also, wenn sie dem Drucke oder Zuge folgen, beschleunigen, so dass kinetische Energie entsteht oder, wenn auf den mit dem elastischen verknüpften Körper noch eine andere der elastischen nahezu gleiche Gegenkraft wirkt, so wird diese überwunden und ihre potentielle Energie vergrössert, „aufgespeichert“. Es sieht nun auf den ersten Blick so aus, als ob hier den Voraussetzungen des Principes der Erhaltung der Energie insofern widersprochen wäre, als man nicht sogleich sieht, dass einander anziehende Massenpunkte einander genähert oder abstossende von einander entfernt sind, während die kinetische Energie entstand. Bei oberflächlicher Betrachtung könnte es sogar so scheinen, als ob durch Elasticität „rotirend“ wirkende Kräfte ins Spiel gebracht werden könnten, die das Perpetuum mobile (siehe S. 4) möglich machten. In der That, wenn man das Federhaus einer Taschenuhr betrachtet, so scheint nach Spannung der Feder eine tangential rotirend wirkende Kraft an seinem Umfange anzugreifen, die, wenn kein

Widerstand geleistet wird, dasselbe bei jeder Umdrehung beschleunigt, so dass es mit immer grösserer Geschwindigkeit in seine ursprüngliche Lage zurückkommt. Aber hier hat bei jeder Umdrehung die Feder im Innern eine andere Gestalt und ihre Spannung nimmt ab, so dass keine unerschöpfliche Arbeitsquelle vorliegt. Wir haben es eben hier nicht mit der elementaren Einwirkung zweier Massenpunkte auf einander zu thun. Vielmehr ist eine Stahlfeder an sich schon ein unübersehbar verwickeltes System von Atomen, die mit rein anziehenden oder abstossenden Kräften auf einander wirken. Das was wir mit dem zusammenfassenden Ausdruck als „elastische Spannung“ der Feder bezeichnen, ist eine Resultante dieser Molekularkräfte und diese kann recht wohl als tangentiale Kraft durch eine beschränkte Zahl von Umdrehungen auf das Federhaus wirken. Dass der letzte Grund der elastischen Wirkungen in Annäherung anziehender oder im Auseinanderrücken abstossender Massenpunkte zu suchen ist, wird schon dadurch wahrscheinlich, dass jeder elastische Körper bei der Entspannung sein Volumen im einen oder im anderen Sinne ändert.

Das Princip der Gleichheit der geleisteten Arbeit und der dadurch erzeugten kinetischen oder potentiellen Energie kann man übrigens auf die elastischen Kräfte auch anwenden, ohne auf ihre Verursachung durch die elementaren molekularen Kräfte zurückzugehen und werden wir im Texte dieses Werkes physiologisch wichtige Beispiele derart erörtern.

Mit dem Namen Elasticität bezeichnet man nicht bloss die im Vorstehenden zunächst ins Auge gefasste Eigenschaft gewisser fester Körper, ihre natürliche Form wieder anzunehmen, wenn dieselbe durch fremde Kräfte verändert war, sondern auch das Ausdehnungsbestreben der Gase, obgleich dasselbe eine Erscheinung ganz anderer Art ist, deren Betrachtung uns den Weg bahnen soll zum Verständnisse einer Energieform von sehr weittragender Bedeutung, nämlich der Wärme.

Man hat in früherer Zeit gemeint, das Bestreben der Gase, sich auszudehnen, beruhe auf einer abstossenden Kraft, welche zwischen den Molekülen derselben stattfinde. Sehen wir ganz ab von der ausserordentlichen Unwahrscheinlichkeit dieser Annahme in sich, so lässt sie sich durch zahlreiche Thatsachen positiv widerlegen. Wir wollen uns hier nur an eine höchst schlagende erinnern. Wenn wir Luft plötzlich gewaltsam comprimiren, indem wir z. B. in einen damit gefüllten Metallcylinder einen gut schliessenden Kolben niederstossen, so haben wir unter Annahme abstossender Kräfte zwischen den Luftmolekülen durch Aufwand eines gewissen Quantums von Energie anderer Form potentielle Energie in der Form von Annäherung einander abstossender Massenpunkte aufgespeichert, durch deren Verbrauch bei Wiederausdehnung der comprimirten Luft die aufgewandte Energie in anderer Form wieder erzeugt werden könnte. Eine andere Veränderung dürfte nicht stattgefunden haben. Nun findet aber bekanntlich bei diesem Vorgange eine Veränderung ganz anderer Art statt. Es wird nämlich das Temperatur-

gleichgewicht zwischen der Luftmasse und der sie umschliessenden Hülle — wenn solches bestanden hatte — gestört und diese nimmt von jener eine Wärmemenge auf, welche man bei Anstellung des Versuchs in geeignetem Maassstabe schon mit der zufühlenden Hand spüren würde. Liesse man das Temperaturgleichgewicht sich wieder herstellen, so wäre hernach die comprimirte Luftmasse bei ihrer Wiederausdehnung nicht mehr im Stande, die zu ihrer Compression angewandte Energie wieder zu erzeugen, obwohl doch die Annäherung der Moleküle dieselbe geblieben wäre.

Diese und noch viele andere Thatsachen haben dahin geführt, das Ausdehnungsbestreben der Gase auf eine ganz andere Weise zu erklären. Man nimmt nämlich gegenwärtig an, das Wesen des gasförmigen Aggregatzustandes bestehe darin, dass die Moleküle durchschnittlich so weit von einander entfernt sind, dass ihre gegenseitige Einwirkung auf einander — sei sie nun anziehend oder abstossend — verschwindend klein ist. Nun befinden sich aber die Moleküle nicht in Ruhe in diesen Abständen von einander, sondern sie fliegen mit durchschnittlich sehr grosser Geschwindigkeit in allen möglichen Richtungen des Raumes unregelmässig zwischen einander herum, wobei jedes Molekül, da eben die gegenseitige Einwirkung in den mittleren Entfernungen verschwindend klein ist, im Allgemeinen dieselbe Bewegungsrichtung geradlinig so lange beibehält, bis es einem anderen Moleküle der Gasmasse oder einem sie begrenzenden Körper so nahe kommt, dass eine molekulare Wechselwirkung eintritt. Welcher Art nun auch diese sein möge, immer wird der Erfolg der Wechselwirkung der sein müssen, dass die beiden Moleküle, welche in Wechselwirkung getreten sind, wieder frei aus einander fliegen mit derselben Summe von lebendiger Kraft, welche vorher in beiden vorhanden war. Mit anderen Worten, der Erfolg des so zu sagen momentanen Aufeinanderwirkens muss ganz derselbe sein, als wenn zwei vollkommen elastische Körper, die in messbarer Entfernung keine Wirkung auf einander ausüben, von einander abprallen.

Nach dieser Auffassung ist der Druck eines Gases auf die es einschliessenden Wände nicht die Wirkung von Kräften im engeren Sinne des Wortes, sondern der unzähligen Anstösse der hin- und herfliegenden Moleküle. Dass ein Gas jeden ihm dargebotenen leeren Raum sogleich einnimmt, versteht sich nach dieser Auffassung ohne Weiteres von selbst, denn sowie eine Wand, welche das Gas gegen den leeren Raum abgrenzte, weggenommen wird, werden die Moleküle, statt an dieser Wand abzuprallen, in den leeren Raum hineinfliegen und es werden so lange in jeder Zeiteinheit mehr Moleküle in den leeren Raum hinein- als aus demselben zurückfliegen, bis eine gleichmässige Vertheilung stattgefunden hat. Auch die rasche Diffusion ungleichartiger Gasmassen in einander ist aus der entwickelten Anschauung ohne Weiteres verständlich.

Wir wollen nun den sogenannten elastischen Druck eines Gases Arbeit leisten lassen, d. h. eine bewegliche Wand demselben folgen lassen. Diese wird entweder selbst kinetische Energie erlangen oder

wenn eine Gegenkraft, z. B. die Schwere, ihre Beschleunigung verhindert, wird die potentielle Energie bezüglich dieser Gegenkraft vermehrt. Hier ist aber nach unserer gegenwärtigen Anschauung vom Wesen des gasförmigen Aggregatzustandes nicht etwa potentielle Energie aufgewendet, denn das Auseinanderrücken der Gastheilchen bei der Ausdehnung entspricht keiner Abnahme der potentiellen Energie, da gar keine abstossende Wirkung zwischen ihnen stattfindet.

Wenn eine Gasmasse bei ihrer Ausdehnung eine äussere Wirkung hervorgebracht hat und doch keine potentielle Energie verloren hat, so muss sie nothwendig kinetische Energie verloren haben, da die ganze Energiesumme des Systems, in welchem der Vorgang statthatte, durch diese innere Wirkung nicht verändert sein kann. Das ist nun auch leicht einzusehen. Wenn der Druck des Gases gegen ein bewegliches Wandstück in den Anstössen der dagegen fliegenden Moleküle besteht, so müssen diese, wenn das Wandstück zurückweicht, mit geringerer Geschwindigkeit zurückfliegen, als mit welcher sie anstiessen, während sie von einem absolut feststehenden Wandstück mit gleicher Geschwindigkeit zurückprallen.

Eine Gasmasse ist somit als ein Magazin kinetischer Energie zu betrachten, von welcher ein Theil durch Expansion gegen den Widerstand von träger Masse oder von Gegenkräften zu äusseren Wirkungen verwendet werden kann. Dem Verschwinden von kinetischer Energie aus der Gasmasse bei ihrer wirksamen Ausdehnung entspricht nun allemal eine Abkühlung derselben, wofern ihr dabei nicht Wärme von aussen zugeführt wird, wie umgekehrt die Gasmasse durch gewaltsame Zusammendrückung erwärmt wird. Wir haben also allen Grund anzunehmen, dass das, was wir die in der Gasmasse enthaltene Wärmemenge nennen, nichts Anderes ist, als die kinetische Energie der hin- und herfliegenden Gasmoleküle.

Man sieht leicht, dass diese Form der kinetischen Energie von Molekularbewegung nicht bloss im gasförmigen Aggregatzustande möglich ist. Das Wesentliche derselben besteht nämlich nicht in dem vollständig freien Fliegen von Molekülen, denen gar keine stabile Gleichgewichtslage zwischen ihren gleichartigen Nachbarn zukommt, sondern das Wesentliche müssen wir sehen in der vollkommenen Unregelmässigkeit der Bewegungen, bei denen keine Richtung des Raumes vorherrscht, vielmehr das eine Molekül hierhin, das andere dorthin geht. Auch ist die Geschwindigkeit keineswegs bei allen Molekülen gleich gross zu denken, nur im Durchschnitt haben in einer grösseren Masse von gleicher Temperatur die Moleküle überall gleiche lebendige Kraft.

Dass gerade diese Unregelmässigkeit das Wesen der Wärme ausmacht, sieht man schon beim gasförmigen Aggregatzustande sehr leicht, denn so wie die Bewegung der Moleküle einer grösseren Gasmasse in einer Richtung vorherrscht, sprechen wir bezüglich dieser Bewegung nicht mehr von Wärme, sondern von einer Strömung in dieser

Richtung oder wenn schichtenweise die Moleküle in gewisser Richtung vorherrschend bewegt sind, so nennen wir das eine Schallwelle, welche sich durch die Gasmasse fortpflanzt.

Unregelmässige, weder reihenweise noch schichtenweise, noch durch die ganze Masse gleichgerichtete Molekularbewegungen können nun aber in festen und tropfbar flüssigen Massen ebenso vorkommen wie in gasförmigen. Ja, wir müssen nothwendig annehmen, dass die Moleküle aller Körper fortwährend in solchen Bewegungen begriffen sind, und die gesammte kinetische Energie dieser unregelmässigen Bewegungen der Moleküle eines Körpers nennen wir die in dem Körper enthaltene Wärmemenge. Beim festen und tropfbar flüssigen Aggregatzustande unterscheiden sich allerdings diese unregelmässigen Molekularbewegungen in einer Beziehung wesentlich von denen beim gasförmigen. Man hat nämlich bei jenen Aggregatzuständen nicht anzunehmen, dass die Moleküle im Durchschnitte so weit aus einander gerückt sind, dass ihre anziehende oder abstossende Wirkung auf einander verschwindend klein ist. Jedem Molekül wird vielmehr durch solche von seinen Nachbarn ausgeübte Wirkungen eine Gleichgewichtslage vorgeschrieben, um welche herum es dann eben schwingende oder rotirende kleine Bewegungen ausführen kann. Die Wärme ist demnach hier streng genommen nicht ausschliesslich als kinetische Energie anzusehen, denn die Moleküle werden sich bei ihren Schwingungen um die Gleichgewichtslage nicht mit constanter Geschwindigkeit bewegen, sondern bei der Entfernung von derselben wird kinetische Energie in potentielle und bei Annäherung an dieselbe wird potentielle Energie in kinetische verwandelt werden. Man kann sie aber ganz als kinetische Energie gemessen denken, indem man sich jedes Molekül mit derjenigen Geschwindigkeit begabt vorstellt, mit der es die Gleichgewichtslage passirt.

Zwischen dem festen und dem flüssigen Aggregatzustande macht die entwickelte Anschauung den Unterschied, dass bei jenem die Moleküle ganz bestimmte stabile Gleichgewichtslagen haben, während bei diesem die Moleküle bei ihren Schwingungen leicht in die Wirkungssphäre anderer Molekulargruppen übertreten und folglich ein beständiges Durcheinanderhinwandern der Theilchen stattfindet, woraus sich die Diffusionserscheinungen an Flüssigkeiten sehr einfach erklären.

Diese Auffassung vom Wesen der Wärme macht die ganz hervorragende Rolle begreiflich, welche gerade diese Form der Energie in allen Naturvorgängen spielt. Man sieht erstens ein, dass die Wärme eine Tendenz der Ausbreitung haben muss. Grenzen zwei Körper an einander und sind die Moleküle des einen durchschnittlich in energischerer Bewegung als im anderen — d. h. hat der eine eine höhere Temperatur als der andere — so werden an der Grenzfläche, wo die Moleküle des einen auf die des anderen wirken, ausserordentlich viel häufiger Fälle vorkommen, wo die schwächer bewegten Moleküle des zweiten von den stärker

bewegten des ersten durch Anstösse beschleunigt werden, als umgekehrt. Es wird also kinetische Energie aus dem wärmeren Körper in den weniger warmen übergehen und sich in diesem weiter verbreiten, bis vollständige Ausgleichung der Temperatur stattgefunden hat.

Man sieht ferner leicht, dass bei allen Vorgängen, wo Energie in irgend welcher Form von einem Körper auf irgend einen anderen übertragen wird und bei allen Bewegungen, wo Körper an einander verschoben werden, mindestens ein Theil der in anderen Formen ins Spiel tretenden Energie in Wärme verwandelt werden muss. In der That werden ja bei allen derartigen Vorgängen die Moleküle der in Wechselwirkung kommenden Körper auch unregelmässig erschüttert werden, was eben eine Entstehung von Wärme aus anderen Formen der Energie bedeutet. So wird beim Zusammenstosse nicht vollkommen elastischer Körper und bei der Bewegung von Massen in einem Widerstand leistenden Medium, sowie bei der Reibung fester Körper an einander stets die in der sichtbaren Bewegung der Massen enthaltene Energie vermindert und dafür Wärme entwickelt.

Bei Gelegenheit solcher Vorgänge hat man auch das Aequivalentverhältniss von Wärme und anderen leicht messbaren Formen von Energie, z. B. von potentieller Energie der Schwerkraft, bestimmt. Man liess z. B. durch ein sinkendes Gewicht eine Maschine treiben, welche durch Reibung eines Schaufelrades in Wasser an der Beschleunigung verhindert wurde, so dass eben die ganze Wirkung des Gewichtsfalles in Erwärmung des Wassers bestand. Durch solche und ähnliche Versuche hat sich herausgestellt, dass eine Wärmeeinheit, d. h. die Wärmemenge, durch welche 1 kg Wasser von 0° auf 1° erwärmt wird, erzeugt werden kann und mithin äquivalent ist der Arbeit von 424 Kilogrammeter [1]).

Wenn in einem aus lauter gleichartigen und gleichartig angeordneten Theilchen bestehenden und darum vollkommen elastischen Medium eine Erschütterung stattfindet, so pflanzt sich die Energie derselben bekanntlich von Schicht zu Schicht fort und breitet sich kugelschalenartig in sogenannten Wellen regelmässig aus. Man bezeichnet diesen Vorgang auch wohl als „Strahlung“, indem auf jeder vom Erschütterungscentrum gezogenen Geraden — auf jedem „Strahl“ — ein Theil der Energie fortschreitet. Gelangt nun eine solche Strahlung zur Grenze eines anderen Körpers, dessen Theilchen nicht gleichartig und regelmässig angeordnet sind, so wird die Energie der Wellenbewegung theilweise oder ganz zur Hervorbringung jener unregelmässigen Erzitterungen der Grenztheilchen verwendet, welche wir Wärme nennen und welche sich dann von der Grenze aus in der vorhin beschriebenen Weise weiter

[1]) Nach der S. 1 gegebenen Definition hat man die Maasseinheit der Arbeitsgrösse, nämlich das Product aus der Einheit der Kraft (Kilogramm) und der Einheit der Wegstrecken (Meter) mit dem Worte „Kilogrammeter“ zu bezeichnen.

ins Innere des Körpers verbreitet. „Die Energie der Strahlung wird durch Absorption in Wärme verwandelt.“ Dieser Vorgang betrifft besonders häufig und in grösstem Maassstabe die Wellenbewegung eines überall im Raume verbreiteten hypothetischen Mediums des Aethers. Weil diese Art von Wellenbewegung, welche der Erde beständig von der Sonne in kolossaler Menge zustrahlt, die Hauptquelle der Wärme auf der Erde ist, hat man auf sie den Namen der Wärme übertragen und bezeichnet sie als „strahlende Wärme“. Dem Wesen der Sache nach könnte man übrigens auch die Schallwellenbewegung strahlende Wärme nennen, denn wenn Schallstrahlen auf einen Körper treffen, der sie weder weiter fortpflanzt noch reflectirt, z. B. auf einen Haufen Heu oder Federn, so wird ihre Energie sicher ebenso zur Wärmeerzeugung verwendet, wie die Energie der Aetheroscillationen in einem undurchsichtigen Körper mit matter Oberfläche, wenn auch bei der Absorption des Schalles die Wärmeentwickelung noch nicht experimentell nachgewiesen ist.

Die auch als Lichtstrahlen bezeichneten, durch das Medium des Aethers fortgepflanzten Bewegungen verdienen allerdings noch in einer anderen Beziehung ganz besonders und vorzugsweise den Namen der „strahlenden Wärme“ — mehr als alle anderen wellenartig fortschreitenden Schwingungen, deren Energie bei der Absorption auch in Wärme verwandelt werden kann. Strahlen jener Art sendet nämlich jeder Wärme enthaltende Körper — also mit einem Worte jeder Körper — aus, sobald seine Oberfläche an ein Medium mit regelmässiger Anordnung der Aethertheilchen grenzt, in welchem sich überhaupt Aetheroscillationen fortpflanzen können, indem die Wärmebewegungen der an der Oberfläche gelegenen Theilchen den Aether in den angrenzenden Schichten des Mediums erschüttern.

Durch diese Ausstrahlung verliert jeder Körper fortwährend von seinem Wärmevorrath. Der Verlust kann aber ersetzt oder auch mehr als ersetzt werden durch die Einstrahlung von benachbarten Körpern. Man sieht leicht, dass die wechselseitige Zustrahlung von Aetheroscillationen zur Ausgleichung der Temperaturen beiträgt, welche andererseits durch die wechselseitige Zuleitung von Wärme bewirkt wird.

Die Wärme steht in besonders enger Wechselbeziehung zu einer Form der potentiellen Energie, welche wir als die „chemische“ bezeichnen. Die heutige Chemie nimmt bekanntlich an, dass die Moleküle eines homogenen Stoffes, sei er ein Element oder eine Verbindung, im Allgemeinen relativ stabile Systeme von mehreren Atomen sind. Bei Elementen setzt sich das System aus gleichartigen, bei Verbindungen aus verschiedenartigen Atomen zusammen. Zwischen den Atomen wirken im einen wie im anderen Falle unzweifelhaft anziehende Kräfte. Darüber, wie trotz derselben die Atome am Zusammenfallen gehindert werden, hat man verschiedene Hypothesen aufgestellt. Eine früher weit verbreitete Meinung ging dahin, dass die ponderabelen von anhaftenden Aether-

2*

theilchen umgeben seien, die eine abstossende Wirkung auf einander ausüben, welche mit abnehmender Entfernung rascher zunehme als die Anziehung zwischen den ponderabelen Kernen, so dass bei einer gewissen Entfernung stabiles Gleichgewicht stattfinden müsste. Seit man indessen den kleinen Atom- und Molekülbewegungen mehr Aufmerksamkeit schenkt, hat man eingesehen, dass die Annahme einander abstossender Aetherhüllen überflüssig ist, denn die Energie der relativen Bewegung sorgt ohne alle Abstossung dafür, dass die Atome eines Moleküls sich in gewissen mittleren Abständen von einander halten. In der That denken wir uns zwei einander anziehende Atome in Bewegung, welche eine merkliche, auf der Verbindungslinie senkrechte — tangentiale — Componente hat, so werden sie um einander rotiren, etwa wie Erde und Mond, ohne je zusammenfallen zu können. Jedoch wird bei dieser Bewegung eine beständige Verwandlung von potentieller Energie in kinetische und umgekehrt stattfinden, indem die Atome, so lange sie sich einander nähern, beschleunigt, so lange sie sich von einander entfernen, verzögert werden. Das Maximum der kinetischen Energie, welches in einem solchen Systeme im Minimum der Entfernung der Theilchen herrscht, ist eine Grösse, die von der Energie der Bewegungen abhängt, welche die Gesammtmoleküle gegen einander ausführen und welche wir weiter oben als Wärme bezeichnet haben, denn die intramolekulare Bewegung, welche die Atome innerhalb des Moleküls um seinen gemeinsamen Schwerpunkt ausführen, können durch wechselseitige Anstösse der Moleküle beschleunigt werden und umgekehrt. Je heftiger also in einem Aggregat die Bewegung der Gesammtmoleküle ist, desto heftiger wird auch die durchschnittliche intramolekulare Atombewegung sein. Die Energie dieser letzteren wird also als ein Bestandtheil der im Körper enthaltenen Wärme zu betrachten sein, und wenn wir einem Körper Wärme zuführen, so vermehren wir allemal auch die Energie der intramolekularen Atombewegungen desselben.

Wie man sich auch die Bahnen der Atome eines Moleküls bei ihren Bewegungen um den gemeinsamen Schwerpunkt denken mag, stets wird die grösste gegenseitige Entfernung, in welche sie dabei kommen, zunehmen mit wachsender Energie jener Bewegung. Wenn also diese über einen gewissen Werth hinaus wächst, so können die Atome zeitweise in so weiten Abstand von einander kommen, dass die wechselseitige (chemische) Anziehung nicht mehr entschieden überwiegt über fremde Kräfte, die auf das Atom wirken. Sowie dies stattfindet, so sind die Atome nicht mehr Theile eines stabilen Partialsystems, sondern selbstständig bewegte Theile des ganzen Aggregats. Das Molekül ist gesprengt oder „dissociirt“. Seine Atome werden alsdann nicht mehr durch ihre (chemische) Anziehung auf ihren Bahnen zeitweise beschleunigt, es ist kinetische Energie verschwunden, dafür aber potentielle Energie vorhanden, welche natürlich jeden Augenblick unter geeigneten Umständen wieder in kinetische verwandelt werden kann, wo die Atome

einander wieder so nahe kommen, dass sie sich von Neuem zu einem relativ stabilen Systeme verknüpfen.

Diese Betrachtung macht begreiflich, dass durch Zufuhr von Wärme oder mit anderen Worten durch Steigerung der Temperatur jedes Aggregat von Molekülen in ein Aggregat von freien Atomen verwandelt werden kann, dass insbesondere alle chemischen Verbindungen dadurch zerlegt werden können, und dass umgekehrt bei der Bildung von Molekülen aus freien Atomen kinetische Energie erzeugt wird. Da aber im Allgemeinen bei einem solchen Vorgange die wirkenden Anziehungskräfte beim einen Atompaare diese, beim anderen jene Richtung haben werden, so wird auch bei den entstehenden Bewegungen keine Richtung des Raumes besonders begünstigt sein, es wird ungeordnete Atom- und Molekularbewegung, d. h. eben Wärme erzeugt werden.

Bei den wirklichen chemischen Umsetzungen geht gemeiniglich Dissociation und Verknüpfung gleichzeitig neben einander her. Denken wir z. B. an die Entstehung von Wasser aus Wasserstoff und Sauerstoff. Hier haben wir ein Gemenge von Molekülen H — H, H — H und O — O, diese werden durch Wärme dissociirt oder zur Dissociation geneigt gemacht und dann wirkt die äusserst starke Anziehung zwischen *H* und *O*, so dass Systeme H — O — H, d. h. Wassermoleküle entstehen und zwar wird durch den Aufwand von potentieller Energie bei der Annäherung der O-Atome an die H-Atome eine grosse kinetische Energie erzeugt, mit anderen Worten werden die Atome jedes entstandenen Moleküls in heftiger gegenseitiger Bewegung begriffen sein, die sich zum Theil auch in Bewegung der ganzen Moleküle umsetzen wird.

Im Allgemeinen werden nur solche chemische Umsetzungen leicht, so zu sagen, von selbst von statten gehen, bei welchen die schliesslich zur Wirksamkeit gelangenden Anziehungskräfte stärker sind als die, welche bei Trennung der zuerst bestehenden Moleküle überwunden werden müssen, d. h. solche chemische Processe, bei denen im Ganzen Wärme entwickelt wird. Aber auch bei ihnen ist Steigerung der Temperatur meist eine unerlässliche Bedingung, denn die zuerst bestehenden Molekularverknüpfungen müssen schon gelockert oder theilweise gesprengt sein, wenn die überwiegenden Anziehungskräfte zwischen den Bestandtheilen der verschiedenartigen Moleküle zur Wirkung kommen sollen. So wird es verständlich, dass zu den meisten sogenannten Verbrennungen eine gewisse Entzündungstemperatur erforderlich ist.

Die Zusammenstellung von zwei unverbundenen Stoffen, deren Atome grosse Verwandtschaft zu einander haben, z. B. die Zusammenstellung von Kohle und freiem Sauerstoff, enthält demnach einen bestimmten Vorrath von potentieller Energie, welche in kinetische und zwar in Wärme verwandelt wird, wenn die Verbindung sich bildet — in unserem Beispiele, wenn die Kohle verbrennt. Das Maass der entwickelten Wärme ist zugleich das Maass der vorhanden gewesenen potentiellen Energie.

Es kann aber auch eine chemische Verbindung für sich unter Umständen einen Vorrath von potentieller Energie enthalten, welcher beim Zerfall in einfachere Verbindungen in kinetische Energie verwandelt wird. Bekannt ist z. B., dass bei der Zersetzung des Nitroglycerins, welches eine verwickelte Verbindung von Kohlenstoff, Stickstoff, Wasserstoff und Sauerstoff darstellt, eine enorme Wärmemenge entwickelt wird. Von dem hier eingenommenen Standpunkte aus ist dies ganz begreiflich. Wir müssen uns nämlich vorstellen, dass in dem Molekül des Nitroglycerins die meisten Sauerstoffatome von den Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen durch zwischengelagerte Stickstoffatome ziemlich fern gehalten werden, obgleich in nächster Nähe ihre Anziehung zu den ersteren weit energischer ist als zu den letzteren. Wenn also dieser verhältnissmässig weniger stabile Zustand gestört wird, so können jene stärkeren Anziehungskräfte zur Wirksamkeit kommen, die Kohlenstoff- und Wasserstoffatome kommen zu den Sauerstoffatomen in allernächste Nähe, und Stickstoffatome nähern sich paarweise, d. h. die Verbindung zerfällt in Kohlensäure, Wasser und freien Stickstoff. Man sieht, dass auf diese Weise ein grosser Betrag kinetischer Energie erzeugt sein kann, da eben die bei der Annäherung von Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen an Sauerstoffatome geleistete positive Arbeit viel grösser ist, als die negative Arbeit, welche dem Auseinandertreten von Kohlenstoffatomen und der Entfernung der Stickstoffatome von den Sauerstoffatomen entspricht.

Eine ganz eigenthümliche Rolle spielen die elektrischen Kräfte in dem Getriebe der Verwandlungen einer Energieform in die andere. Es kommt dies daher, dass die materiellen Punkte, von welchen man die enorm grossen elektrischen Anziehungs- und Abstossungskräfte ausgeübt denken muss, nur verschwindend wenig Masse besitzen. Bei den elektrischen Bewegungserscheinungen kommt daher — abgesehen etwa von gewaltigen Funkenentladungen — kinetische Energie der bewegten elektrischen Theilchen nie als solche in Betracht. Wenn elektrische Theilchen durch irgend welche Kräfte, die man „elektromotorische" nennt, in Bewegung gesetzt werden, so verlieren sie die erlangte Geschwindigkeit durch die Widerstände momentan, so dass ein elektrischer Strom in einem Leiter, sowie die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört, augenblicklich stille steht. Er verhält sich in dieser Beziehung ganz anders wie ein Strom ponderabeler Flüssigkeit, z. B. ein Wasserstrom in einer Röhre. Dieser dauert, wenn die Kräfte, die ihn in gleichmässigem Gange hielten, zu wirken aufhören, wegen der Trägheit der Masse noch eine merkliche Zeit mit verzögerter Geschwindigkeit fort — der elektrische Strom nicht.

Es ist hiernach eine durchaus irrige Vorstellung, der man in sonst sehr werthvollen physiologischen Schriften öfters begegnet, es könne die Arbeit elektromotorischer Kräfte, z. B. die Arbeit der chemischen Anziehungskräfte in den Elementen einer Grove'schen oder Daniell'schen Kette in kinetische Energie des „elektrischen Strömens" verwan-

delt werden. Hier wird durch die Arbeit der chemischen Kräfte stets nur unter Vermittelung des elektrischen Strömens und der Widerstände gegen dasselbe ein volles Aequivalent von Wärme in der ganzen Leitung erzeugt, oder es wird durch elektrodynamische Fernwirkung des Stromes ein Theil der Arbeit zu mechanischen Leistungen verwendet, der dann wegen der Schwächung des Stromes durch Gegeninductionen von der Wärme abgeht. Das letztere findet bei der heutzutage in der Technik eine so grosse Rolle spielenden elektrischen Kraftübertragung statt. Mit einem Worte, der elektrische Strom ist keine selbstständige Form kinetischer Energie, sondern nur ein Mittel zur Verwandlung und Uebertragung von Energie. Das strömende elektrische Theilchen muss auf jedem Punkte seiner Bahn (etwas uneigentlich gesprochen) potentielle Energie verlieren und in dem betreffenden Stücke des Leiters wird ein diesem Verluste entsprechendes Quantum von Wärme frei.

Selbständige Energie der Elektricität giebt es nur in der potentiellen Form, z. B. bei Ladung einer Leydener Flasche, die dann bei der Entladung in Wärme verwandelt wird.

ERSTER ABSCHNITT.

MOLEKULARPHYSIK.

Erstes Capitel.

Hydrodiffusion.

Unter Diffusion versteht man das Ineinanderströmen in Berührung befindlicher Massen von verschiedenen Flüssigkeiten bis zu völlig gleichmässiger Mischung. Bei elastisch flüssigen Körpern tritt diese Erscheinung ausnahmslos ein, die Gase mögen sein, welche sie wollen, und sie mögen in unmittelbarer Berührung stehen oder durch eine permeabele Scheidewand von einander getrennt sein. Auch gelten hier sehr einfache aus der kinetischen Gastheorie a priori ableitbare Gesetze, welche in den neueren Lehrbüchern der Physik hinlänglich ausführlich behandelt sind.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten findet dieser Vorgang des Ineinanderströmens nicht in allen Fällen statt. Es giebt vielmehr Paare von Flüssigkeiten, z. B. Wasser und Oel, welche überhaupt nicht mischbar sind. Sind die beiden in Berührung gebrachten Flüssigkeiten aber mischbar, dann tritt auch, sowie sie in Berührung kommen, der Vorgang des Ineinanderströmens ein und steht nicht eher still, als bis sich eine vollkommen gleichmässige Mischung gebildet hat. Wir wollen diesen Vorgang als „Hydrodiffusion" bezeichnen, und seine Gesetze nachstehend entwickeln.

Man hat besonders solche Fälle genauer untersucht, wo die eine Flüssigkeit eine Salzlösung, die andere das reine Lösungsmittel ist. Diese experimentellen Untersuchungen haben ergeben, dass die Verbreitung — Diffusion — eines Salzes in seinem Lösungsmittel nach demselben Gesetze vor sich geht, nach welchem sich die Wärme in einem Leiter verbreitet, welches Grundgesetz auch Ohm in seiner berühmten

Abhandlung der Betrachtung des elektrischen Stromes zu Grunde legt. Um das Grundgesetz anschaulich zu formuliren, müssen wir, auf die volle Allgemeinheit verzichtend, einige besondere Bedingungen festsetzen, die übrigens in Versuchen auch allemal erfüllt sein müssen, wenn die Diffusion ungestört beobachtet werden soll. Es muss nämlich offenbar stets in einer wagerechten Schicht dieselbe Dichtigkeit der Lösung statthaben, denn sowie diese Bedingung nicht erfüllt wäre, so würden auch Theile von verschiedenem specifischen Gewichte in einer wagerechten Schicht sich befinden, und sofort würde die Schwere Massenströmungen in Bewegung setzen, deren Erfolg sich mit dem Erfolge der Molekularströmungen zusammensetzte, und es käme somit der letztere nicht rein zum Vorschein. Diese eine Bedingung genügt aber nicht, denn wenn die Schwere keine Massenströmungen veranlassen soll, so müssen von unten nach oben Schichten von immer geringerem specifischen Gewichte auf einander folgen. Denken wir uns jetzt eine Flüssigkeitsmasse, bestehend aus Salz und Wasser, in einem beliebig gestalteten Gefässe. Die Concentration der Lösung soll in jeder wagerechten Schicht überall gleich, aber in verschiedenen Schichten verschieden sein, so jedoch, dass nie eine höher gelegene Schicht concentrirter als irgend eine tiefer liegende ist. Die Schwere für sich wird jetzt diese Flüssigkeitsmasse vollkommen in Ruhe lassen, und wir haben Gelegenheit, die Bewegungen ungestört zu beobachten, welche die Molekularkräfte allein hervorbringen. Es fragt sich nun, welches Gesetz die Salzmenge bestimmt, die an irgend einer Stelle den Querschnitt der Flüssigkeitsmasse von unten nach oben passirt. In der That werden ja die Molekularkräfte, da sie die Concentrationsdifferenzen auszugleichen streben, unter den von uns gesetzten Bedingungen Salz nur nach oben und Wasser nur nach unten befördern. Um das Gesetz zu verstehen, muss man sich zunächst eine Grösse klar machen, die für jeden wagerechten Querschnitt unserer Flüssigkeitsmasse einen besonderen Werth haben kann. Ich will diese Grösse bezeichnen als die „Concentrationsabnahme von unten nach oben“. Dass eine solche überall stattfinden müsse, liegt in den gesetzten Bedingungen, es lässt sich dieselbe aber auch numerisch angeben. Betrachten wir nämlich zwei sehr nahe über einander liegende Querschnitte, so wird im Bereiche des oberen eine gewisse Concentration statthaben, die um ein sehr Geringes kleiner ist als die im Bereiche des unteren Querschnittes statthabende Concentration. Setzen wir nun für die Entfernung zweier Querschnitte von einander eine sehr kleine Einheit, z. B. 1 mm fest, so können wir die Concentrationsabnahme in irgend einer Höhe definiren als diejenige Differenz der Concentrationen, welche zwei in dieser Höhe liegende und 1 mm von einander entfernte Querschnitte zeigen.

Das Grundgesetz der Diffusion lässt sich jetzt so aussprechen: Durch die Flächeneinheit eines in bestimmter Höhe gelegenen wagerechten Querschnittes wandert in der (sehr klein anzunehmenden) Zeiteinheit aufwärts eine Salzmenge, gleich dem Producte aus der für die in Rede

stehende Höhe gültigen Concentrationsabnahme und einem gewissen constanten Factor, welcher nur noch von der Natur des betrachteten Salzes, der Natur des Lösungsmittels und der Temperatur abhängt. Dieser constante Factor ist also für jede Combination eines Salzes und Lösungsmittels bei gegebener Temperatur eine charakteristische Grösse, die wir die Diffusionsconstante nennen können.

Man sieht leicht, dass die Diffusion, wenn sie diesem Gesetze folgt, in der That in jeder endlich begrenzten Flüssigkeitsmasse zur schliesslichen Ausgleichung aller Concentrationsdifferenzen führen müsse, denn es wird stets Salz von Punkten höherer zu Punkten niederer Concentration geführt, so dass die Differenz zwischen den Concentrationen der beiden Punkte geringer wird; dadurch wird aber auch die Concentrationsabnahme von einem Punkte nach dem anderen hin kleiner, und folglich dem Gesetze gemäss der Strom schwächer. Die vollständige Ausgleichung aller Differenzen würde demnach erst nach unendlicher Zeit erfolgen, aber factisch wird der schliessliche Gleichgewichtszustand doch schon nach endlicher Zeit merklich erreicht, und zwar offenbar um so eher, je grösser die Diffusionsconstante ist.

Man kann nach dem Obigen die Diffusionsconstante, sie mag mit C bezeichnet werden, definiren als diejenige Salzmenge (in Grammen), welche während einer beliebig gewählten Zeiteinheit die Einheit des Querschnittes passirt, wenn in der Gegend dieses Querschnittes während der ganzen Zeiteinheit die Concentrationsabnahme constant der Einheit gleich war.

Um die Diffusionsconstante C für ein gewisses Salz und Lösungsmittel experimentell zu bestimmen, ist es am einfachsten, folgendermaassen zu verfahren. Man kittet eine Röhre von bekanntem überall gleichem Querschnitt auf ein mit dem Salze gefülltes Gefäss. In das Rohr giesst man Wasser (oder allgemein das Lösungsmittel), das Ganze stellt man in ein grosses Reservoir mit Wasser. Hat dieser Apparat vorläufig einige Zeit gestanden, so stellt sich in dem Rohre ein stationärer Zustand her, für welchen die Concentrationsabnahme in dem Rohre von Millimeter zu Millimeter gleich ist, weil stets am unteren Ende, wo das feste Salz liegt, die Lösung absolut gesättigt und am oberen Ende, wo das Rohr in die verhältnissmässig grosse Wassermasse ausmündet, die Concentration merklich gleich Null ist. Man kann also für diesen Zustand leicht den Werth der im Rohre überall constanten Concentrationsabnahme berechnen. Nun hat man nur noch durch irgend eine chemische Methode zu bestimmen, wie viel Salz in einer gegebenen Zeit aus dem Rohre in die umgebende Wassermasse übertritt. Diese Menge, dividirt durch den bestimmten Werth der Concentrationsabnahme, durch die Grösse des Röhrenquerschnittes und durch die Zeit, ist die Diffusionsconstante.

Solche Versuche habe ich mit Kochsalz und Wasser angestellt[1]),

---

[1]) A. Fick: Ueber Diffusion. Pogg. Ann. Januar 1855.

und zwar wurden je drei Röhren gleichzeitig aufgestellt, so dass sich die Versuche gegenseitig controlirten, denn es muss sich für jede Röhre bei gleicher Temperatur dieselbe Diffusionsconstante ergeben. Die der Berechnung zu Grunde gelegten Einheiten sind: Zeiteinheit = 24 Stunden, Querschnittseinheit = Oberfläche eines Kreises von 10 mm Radius; Einheit der Concentrationsabnahme ist diejenige, bei welcher die Concentration im Spatium eines Millimeters von vollkommener Sättigung bis Null abnähme. Die folgende Tabelle lässt sehen, mit welchem Grade von Genauigkeit die einander controlirenden Versuche zusammen stimmen.

Temperatur während des Processes	Diffusionsconstante, berechnet aus der Salzmenge, welche lieferte		
	das längste Rohr	das mittlere Rohr	das kürzeste Rohr
15,8 bis 14,8	9,67	9,7	9,3
15,5 „ 16	—	9,57	—
16 „ 16,5	—	9,94	—
17,5 „ 18,5	10,79	—	—
18 „ 19	10,71	11,08	10,50
20	11,14	—	11,02
19 „ 22	11,44	11,33	—
20 „ 21	11,89	—	11,12

Man sieht aus dieser Tabelle ferner, dass die Diffusionsconstante sehr rasch mit der Temperatur wächst. Es versteht sich wohl von selbst, dass die hier zunächst für Salzlösungen abgeleiteten Sätze mit leichter Modification des Ausdruckes beliebige Combinationen mischbarer Flüssigkeiten, z. B. Alkohol und Wasser, übertragen werden können.

Die Constante C, welche aus Versuchen von der soeben beschriebenen Anordnung am bequemsten gefolgert werden kann, ist die einzige für eine gegebene Körpercombination und Temperatur wirklich constante, also von allen anderen Bedingungen unabhängige Grösse, die man also passender Weise das „Maass der Diffusibilität“ der betreffenden Körpercombination bei der betreffenden Temperatur nennen könnte. Graham ist in seiner sehr bekannt gewordenen Arbeit[1]) über den Gegenstand, der uns hier beschäftigt, nicht bis zu dieser Zergliederung des Processes vorgegangen; er will das Maass der „Diffusibilität“ aus anderen Versuchen unmittelbar herleiten, die nach folgendem Plane angestellt waren:

[1]) Ann. d. Chem. u. Pharm. 77, 56, nebst Fortsetzung in demselben Bande.

stehende Höhe gültigen Concentrationsabnahme und einem gew
constanten Factor, welcher nur noch von der Natur des betrac
Salzes, der Natur des Lösungsmittels und der Temperatur ab
Dieser constante Factor ist also für jede Combination eines Salze
Lösungsmittels bei gegebener Temperatur eine charakteristische
die wir die Diffusionsconstante nennen können.

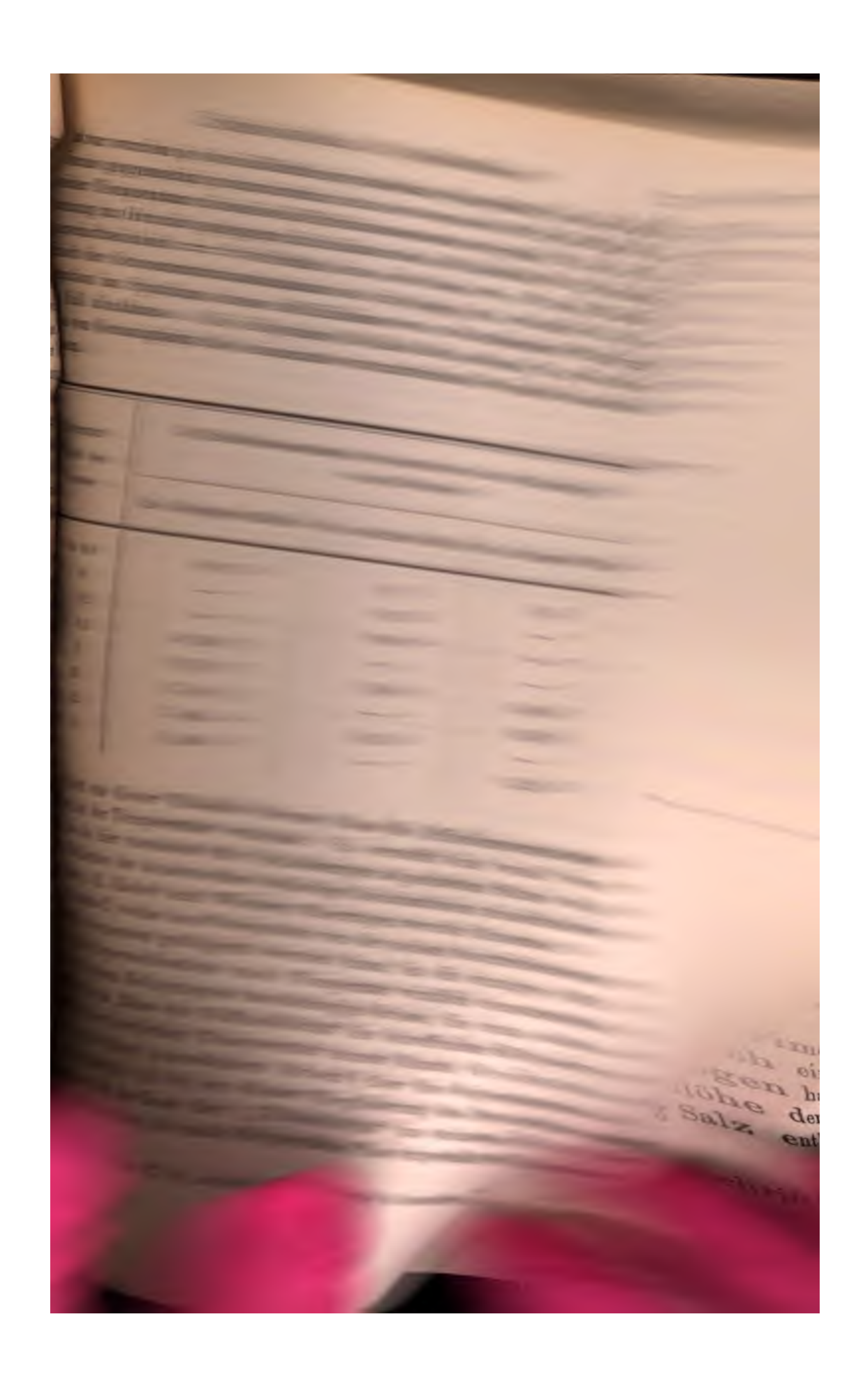
Man sieht leicht, dass die Diffusion, wenn sie diesem Gesetz
in der That in jeder endlich begrenzten Flüssigkeitsmasse zur
lichen Ausgleichung aller Concentrationsdifferenzen führen müss
es wird stets Salz von Punkten höherer zu Punkten niederer
tration geführt, so dass die Differenz zwischen den Concen
der beiden Punkte geringer wird; dadurch wird aber auch die
trationsabnahme von einem Punkte nach dem anderen hin kle
folglich dem Gesetze gemäss der Strom schwächer. Die v
Ausgleichung aller Differenzen würde demnach erst nach u
Zeit erfolgen, aber factisch wird der schliessliche Gleichgewic
doch schon nach endlicher Zeit merklich erreicht, und zw
um so eher, je grösser die Diffusionsconstante ist.

Man kann nach dem Obigen die Diffusionsconstante, sie
bezeichnet werden, definiren als diejenige Salzmenge (in Gramm
während einer beliebig gewählten Zeiteinheit die Einheit des Q
passirt, wenn in der Gegend dieses Querschnittes während
Zeiteinheit die Concentrationsabnahme constant der Einheit

Um die Diffusionsconstante C für ein gewisses Salz u
mittel experimentell zu bestimmen, ist es am einfachsten, folg
zu verfahren. Man kittet eine Röhre von bekanntem übe
Querschnitt auf ein mit dem Salze gefülltes Gefäss. In d
man Wasser (oder allgemein das Lösungsmittel), das Gan
in ein grosses Reservoir mit Wasser. Hat dieser App
einige Zeit gestanden, so stellt sich in dem Rohre ein st
stand her, für welchen die Concentrationsabnahme in d
Millimeter zu Millimeter gleich ist, weil stets am unteren
feste Salz liegt, die Lösung absolut gesättigt und am
wo das Rohr in die verhältnissmässig grosse Wasserma
die Concentration merklich gleich Null ist. Man kann
Zustand leicht den Werth der im Rohre überall cons
trationsabnahme berechnen. Nun hat man nur noch d
chemische Methode zu bestimmen, wie viel Salz in eine
aus dem Rohre in die umgebende Wassermasse übertrit
dividirt durch den bestimmten Werth der Concentratio
die Grösse des Röhrenquerschnittes und durch die Zeit,
constante.

Solche Versuche habe ic[illegible] Kochsalz und W

[1] A. Fick: Ueber D[illegible] Ann. Januar 18[illegible]



Er füllt gleich grosse, gleich gestaltete Flaschen mit den Lösungen der zu prüfenden Körper bis an den Hals (der 1,25 engl. Zoll Durchmesser hatte). Der Hals selbst wurde noch mit reinem Wasser gefüllt und dann das ganze Gefäss in einen Wasserbehälter eingesenkt; er bestimmte die Menge des gelösten Körpers, welche nach Verlauf von 27 Tagen aus der Flasche in das Wasser des Behälters diffundirt war. Er glaubte in den so gewonnenen Zahlen das Maass der Diffusibilität gefunden zu haben. Nach den hier voraufgeschickten Erörterungen darf man aber keineswegs erwarten, dass diese Zahlen unserem C proportional ausfallen müssten. Es entsteht nämlich offenbar in dem Halse der Flaschen nicht ein stationärer Diffusionsstrom, sondern ein Process, der sehr schwer analytisch zu erörtern wäre. Diese Zahlen sind aber dennoch sehr interessant, indem sie wenigstens mit der Diffusibilität gleichzeitig wachsen, wenn auch nicht proportional, so dass ein in Graham's Versuchen mit einer grösseren Zahl bezeichneter Körper jedesfalls diffusibeler ist, als ein mit einer kleineren bezeichneter. Ich werde deshalb die numerischen Resultate Graham's hier mittheilen, um so mehr, als eine vergleichende Uebersicht verschiedener Körper auf einem anderen Wege noch nicht gewonnen ist.

Lösung von 20 Thln. wasserfreien Salzes auf 100 Thle. Wasser	Specif. Gewicht der Lösung	Während 8 Tage diffundirte Menge in Grains
Chlornatrium	1,1265	58,5
	1,1265	58,87
Schwefelsaure Magnesia	1,185	27,42
Salpetersaures Natron	1,120	52,1
	1,120	51,02
Schwefelsäurehydrat	1,108	68,79
	1,108	69,86
Rohrzucker	1,070	27,74
Geschmolzener Rohrzucker	1,066	26,21
Stärkezucker	1,061	26,94
Syrup von Rohrzucker	1,069	32,55
Gummi arabicum	1,060	13,24
Albumin	1,053	3,08

Die Temperatur bei allen Versuchen hielt sich zwischen den Grenzen von 15,5° und 17,0°. Das Diffusionsvermögen von Albumin wird durch Zusatz von Essigsäure etwas erhöht. Eine Zumischung von Eiweiss vermindert das Diffusionsvermögen von Salzen nicht, ebensowenig das des Harnstoffes, welches übrigens dem des Chlornatriums sehr nahe steht.

Sehr bemerkenswerthe Versuche stellte Graham noch an mit Mischungen verschiedener Salzlösungen, die er, unter Beibehaltung aller sonstigen Anordnungen, in seine Flaschen füllte und diffundiren liess. Es fand sich nämlich, dass durch die gleichzeitige Anwesenheit des anderen Salzes die Diffusibilität des weniger löslichen vermindert wurde. Wurde doppeltschwefelsaures Kali in die Flasche gefüllt, so diffundirte nicht bloss dieses Salz heraus, sondern auch noch freie Schwefelsäure, so dass also ein Theil dieses Salzes durch die Diffusion zersetzt wurde. Ebenso wird der Alaun unter diesen Bedingungen theilweise zersetzt, indem mehr schwefelsaures Kali in das umgebende Wasser diffundirt, als mit der gleichzeitig diffundirenden schwefelsauren Thonerde zusammen Alaun bildet. Mischte Graham schwefelsaures Kali (in sehr verdünnter Lösung, damit nicht unmittelbar Fällung entsteht), Chlorkalium oder Chlornatrium mit Kalkwasser und liess die Mischung gegen Kalkwasser diffundiren, so diffundirten die freien Alkalien und die Säure verband sich mit dem Kalke, der niederfiel, wenn es Schwefelsäure war.

Es scheint noch aus Graham's Versuchen hervorzugehen, dass schwache Diffusionsströme einander ohne Störung durchkreuzen können; denn es fand sich, dass die Diffusion einer 4 procentigen Lösung von kohlensaurem Natron genau in derselben Weise vorging, mochte die umgebende Flüssigkeit reines Wasser oder eine 4 procentige Lösung von Chlornatrium sein. Auch bei einigen anderen Combinationen zweier Salze wurde dasselbe Verhalten beobachtet.

Die von mir in der oben citirten Abhandlung begründete und vorstehend kurz mitgetheilte Theorie der Hydrodiffusion ist später von mehreren Physikern [1]) mathematisch und experimentell weiter verfolgt worden. Die genauesten Versuche haben, wie von vornherein zu erwarten war, ergeben, dass das von mir ausgesprochene Grundgesetz für die Diffusion ebenso wenig absolut streng gültig ist, wie das entsprechende Grundgesetz für die Wärmeleitung. Wie hier die Wärmeleitungsfähigkeit mit zunehmender Temperatur abnimmt, so ist auch die Diffusionsconstante für hohe Werthe der Concentration ein wenig kleiner als für kleine Werthe derselben. Indessen sind die Abweichungen doch so geringfügig, dass zur ersten Orientirung in den Erscheinungen der Hydrodiffusion das angenommene Grundgesetz vollkommen genügt.

Ein weiteres Eingehen in theoretische und experimentelle Einzelheiten ist hier nicht am Platze, es mag genügen, noch eine bemerkenswerthe Folgerung zu erwähnen, welche Stefan gezogen hat. Man denke sich in einem prismatischen Gefässe von grosser Höhe den Boden 10 cm hoch mit Kochsalzlösung bedeckt, welche 10 g Salz enthält. Darüber

---

[1]) Siehe insbesondere H. F. Weber, Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft 1879, und Stefan, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, December 1878, Januar 1879.

sei in beliebig grosser Höhe reines Wasser geschichtet. Bis durch Diffusion 1 mg Kochsalz den einen Meter über dem Boden genommenen Querschnitt des Gefässes passirt hat, werden 319 Tage vergehen. Von Rohrzucker würde unter denselben Bedingungen erst nach zwei Jahren und sieben Monaten, von Eiweiss erst nach 14 Jahren ein Milligramm auf einen Meter Höhe gelangen. Man sieht aus diesen Beispielen, welch grosse Zeiten zur Ueberführung von Stoffen auf grössere Entfernungen erforderlich sind, wenn diese Ueberführung durch Diffusion allein bewerkstelligt werden soll, was für physiologische und pathologische Betrachtungen von einigem Interesse ist.

Zweites Capitel.

Imbibition.

In gewissen Fällen dringen Flüssigkeiten auch in den von festen Körpern eingenommenen Raum ein. Man kann diese Erscheinungen ganz im Allgemeinen mit dem Ausdrucke Imbibition bezeichnen. Es giebt aber offenbar sehr wesentlich verschiedene Arten der Imbibition. Es giebt nämlich erstens Körper, deren gröbere Theile durch Lückensysteme getrennt sind, welche stets andere Stoffe enthalten. Ein Badeschwamm ist ein Beispiel. Bei anderen Körpern derart sind die Lücken nicht so gross, aber doch immerhin von bestimmbarer Ausdehnung, z. B. bei porösem Thon, und es trifft auch hier wieder die Hauptbestimmung zu, dass die fraglichen Lücken regelmässig mit einem anderen Stoffe (meist mit Luft) ausgefüllt sind. In solche Lücken kann nun eine Flüssigkeit eindringen. Es bleiben aber dann in dem betreffenden Raume neben einander endliche Massen von Wasser und Massen von Thon, oder wie sonst der poröse Körper und die Flüssigkeit heissen mögen. Die das feste Gerüste bildenden Thonmassen werden durch das Eindringen von Wasser nicht im Mindesten geändert. Die Kräfte, welche hier die Flüssigkeit in die Lücken des festen Körpers einsaugen, sind dieselben, welche die Erscheinungen der Capillarität bedingen. Wir können daher den in Rede stehenden Vorgang im Besonderen als capilläre Imbibition bezeichnen. Man kann aus jedem beliebigen festen Stoffe, selbst aus Metallen, aus Glas und aus Krystallen, Körper herstellen, die der capillären Imbibition fähig sind. Man muss nur dem Körper ein schwammiges, feinporiges Gefüge geben.

Ein durchaus anderer Vorgang ist das eigentlich moleküläre Eindringen von Flüssigkeiten in feste Körper, das man auch wohl mit dem Worte „Quellung“ bezeichnet. Ein ausgezeichnetes Beispiel

hierfür bietet das Aufquellen eines trockenen Leimstückes in kaltem Wasser. Der wesentliche Unterschied zwischen diesem Vorgange und der capillären Imbibition zeigt sich sehr deutlich darin, dass beim Aufquellen des Leims nicht etwa Luft aus dem Leime verdrängt wird, wie dies sichtlich der Fall ist, wenn man ein Stück poröses Thones in Wasser wirft. Das in den Leim eindringende Wasser findet nicht schon leere oder mit Luft gefüllte Lücken zwischen starren Massen vor, sondern die Wassermoleküle lagern sich zwischen die Leimmoleküle ein, daher auch im Allgemeinen eine entsprechende Volumzunahme eintritt. Das Resultat des Processes ist gleichsam ein neuer Körper, ein neues Molekularaggregat ähnlicher Art wie eine Lösung. Diese Erscheinung können daher auch nicht alle festen Stoffe zeigen. Es ist z. B. nicht möglich, Metalle, Glas, krystallinische Stoffe mit Wasser zu tränken. Der Stoff muss eben „quellungsfähig“ sein.

Für Wasser und wässerige Lösungen sind hauptsächlich die nicht krystallisirten organischen Stoffe quellungsfähig, insbesondere Leim, geronnenes Eiweiss und dergleichen. Die Quellungsfähigkeit dieser Stoffe ist eine der Grundbedingungen des organischen Lebens, denn sie bilden im gequollenen Zustande eben jene halbfesten, weichen Gebilde, an deren Existenz alles organische Leben geknüpft ist. Besonders untersucht hat man auf ihre Quellungsfähigkeit die aus leimgebender Substanz gebildeten thierischen Membranen, wie die Harnblase, den Herzbeutel etc. Uebrigens fehlt bei diesen Körpern wahrscheinlich nicht gänzlich die capilläre Imbibition, jedoch dürfte sie gegen die eigentliche Quellung bedeutend zurücktreten.

Die bis jetzt über Quellung angestellten Untersuchungen beziehen sich vorzugsweise auf Kochsalzlösungen und Lösungen von schwefelsaurem Natron. Ein erster wichtiger Satz, der sich dabei herausgestellt hat, ist dieser: Die oben bezeichneten thierischen Membranen quellen in reinem Wasser stärker auf als in Salzlösungen und in diesen um so stärker, je verdünnter sie sind. So fand Liebig, dass 100 Gewichtstheile trockener Ochsenharnblase aufnehmen von reinem Wasser 310 Gewichtstheile, von 9 procentiger Kochsalzlösung 288 Theile, von 13,5 procentiger 235 Theile, von 18 procentiger 219 Theile. Die von einer Gewichtseinheit des quellungsfähigen Körpers aufgenommene Flüssigkeitsmenge kann man zweckmässig das Quellungsverhältniss nennen. Cloëtta fand nun das Quellungsverhältniss des Ochsenherzbeutels für 5,4 procentige Kochsalzlösung = 1,35, für 24,3 procentige = 1,01, ferner für 3,5 procentige Glaubersalzlösung = 1,15, für 11,7 procentige Lösung desselben Salzes = 0,86.

Die Untersuchungen von Ludwig und Cloëtta haben ferner ergeben: Bei der Imbibition einer Salzlösung geht immer verhältnissmässig mehr Wasser als Salz in den festen Körper hinein. Presst man indessen von der imbibirten Lösung wieder etwas heraus, so bekommt man eine Lösung von der Dichtheit der ursprünglich angewandten. Dieser Um-

Tab. I.

Versuche mit Kochsalz:

Procentgehalt der umspülenden Lösung	Procentgehalt der im gequollenen Körper enthaltenen Lösung	Versuchsdauer in Stunden	Temperatur nach Réaumur	Verhältniss der Dichtheiten der äusseren und inneren Flüssigkeit
24,002	20,022	76	10 bis 14°	0,83
24,288	20,427	78	12 „ 15	0,84
6,005	4,679	48	9 „ 14	0,77
5,540	4,545	76	9 „ 15	0,82
5,493	4,512	76	10 „ 15	0,82

Versuche mit Glaubersalz:

Procentgehalt der umspülenden Lösung	Procentgehalt der im gequollenen Körper enthaltenen Lösung	Versuchsdauer in Stunden	Temperatur nach Réaumur	Verhältniss der Dichtheiten der äusseren und inneren Flüssigkeit
11,692	4,623	70	8 bis 13°	0,39
6,500	3,578	70	10 „ 16	0,55
4,831	2,744	48	10 „ 13	0,56
4,803	2,755	48	8 „ 12	0,57

Tab. II.

Procentgehalt der äusseren Flüssigkeit	Procentgehalt der inneren Flüssigkeit	Versuchsdauer	Temperatur nach Réaumur	Dichtheit der inneren Flüssigkeit, die der äusseren = 1 gesetzt.	Verhältniss des imbibirten Ṅa S̈ zum Na Chl Na Chl = 100
10,810 { 7,838 Na Chl 2,972 Ṅa S̈	7,708 { 6,629 Na Chl 1,079 Ṅa S̈	72	10 bis 13°	0,71	38
10,817 { 7,832 Na Chl 2,985 Ṅa S̈	7,856 { 6,776 Na Chl 1,079 Ṅa S̈	72	10 „ 15	0,72	38
15,636 { 10,514 Na Chl 5,122 Ṅa S̈	10,904 { 9,073 Na Bhl 1,841 Ṅa S̈	48	11 „ 14	0,69	48
10,799 { 5,813 Na Chl 4,968 Ṅa S̈	7,030 { 4,646 Na Chl 2,384 Ṅa C̈hl	48	9 „ 12	0,65	85
9,930 { 5,312 Na Chl 4,618 Ṅa S̈	6,275 { 4,093 Na Chl 2,182 Ṅa S̈	46	10 „ 13	0,63	86
10,026 { 5,326 Na Chl 4,700 Ṅa S̈	6,510 { 4,295 Na Chl 2,215 Ṅa S̈	48	9 „ 13	0,64	88

stand deutet darauf, dass in den Poren[1]) des quellungsfähigen Körpers nicht überall Lösung von gleicher Dichtheit befindlich ist, und dass die Partien von grösster Dichtheit am leichtesten mechanisch auszutreiben sind. Aehnliche Verhältnisse zwischen der Concentration der imbibirten Lösung zu der der umspülenden haben sich gefunden, wenn die letztere zwei Salze enthielt. Die wichtigsten Resultate der Untersuchungen von Ludwig und von Cloëtta sind in nebenstehenden beiden Tabellen (S. 32) verzeichnet.

Drittes Capitel.

Filtration.

Wenn ein imbibitionsfähiger Körper eine Scheidewand bildet zwischen Flüssigkeitsmengen, welche unter verschiedenem Drucke stehen, so wird offenbar ein Strom entstehen müssen von dem Orte höheres zu dem Orte niederes Druckes. Diese Erscheinung nennt man Filtration. Obgleich die bewegende Kraft hier eine mechanische im engeren Sinne des Wortes ist, so gehört die Filtration dennoch in die Molekularphysik, weil die Molekularkräfte, welche zwischen den Theilchen des festen Körpers und der filtrirenden Flüssigkeit wirksam sind, entschieden in den Vorgang eingreifen, namentlich dann, wenn die Scheidewand nicht capilläre Poren besitzt, sondern bloss vermöge ihrer Quellungsfähigkeit der Flüssigkeit den Durchgang verstattet. Dass im Allgemeinen der Filtrationsstrom nicht eher stillstehen kann, als bis die hydrostatische Druckdifferenz vollständig ausgeglichen ist, ist der erste hier gültige Grundsatz, der sich leicht begreift.

Der für die Physiologie so ausserordentlich wichtige Vorgang der Filtration ist noch sehr wenig untersucht. Einige dieser Untersuchungen, namentlich die von Ludwig über Filtration des Blutserums durch Capillargefässwände angestellten, gehören schon ganz dem engeren Gebiete der Physiologie an. Ihre Resultate finden eine ganz bedeutende Stütze in einer vom rein physikalischen Gesichtspunkte aus unternommenen Untersuchung von W. Schmidt[2]) über Filtration verschiedener Lösungen durch Ochsenherzbeutel. Die angewandten Flüssigkeiten waren wässerige Lösungen von Gummi, Hühnereiweiss, Kochsalz, Salpeter und Harnstoff. Unter diesen Stoffen sind sehr charakteristische Vertreter zweier Arten des molekularen Gefüges, die wahrscheinlich sehr wesentlich verschieden

---

[1]) Seien dies nun die eigentlichen Molekularinterstitien oder capilläre Poren.
[2]) Pogg. Ann. 114, 337.

sind, obgleich vielleicht Uebergänge zwischen beiden möglich sind. Graham hat daher für diese beiden Arten des festen Aggregatzustandes die besonderen Bezeichnungen des „krystalloiden" und des „colloiden" vorgeschlagen. Sie scheinen sich gerade bezüglich der hier in Rede stehenden Molekularerscheinungen durchgreifend verschieden zu verhalten. Die colloiden Substanzen sind nicht krystallisirbar, aber quellungsfähig. Wenn sie in Wasser löslich sind, so scheint die Lösung keine ganz vollkommene zu sein. Zu dieser Gruppe gehört das Gummi und das Eiweiss. Der Ausdruck krystalloid bedarf keiner Erklärung. Zu den krystalloiden Stoffen gehören von den in Schmidt's Untersuchungen angewandten Körpern die Salze und der Harnstoff.

Wenn die von W. Schmidt für Gummi und Eiweiss gefundenen Resultate für die colloiden Substanzen überhaupt gelten, so lassen sich folgende Sätze aussprechen:

1. Wenn die Lösung einer colloiden Substanz durch thierische Membran filtrirt, so ist das Filtrat eine dünnere Lösung als die ursprüngliche.

2. Der relative Gehalt des Filtrats, d. h. die Zahl, welche man erhält, wenn man den Gehalt des Filtrates durch den Gehalt der aufgegossenen Lösung dividirt, ist um so kleiner, je kleiner der Gehalt der aufgegossenen Lösung ist.

3. Der relative Gehalt des Filtrates ist um so kleiner, unter je kleinerem Drucke die Filtration geschieht.

4. Je höher die Temperatur, desto kleiner ist der relative Gehalt des Filtrates. Dieser Satz ist vielleicht nur für besondere Stoffe gültig und hat wohl beim Gummi darin seinen Grund, dass die Zähigkeit des Wassers rascher mit wachsender Temperatur abnimmt, als die Zähigkeit der Gummilösungen.

Werden Lösungen eines krystalloiden Körpers der Filtration unterworfen, so scheint im Allgemeinen das Filtrat dieselbe Concentration zu besitzen wie die aufgegossene Flüssigkeit, öfters fand sich das Filtrat eine Spur dichter.

Enthält die aufgegossene Flüssigkeit einen krystalloiden und einen colloiden Körper, so ist an diesem letzteren das Filtrat noch ärmer, als es unter gleichen Umständen bei alleiniger Anwesenheit desselben sein würde. Am krystalloiden Körper ist dagegen das Filtrat reicher.

Viertes Capitel.

Endosmose.

Wenn eine imbibitionsfähige Scheidewand zwei mischbare Flüssigkeiten von einander trennt, so muss offenbar auch dann eine Bewegung eintreten, wenn keine Druckdifferenz hüben und drüben vorhanden ist, die einen Filtrationsstrom verursachen könnte. Es werden Diffusionsströme entstehen, indem die Moleküle der einen Flüssigkeit durch die Poren der Scheidewand hindurch in den von der anderen Flüssigkeit eingenommenen Raum eindringen. Diese Diffusionsströme werden aber einen Einfluss erleiden müssen von den Molekularkräften, welche die Theilchen der Scheidewand ausüben. Somit sind hier die Bedingungen gegeben zu einer neuen Gattung von Molekularbewegungen, welche man unter dem Namen „Endosmose“ begreift.

Insofern wir zwei Arten von Imbibition unterschieden haben, die capilläre und die moleculäre, wären wir auch berechtigt, zwei Arten der Endosmose zu unterscheiden, je nachdem die trennende Scheidewand ein capillärporöser oder ein quellungsfähiger Körper ist. Ich habe bei Gelegenheit einer eigenen Untersuchung über diesen Gegenstand vorgeschlagen, den Namen Endosmose zu beschränken auf den Fall, wo die Scheidewand quellungsfähig ist und die Flüssigkeitsmoleküle die Molekularinterstitien der Scheidewand durchwandern; dagegen den Fall, wo die Scheidewand sichtlich capilläre Poren besitzt, als Porendiffusion zu bezeichnen. Selbstverständlich lassen sich diese beiden Vorgänge nicht immer scharf trennen, da viele häufig angewandte Scheidewände, namentlich die fibrösen Membranen der Thiere, aus quellungsfähiger Substanz bestehen und gleichzeitig wahrscheinlich auch capilläre Poren besitzen.

Die auffälligste Erscheinung bei den endosmotischen Vorgängen ist die, dass regelmässig die beiden entgegengesetzten Ströme durch die Scheidewand hindurch nicht gleich stark sind, dass vielmehr von der einen Flüssigkeit mehr herüber als von der anderen hinüber geht. Ist beispielsweise Salzlösung auf der einen und Wasser auf der anderen Seite einer Membran, so geht mehr Wasser nach der Salzlösung als Salz zum Wasser geht. Es können durch diesen Umstand hydrostatische Druckdifferenzen von sehr bedeutendem Betrage entstehen, die in messenden Versuchen fortwährend wieder beseitigt werden müssen, weil sie sonst Filtrationsströme erzeugen würden, deren Wirkungen die Wirkungen der endosmotischen Ströme theilweise verdecken könnten.

Diese Erscheinung war vor allem Anderen einer Erklärung bedürftig. Den ersten annehmbaren Versuch einer mechanischen Erklärung hat Brücke gemacht. Er geht von der Vorstellung capillärer Poren aus. Wenn die Substanz der Wand zum Wasser eine stärkere Anziehung hat

als zum Salz, so wird an der Wand eines jeden Porus eine Schicht reines Wassers liegen, in der Mitte aber ein Flüssigkeitsfaden von höherer Concentration. Durch diesen kann ein gewöhnlicher Diffusionsstrom gehen, welcher gleich viel Wasser und Salz in entgegengesetzten Richtungen bewegt. Die wässerige Wandschicht kann aber, wenn hüben Wasser und drüben Salz an sie angrenzt, auch nicht in Ruhe bleiben, sie muss vielmehr beständig in die Salzlösung hineingezogen werden und aus dem Wasser sich ersetzen. Wir hätten also vom Wasser zum Salze hin zwei Ströme, einen durch die Mitte des Porus, welcher durch einen gleich starken Salzstrom compensirt ist, und einen nicht compensirten der Porenwand entlang. Im Ganzen muss also mehr Wasser zur Lösung als Salz zum Wasser wandern und das Niveau muss auf der Seite der Lösung steigen, wie dies in der That der Fall ist. Ich selbst habe bei Gelegenheit eigener Untersuchungen[1]) über Endosmose Brücke's Theorie noch weiter zu entwickeln versucht, indessen hat die Erfahrung keineswegs die aus der Theorie entwickelten Folgerungen überall bestätigt.

Die seither namentlich von Clausius entwickelte Theorie des flüssigen Aggregatzustandes[2]) hat mich auf ganz andere Vorstellungen über das eigentliche Wesen der Endosmose gebracht, die, so hypothetisch sie auch vor der Hand noch sind, hier in Kürze entwickelt werden mögen. Man nimmt bekanntlich an, dass in einer Flüssigkeitsmasse die Moleküle weder in Ruhe sind, noch um feste Gleichgewichtslagen schwingen, dass sie sich vielmehr in unregelmässigem Gewühl in dem ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raume umhertreiben. Denken wir uns jetzt zunächst zwei reine Wassermassen durch eine poröse Scheidewand getrennt, so erfolgt zwar kein sichtlicher Austausch, aber es ist doch anzunehmen, dass nicht fortwährend gerade dieselben Wassermoleküle sich diesseits und jenseits der Scheidewand befinden, sondern es wird unzählige Male begegnen, dass vermöge der inneren Bewegung ein Wassermolekül von diesseits nach jenseits geht; aber nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird es genau ebenso oft begegnen, dass ein Wassermolekül von jenseits nach diesseits geht, weil ja die Wassermoleküle drüben und hüben genau dieselben Bewegungszustände haben.

Stellen wir uns zweitens vor, diesseits der Scheidewand wäre noch immer reines Wasser, jenseits aber wäre ein flüssiges Molekularaggregat, welches nur zur Hälfte aus Wasser, zur anderen Hälfte aus Salzmolekülen bestände. Jetzt kann nicht mehr allgemein erwartet werden, dass in der Zeiteinheit noch immer im Ganzen ebenso viele Moleküle von jenseits nach diesseits gehen als umgekehrt. Es ist nämlich doch offenbar wie bei den Gasen wahrscheinlich, dass bei gleicher Temperatur verschiedenartigen Molekülen verschiedene Geschwindigkeiten zukommen.

---

[1]) Fick über Diffusion, Pogg. Ann. 94, 59.
[2]) Siehe oben S. 17.

Insbesondere ist es wohl nicht allzu kühn anzunehmen, dass die Wassermoleküle, weil sie weniger Masse haben, eine grössere Geschwindigkeit besitzen, als die Salzmoleküle bei gleicher Temperatur. Es werden also die Fälle, dass ein Salzmolekül durch einen Porus wandert, sich verhältnissmässig seltener ereignen, als dass es ein Wassermolekül thut. Um ganz bestimmte Vorstellungen zu haben, wollen wir annehmen, bei der Temperatur des Versuches könnten durchschnittlich 1 000 000 Wassermoleküle in der Zeiteinheit die Poren unserer Scheidewand treffen und durchsetzen; dann werden in dem gedachten Falle von diesseits nach jenseits in der That 1 000 000 Wassermoleküle in jeder Zeiteinheit übergehen. Von jenseits nach diesseits werden aber, da jenseits die Wassermoleküle nur halb so dicht gedrängt liegen, auch nur 500 000 Wassermoleküle in jeder Zeiteinheit wandern, was einen Ueberschuss von 500 000 Molekülen Wasser nach jenseits giebt. Da die den Raum jenseits zur Hälfte einnehmenden Salzmoleküle eben langsamer umherlaufen als die Wassermoleküle, so werden von ihnen nicht 500 000, sondern beispielsweise nur 100 000 in der Zeiteinheit die Scheidewand passiren, wir hätten unter solchen Voraussetzungen im Ganzen einen Austausch, der in der Zeiteinheit 500 000 Wassermoleküle von diesseits nach jenseits und 100 000 Salzmoleküle von jenseits nach diesseits schaffte. Man wird leicht dies Beispiel für einen beliebigen Werth der Concentration verallgemeinern.

Bis hierher wäre die Betrachtung des Vorganges der des Gasaustausches ganz analog. Ganz so einfach ist er aber sicher nicht, da die Flüssigkeitsmoleküle nicht wie die Gasmoleküle ganz frei im Raume umherfliegen und nur beim Anstossen an andere oder an die Wände Wirkungen der Molekularkräfte erfahren. Es müssen vielmehr die Molekularkräfte der Scheidewand in den Vorgang mächtig eingreifen, diese können namentlich offenbar dem Durchgange gewisser Stoffe besondere Widerstände entgegenstellen, so dass die durchgehenden Mengen nicht den Geschwindigkeiten der Molekularbewegung für verschiedene Stoffe genau proportional zu sein brauchen, wie dies bei den Gasen der Fall ist. Was mir besonders für die soeben entwickelte Anschauungsweise zu sprechen scheint, ist der ausserordentliche Einfluss der Temperatur auf alle endosmotischen Ströme, der von allen Forschern beobachtet ist. Mehr ins Einzelne gehende Folgerungen lassen sich fürs erste aus dieser Theorie noch nicht ziehen, wir haben daher jetzt die experimentell ermittelten Erscheinungen einfach als solche aufzuzählen.

Versuche über die reine Porendiffusion sind von verschiedenen Forschern angestellt mit Thonscheidewänden, einem Material, das ganz offenbar nicht quellungsfähig ist, sondern nur vermöge capillärer Poren wässerigen Flüssigkeiten Durchgang verstattet. Diese Versuche haben aber nicht sehr constante Resultate ergeben. Ich[1])

---

[1]) A. Fick über Endosmose, Moleschott's Untersuchungen 3, 294.

habe selbst einige hierher gehörige Versuchsreihen gemacht über den Austausch zwischen Kochsalzlösungen und reinem Wasser durch Thonscheidewände. Es war dabei hauptsächlich darauf abgesehen, den Einfluss der Concentration[1]) kennen zu lernen. Es fand sich die Stärke des Salzstromes der Concentration sehr genau proportional, so dass ganz allgemein unter sonst gleichen Bedingungen von einer doppelt so concentrirten Lösung doppelt, von einer dreimal so concentrirten Lösung dreimal soviel etc. Salz zu reinem Wasser übergeht. Der gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne durch die Scheidewand gehende Wasserstrom war aber in diesen Versuchen keineswegs der Concentration proportional. Er war nämlich bei äusserst geringen Werthen der Concentration stärker als bei etwas höheren und erreichte beim Werthe 0,03 (3 Proc.) der Concentration ein Minimum. Für höhere Concentrationen wurde der Wasserstrom wieder stärker und das Verhältniss seiner Stärke zur Concentration näherte sich für die höchsten Werthe der letzteren gleichfalls der Proportionalität. Spuren dieser sonderbaren Abhängigkeit des Wasserstromes von den Concentrationen scheinen auch von anderen Forschern, namentlich von Graham, gesehen zu sein.

Ueber die reine Endosmose im Sinne der obigen Definition, d. h. über die wahre Molekularendosmose, sollte man eigentlich nur mit absolut structurlosen Scheidewänden Versuche anstellen. Ein sehr geeignetes Material dafür bildet das Collodium. Es sind jedoch mit diesem Stoffe erst wenige Untersuchungen angestellt. Nach meinen eigenen Versuchen[2]) kann ich folgende Sätze aufstellen: Wenn eine Salzlösung mit reinem Wasser durch eine sehr dünne Collodiumhaut in endosmotischen Verkehr tritt, so ist die Stärke des zur Lösung gehenden Wasserstromes der Concentration dieser Lösung nahezu proportional, für sehr hohe Werthe der Concentration ist jedoch der Wasserstrom meist schwächer als die Proportionalität verlangen würde.

Die Stärke des zum Wasser gehenden Salzstromes scheint im Allgemeinen langsamer zu wachsen als die Concentration, so dass z. B. bei doppelter Concentration der Salzstrom nicht ganz doppelt so stark ausfällt, bei dreifacher Concentration nicht ganz dreimal so stark etc. Sehr genau konnte das Verhalten des Salzstromes in meinen Versuchen nicht bestimmt werden wegen folgendes theoretisch vielleicht sehr bedeutsamen Umstandes. Die Membranen werden nämlich im Laufe der Versuchsreihen für Salz allmälig immer mehr durchgängig, während merkwürdigerweise ihre Durchgängigkeit für Wasser völlig constant blieb. Wurde also z. B. mit derselben Concentration wie zu Anfang 14 Tage später (während welcher Zeit die Membran dauernd mit Salzlösung in Berührung

---

[1]) Unter Concentration einer Lösung soll hier stets derjenige echte Bruch verstanden sein, dessen Zähler die Salzmenge, dessen Nenner die Gesammtmenge der Lösung ist.

[2]) A. a. O.

war) ein Versuch angestellt, so erhielt man zwar einen ebenso starken Wasserstrom wie im ersten Versuche, aber einen viel stärkeren Salzstrom. Um also die Abhängigkeit der Salzstromstärke von der Concentration allein zu untersuchen, muss man zu verschiedenen Zeiten angestellte Versuche auf denselben Zustand der Membran reduciren, was nur durch ziemlich ungenaue Interpolationsrechnungen möglich ist, da bei der Gebrechlichkeit des Materials immer nur eine sehr beschränkte Anzahl von Versuchen mit derselben Membran angestellt werden kann. Wenn die vorstehenden Sätze richtig sind, so kann das Verhältniss der übergehenden Wassermenge zu der gleichzeitig übergehenden Salzmenge kein für jedes Salz constantes sein. Man bezeichnet dies Verhältniss als das endosmotische Aequivalent. Es wird für Kochsalz nach den vorstehenden Sätzen um so grösser, je höher die Concentration. Dieser Satz kann aber nicht ohne Weiteres auf andere Salze ausgedehnt werden. In der That hat Schumacher[1]), der gleichfalls mit Collodiumhäuten experimentirte, gefunden, dass bei einigen Säuren: Oxalsäure, Schwefelsäure, das endosmotische Aequivalent $\left(\frac{\text{Wasser}}{\text{Salz}}\right)$ mit wachsender Concentration abnimmt.

Die meisten Untersuchungen[2]) über Endosmose sind angestellt mit fibrösen Membranen von Thieren. Wie schon weiter oben bemerkt wurde, tritt dabei höchst wahrscheinlich Porendiffusion und eigentliche molekuläre Endosmose zusammen auf. Es ist vielleicht diesem Umstande hauptsächlich zuzuschreiben, dass bis jetzt noch nicht sehr viel übereinstimmende Resultate gewonnen sind. Die Geschwindigkeit der Ströme ist auch hier nahezu proportional den Differenzen der Concentrationen zu beiden Seiten der Scheidewand. Jedoch sind die Abweichungen von der Proportionalität immerhin so bedeutend, dass das endosmotische Aequivalent nicht merklich unabhängig von der Concentration erscheint, was doch nur dann der Fall sein könnte, wenn sowohl der Salzstrom als der Wasserstrom der Concentrationsdifferenz proportional wäre, oder wenigstens müssten die beiden Ströme einander proportional sein. Für die meisten Salze scheint das Aequivalent (Wasser dividirt durch Salz) mit wachsender Concentrationsdifferenz zuzunehmen, wie dies auch bei Collodiummembranen der Fall ist.

Die Stärke der endosmotischen Ströme scheint nicht ganz unabhängig zu sein vom absoluten Werthe der Concentrationen zu beiden Seiten der Membran. Wenigstens zeigte sich in einer Versuchsreihe von Eckhard bei einer gewissen Differenz zwischen zwei höheren Concentrationswerthen ein stärkerer Wasser- und ein stärkerer Salzstrom, als wenn dieselbe Differenz zwischen niederen Werthen der Concentration

---

[1]) Pogg. Ann. 110, S. 337.

[2]) von Jolly, Ludwig, Eckhard, Adrian, Hoffmann, Heynsius, W. Schmidt und Andere.

statthatte. Auch war im ersteren Falle das Aequivalent höher als im letzteren.

In einigen Versuchen von W. Schmidt zeigten sich Spuren von jener auffallenden Stärke des Wasserstromes, die ich, wie weiter oben angeführt wurde, an Thonscheidewänden beobachtet habe.

Das Aequivalent ist unter sonst gleichen Umständen im allerhöchsten Maasse von der Beschaffenheit der Scheidewand abhängig und zwar scheint es um so höher zu sein, je enger die Poren der Scheidewand sind. Insbesondere zeigen Collodiumhäute, die doch höchst wahrscheinlich überaus kleine Poren haben, ausserordentlich hohe Werthe des Aequivalentes. Es geht durch solche Membranen oft über hundertmal so viel Wasser als Salz.

Alle bisher angeführten Sätze beziehen sich auf die Endosmose der krystalloiden Stoffe, von dem endosmotischen Verhalten der colloiden ist noch viel weniger bekannt. Sie scheinen im Allgemeinen sehr hohe endosmotische Aequivalente zu besitzen, d. h. sie durchdringen die Scheidewände nur in äusserst geringen Mengen, während sie einen verhältnissmässig starken Wasserstrom nach sich hinziehen. Nach Graham geht sogar von Gummi keine Spur durch die Scheidewand. Der endosmotische Uebergang des Eiweisses soll durch alkalische Reaction der Flüssigkeit befördert, durch saure Reaction gehemmt werden.

Numerische Angaben über die Stromstärke in einzelnen Fällen und über die endosmotischen Aequivalente führe ich hier gar nicht an, weil diese Grössen von so vielen Bedingungen abhängig sind, über die man noch gar nicht Herr ist, dass man doch keine allgemein gültigen Angaben machen kann.

Man hat in früherer Zeit geglaubt, eine eingehende Untersuchung der endosmotischen Erscheinungen werde die wichtigsten Aufschlüsse über das Wesen vieler physiologischen Vorgänge insbesondere der Secretionen geben. Diese Erwartungen haben sich jedoch als trügerische herausgestellt durch die neueren physiologischen Untersuchungen über die Secretionen, welche lehren, dass dabei die endosmotischen Kräfte höchstens eine sehr untergeordnete Rolle spielen. Theoretische Untersuchungen über Endosmose sind daher in neuerer Zeit nicht mehr viele angestellt, dagegen haben die früher gemachten Erfahrungen Veranlassung gegeben, die Endosmose oder Dialyse, wie man gegenwärtig meist sagt, als Methode zu chemischen und insbesondere physiologisch-chemischen Zwecken zu verwenden. Wir haben nämlich oben gesehen, dass colloide Stoffe sehr viel langsamer durch Scheidewände gehen als krystalloide. Wenn man also in einer Lösung krystalloide und colloide Stoffe neben einander hat und setzt dieselbe durch eine permeabele Scheidewand mit reinem Wasser in endosmotischen Verkehr, so werden die krystalloiden Stoffe verhältnissmässig rasch zum reinen Wasser übergehen, während die colloiden Stoffe zum grössten Theile und, wenn die

Scheidewand sehr feinporig ist, so gut wie vollständig auf der anderen Seite zurückbleiben. Die Dialyse bietet also ein sehr einfaches Mittel, colloide Stoffe, wie Eiweiss, Peptone und dergleichen, von den damit gemengten Salzen zu trennen, was auf andere Weise gar nicht möglich ist. Auch gelingt es, aus einem Gemenge mehrerer colloiden Stoffe die leichter diffundirenden durch Dialyse herauszuschaffen. Dieses Mittel wird daher heutzutage sehr häufig angewandt, um gewisse colloide Stoffe rein und insbesondere aschenfrei zum Zwecke der Analyse darzustellen.

Als geeignete Scheidewand wendet man jetzt allgemein das sogenannte vegetabilische Pergament an, das von vielen colloiden Stoffen so gut wie gar nichts durchlässt. Dies Material ist in sehr geeigneter Form als sogenannter künstlicher Wurstdarm käuflich zu haben, d. h. in Form beliebig langer Schläuche ohne Naht. Man nimmt von einem solchen Schlauche ein Stück von geeigneter Länge, biegt es schlingenförmig um, so dass die beiden offenen Enden nach oben schauen. In sein Inneres wird die Lösung der colloiden und krystalloiden Stoffe eingefüllt und die Schlinge eingehängt in einen hohen Cylinder voll reinen Wassers, über dessen Oberfläche die beiden offenen Enden hervorragen. Indem man das äussere Wasser öfters wechselt, wird dafür gesorgt, dass die in der Schlinge enthaltene Lösung stets mit fast vollständig reinem Wasser in endosmotischem Verkehr steht. Hat dieser einige Tage gedauert, so ist meist die innere Lösung von Salzen vollständig befreit.

ZWEITER ABSCHNITT.

MECHANIK FESTER KÖRPER.

Erstes Capitel.

Arbeit elastischer Kräfte.

Für die Physiologie der Muskelsubstanz ist es von grosser Wichtigkeit, sich eine klare Vorstellung zu machen von der Art, wie die Arbeit der elastischen Kräfte eines dehnbaren Stranges äussere Wirkungen hervorbringen kann. Es soll daher dieser Gegenstand hier eingehend entwickelt werden.

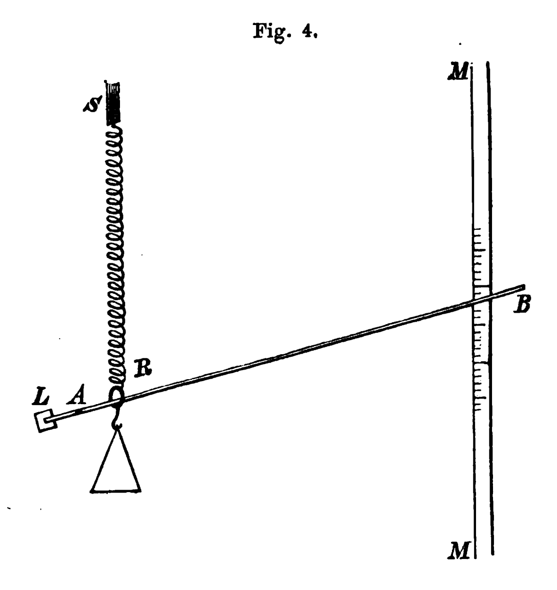
Stellen wir uns einen dehnbaren elastischen Strang, z. B. einen Kautschukstrang, ein Muskelbündel, einen schraubenförmig gewickelten Stahldraht oder dergleichen vor, der über seine natürliche Länge hinaus gedehnt ist, so übt er auf die beiden Körper, mit welchen seine Enden verknüpft sind, eine Kraft aus, welche dieselben einander zu nähern strebt. Denken wir uns das eine Ende mit dem unbeweglichen Erdkörper fest verbunden, so können wir von einer Wirkung auf dieses Ende ganz absehen und können sagen, dass der gedehnte elastische Strang mit einer Zugkraft auf den mit seinem freien Ende verknüpften Körper wirkt. Diese Kraft ist bekanntlich um so grösser, je mehr der Strang über seine natürliche Länge hinaus gedehnt ist.

Man sieht nun sofort, dass diese elastischen Kräfte im Sinne der in der Einleitung gegebenen Definition Arbeit leisten, wenn man dem gedehnten elastischen Strange gestattet, sich wieder zu verkürzen. Um das Maass dieser Arbeit und ihre Wirkungen auf andere Körper bestimmen zu können, muss man vor Allem das Gesetz kennen, nach welchem die Grösse der elastischen Zugkraft von der Grösse der Längenausdehnung abhängig ist. Dies Gesetz drückt sich am anschaulichsten graphisch aus in der Form der sogenannten Dehnungscurve, indem man auf einer wagerechten Abscissenaxe den Kräften proportionale Stücke aufträgt und am Ende der Abscisse allemal die Länge als Ordinate senkrecht aufträgt, welche der Strang haben muss, um die der Abscisse proportionale

Kraft auszuüben. Trägt man diese Längen senkrecht nach unten ab (was natürlich rein willkürlich ebenso gut geschehen kann wie nach oben), so hat man geradezu vor Augen, wie der elastische Strang, dessen oberes Ende in der Höhe der Abscissenaxe angeknüpft zu denken wäre, durch Belastungen gedehnt wird, welche den vom Anfange der Abscissen gemessenen Entfernungen proportional sind, denn wenn man an einen frei herabhängenden elastischen Strang ein Gewicht anknüpft, dehnt er sich so lange, bis seine elastische Kraft dem angeknüpften Gewichte Gleichgewicht hält.

Die Sache wird am deutlichsten werden, wenn wir uns vorstellen, wie in einem wirklichen Falle die Dehnungscurve an einem bestimmten elastischen Strange, z. B. an einer Stahldrahtschraube, bestimmt wird.

Fig. 4.

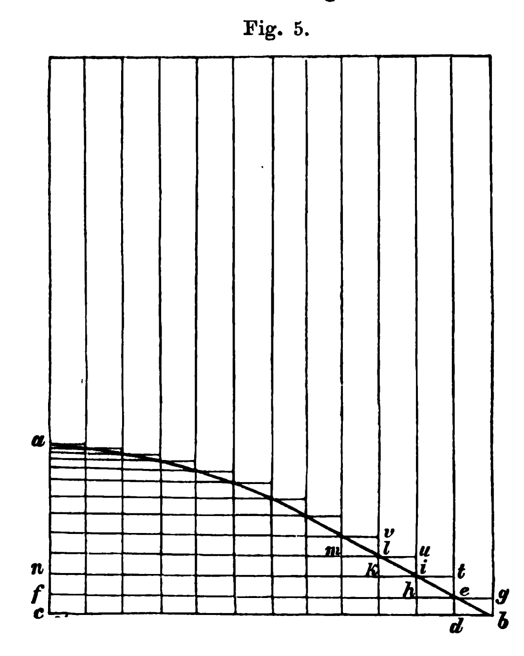


An dem unteren freien Ende hängt ein Ring R und ein Häkchen (Fig. 4). Durch den Ring ist ein etwa 1 m langer Zeiger LB aus Schilf gesteckt, der bei A um eine am Stativ befestigte Axe leicht drehbar ist, jenseit der Axe bei L ist der Zeiger durch ein Gegengewicht fast ganz äquilibrirt. Parallel der herabhängenden Feder und zehnmal so weit von ihr als der Punkt A ist ein in Centimeter getheilter Maassstab aufgestellt, vor welchem der Zeiger spielt und an welchem die Dehnungen der Feder in zehnfacher Vergrösserung abgelesen werden können, welche erfolgen, wenn man an den Haken unter R eine Wagschale anhängt und Gewichte auflegt. Diese in grossen Dimensionen ausgeführte Vorrichtung eignet sich sehr gut zu Demonstrationen vor einem grossen Zuhörerkreise. Eine damit angestellte Versuchsreihe ergab folgende Zahlen:

Länge der Feder	bei der Belastung
264 mm	0 g[1])
266,5 „	100 „
268,5 „	200 „
273 „	300 „
280 „	400 „
288 „	500 „
299 „	600 „
312 „	700 „
325 „	800 „
338 „	900 „
359 „	1000 „
365 „	1100 „
379 „	1200 „

Das Ergebniss ist in Fig. 5 graphisch dargestellt. Auf der Abscissenaxe sind die Belastungen oder die ihnen gleichen Spannungen der Feder aufgetragen, so dass 5 mm Abscissenlänge 100 g bedeuten. Die der Wirklichkeit entsprechend nach unten aufgetragenen Ordinaten messen die zu den Spannungen gehörigen Längen in fünffacher Verkleinerung. Die Curve *ab* ist also die sogenannte Dehnungscurve unserer Feder. Sowie man dieselbe vor Augen hat, kann man sich sofort eine Vorstellung machen von der Arbeit, welche die elastischen Zugkräfte der Feder leisten, wenn man ihr gestattet, sich von 379 mm Länge auf die Länge von 264 mm zusammenzuziehen.

Fig. 5.



Das untere Ende der Feder oder irgend eine damit verbundene Masse bildet den Angriffspunkt einer nach oben gerichteten Kraft von

---

[1]) Eigentlich betrug zu Anfang die Belastung 37 g, das Gewicht von Ring, Haken und Uebergewicht des Zeigers. Von dieser kleinen Anfangsbelastung, die noch kaum 1 mm Dehnung hervorbringt, können wir indessen füglich ganz absehen.

1200 g, wenn die Feder auf 379 mm Länge gedehnt ist, und den Angriffspunkt einer ebenso gerichteten Kraft von 1100 g, wenn die Länge nur noch 365 mm beträgt. Zieht sich also zunächst die Feder von 379 auf 365 mm zusammen, so hat der Angriffspunkt einer in ihrer Intensität unterdess von 1200 auf 1100 g abnehmenden Kraft 14 mm im Sinne dieser Kraft zurückgelegt, die Kraft hat also eine Arbeit geleistet, welche jedesfalls grösser ist als 14 × 1100 und kleiner als 14 × 1200 Grammmillimeter ist. Diese beiden Grössen hat man in der Figur in Form zweier rechteckigen Flächenräume vor Augen: *cdef* = 14 × 1100 und *cbgf* = 14 × 1200. Bei der weiteren Zusammenziehung von 365 auf 352 mm leistet die Spannkraft der Feder nach derselben Betrachtung eine Arbeit grösser als 13 × 1000 und kleiner als 13 × 1100, welche Grössen ihre graphische Darstellung in den Rechtecken *fhin* = 13 × 1000 und *fetn* = 13 × 1100 finden. Schreitet man so durch die Zahlen der Tabelle weiter fort, so ergiebt sich, dass die Summe der Arbeit, welche die Spannung der Feder bei der Zusammenziehung von 379 bis 264 mm leistet, grösser ist als die Summe der kleineren und kleiner als die Summe der grösseren rechteckigen Streifchen ist. Jene Summe ist aber dargestellt in dem treppenförmig begrenzten Flächenraume *acdehiklm* . . . *a* und diese in dem Flächenraume *acbgtiulv* . . . *a*.

Noch genauer hätte man den Werth der ganzen Arbeit erhalten, wenn man die Längen der Feder für alle Belastungswerthe von 50 zu 50 g beobachtet hätte. Man hätte dann offenbar zwei treppenförmige Flächenräume erhalten, die aus noch schmäleren rechteckigen Streifchen zusammengesetzt gewesen wären, deren Unterschiede also noch kleiner wären, und wieder wäre der wahre Werth der Arbeit kleiner als der eine und grösser als der andere dieser Flächenräume. Man sieht leicht, wenn man sich die Zerlegung in infinitum fortgesetzt denkt, dass der wirklich genaue Werth der Arbeit der Federkräfte bei der vollständigen Zusammenziehung sich darstellt in dem dreieckigen Flächenraume, dessen eine Seite die Dehnung (*ac*), dessen andere Seite die Anfangsspannung (*cb*) und dessen dritte, im Allgemeinen krumme, Seite die Dehnungscurve (*a* . . . *lieb*) ist.

Die so berechnete Arbeit kann nun je nachdem das freie Ende der Feder mit anderen Körpern verknüpft wird, verschiedene Wirkungen hervorbringen. Als erstes Beispiel wollen wir einen Fall betrachten, wo die Wirkung der Arbeit der Federkräfte besteht in Ueberwindung der Schwere, wo also ebenso viel p o t e n t i e l l e Energie in Hebung von Last entsteht, als durch die Entspannung der Feder vergeht. Wir denken uns zu dem Ende unsere Feder wieder mit angehängter Schale, die mit Gewichten 1200 g wiegt. Die Länge wird also wieder 379 mm betragen. Wir nehmen jetzt ein Hundertgrammstück ab, dann wird sich offenbar die Feder auf 365 mm zusammenziehen, da sie bei dieser Länge die Spannung von 1100 g ausübt. Es sind demnach die noch anhängenden 1100 g um 14 mm gehoben oder es hat die Schwere eine negative Arbeit

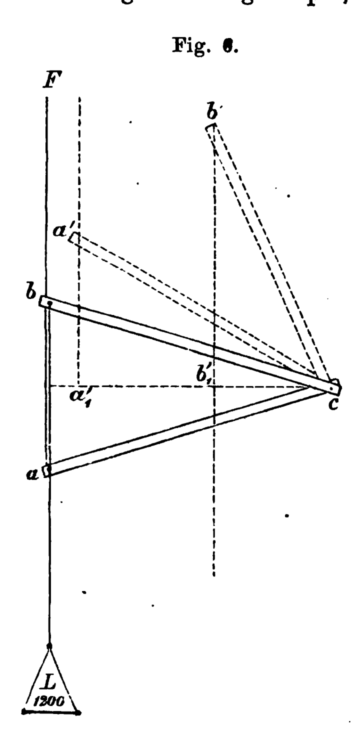
von 14 × 1100 Grammmillimeter geleistet, während die Spannkräfte der Feder eine nur um den dem kleinen Dreieckchen *dab* entsprechenden Betrag grössere positive Arbeit geleistet haben. Nehmen wir dann ein weiteres Hundertgrammstück weg, so zieht sich die Feder von 365 auf 352 mm zusammen und es werden mithin die zurückbleibenden 1000 g um 13 mm gehoben, also leistet die Schwere in diesem Stadium 13×1000 oder 13 000 Grammmillimeter negative Arbeit. Fährt man so fort, die Feder zu entlasten, wobei immer die zurückbleibende Last um das Stück gehoben wird, um welches sich die Feder zusammenzieht, so ist im Ganzen durch die positive Arbeit ihrer elastischen Kräfte eine negative Arbeit der Schwere bewirkt worden, welche sich in dem treppenförmig begrenzten Flächenstück *acdehik . . . a* darstellt, in welchem wir weiter oben schon nahezu das Maass der gesammten möglichen positiven Arbeit der elastischen Federkräfte bei vollständiger Entspannung erkannt haben. Der ganz kleine Ueberschuss der letzteren kann natürlich nicht ohne Wirkung geblieben sein, denn jede positive Arbeit wirkt. Ihre Wirkung besteht offenbar in einem unmessbar kleinen Wärmequantum, das durch die bei diesem Vorgange nicht ganz ausgeschlossenen kleinen Schwingungen in den Theilen des Apparates frei wird. Eine eigentlich in Betracht kommende Menge von kinetischer Energie hat die Feder nicht erzeugt.

Man kann nun versuchen, die elastischen Kräfte des sich zusammenziehenden Stranges der Schwere in der Art entgegenwirken zu lassen, dass in jedem Augenblicke eines stetig ablaufenden Vorganges die Spannung der Schwere genau Gleichgewicht hält und dass mithin der Vorgang ein umkehrbarer wird, d. h. dass, wenn man der Federspannung ein ganz kleines (eigentlich unendlich kleines) Uebergewicht lässt, sie sich ganz zusammenziehend ein Gewicht hebt und dass, wenn man der Schwere ein kleines Uebergewicht giebt, das herabsinkende Gewicht die Feder von der ursprünglichen bis zur gewählten Länge ganz ausspannt, ohne dass es bei der einen oder der anderen Art des Herganges zu einer beachtenswerthen Beschleunigung der Masse käme.

Man kann sich leicht verschiedene Maschinerien ausdenken, mittelst deren die Schwere eines bestimmten Gewichtes in jeder Höhe, die es durchläuft, ziemlich genau der Spanung der an derselben Maschinerie angeknüpften Feder Gleichgewicht hält. Die einfachste derartige Maschinerie bildet ein Winkelhebel. Natürlich müssen seine Abmessungen und seine Anfangs- und Endlage für jeden individuellen Fall nach der Dehnungscurve des elastischen Stranges berechnet werden. Für die bestimmte Spiralfeder, die uns bisher als Beispiel diente, müssen die beiden Arme des Winkelhebels einen Winkel von 35° mit einander machen. Jeder Arm muss 102 mm lang sein. Man denke sich den Winkelhebel in der in Fig. 6 gezeichneten Stellung, wo die Halbirungslinie des Winkels wagerecht steht, und denke sich die auf 379 mm gedehnte, also 1200 g Spannung ausübende Feder an *a* angeknüpft mittelst eines sehr langen, dünnen, verticalen Drahtes (die Feder selbst ist in der Figur

nicht dargestellt, sie ist in der Verlängerung von aF hoch über F zu denken). Am Hebelarm b sei ebenfalls mittelst eines dünnen Drahtes eine Wagschale angeknüpft, die mit den darauf gesetzten Gewichten 1200 g wiegt. Der Draht bL gehe vor, der Draht aF hinter den Hebelarmen vorüber, so dass sie nicht in Verwirrung kommen können. Man hat jetzt offenbar Gleichgewicht, da ja die Feder bei 379 mm Länge gerade 1200 g Spannung ausübt und beide gleiche Kräfte am selben virtuellen Hebelarm dem Perpendikel aus c auf die Richtung der beiden Drähte wirken. Denkt man sich jetzt den Winkelhebel in der durch punktirte Linien gezeichneten Lage $a'cb'$, so ist der mit der Feder verknüpfte Punkt gestiegen, also die Feder hat sich um eine gewisse Grösse verkürzen können und ihre Spannung hat also abgenommen. Gleichwohl kann noch immer Gleichgewicht zwischen ihr und der Schwere der 1200 g stattfinden, denn diese letztere wirkt jetzt an dem viel kleineren virtuellen Hebelarm cb'_1, während die Federspannung am grösseren Hebelarm ca'_1 angreift. Ist endlich der Hebelarm bc bis zur verticalen Lage gekommen, so ist der Hebelarm der Schwere gleich Null geworden und es bedarf gar keiner Spannung mehr, um am anderen Hebelarm der Schwere Gleichgewicht zu halten. Bei den gewählten Abmessungen entspricht nun in der That die Veränderung der Hebelarme ziemlich genau der Spannungsänderung der Feder, so dass auf jedem Punkte des Weges Gleichgewicht besteht, und dass die Verkürzung der Feder um 115 mm und damit die volle Entspannung gerade eingetreten ist in dem Augenblicke, wo der Hebelarm cb die lothrechte Stellung erreicht hat. Der Hub des Gewichts beträgt bei dieser Drehung der Maschine 71 mm und die negative Arbeit der Schwere würde demnach $= 71 \times 1200 = 85\,200$ Grammmillimeter sein. Dieser Werth liegt, wie es sein muss, zwischen dem Werthe des kleineren und des grösseren treppenförmig begrenzten Flächenraumes, denn der erstere stellt 80 200, der letztere 91 700 Grammmillimeter vor.

Fig. 6.



Es gelingt nun in der That mit Hülfe dieser Maschine durch Entspannung der Feder eine Last in stetigem Zuge zu heben, so dass die negative Arbeit der Schwere fast genau gleich der positiven Arbeit der elastischen Kräfte ist. Giebt man dem Hebel nämlich die Stellung

acb (Fig. 6) und nimmt von den 1200 g nur 50 g weg, so steigt der Hebel bis zur lothrechten Lage von *bc* auf und die Feder ist vollständig entspannt. Legt man dann die 50 g wieder auf und legt noch fernere 50 g zu, so sinkt er wieder bis zur Lage *acb* herab, wo er dann allerdings angehalten werden muss, denn über dieselbe hinaus entsprechen die Aenderungen der Hebelarme nicht mehr der Dehnungscurve.

Andererseits kann die Arbeit der elastischen Kräfte eines sich zusammenziehenden Stranges so wirken, dass lediglich kinetische Energie entsteht, ohne dass irgend eine Gegenkraft negative Arbeit leistet. Man muss, um dies zu erreichen, mit dem freien Federende eine Masse verbinden, auf welche sonst keine Kraft, also insbesondere auch nicht die Schwere einwirkt. Dies kann z. B. so ausgeführt werden, dass man die Feder wagerecht legt, anspannt und an ein mit dem freien Ende verbundenes Stück einen Stab wie einen Pfeil an die Bogensehne anstemmt und dann loslässt. Die Spannung der Feder drückt nun gegen den Pfeil, und da keine Kraft entgegenwirkt, so wird er mehr und mehr beschleunigt und er hat, wenn die Feder vollständig entspannt ist, eine Geschwindigkeit erreicht, mit der er wagerecht fortfliegt und deren Quadrat, mit der halben Masse des Pfeiles multiplicirt, seine kinetische Energie darstellt. Diese müsste der aus der Dehnungscurve des Stranges berechneten positiven Arbeit gleich sein, wofern dieselbe gar keine andere Wirkung ausgeübt hätte. Diese Voraussetzung ist aber nie zu erfüllen, da es nämlich bei dieser Art der Wirkung immer zu mehr oder weniger grossen Beschleunigungen nicht bloss des Pfeiles, sondern auch der Theile des Stranges oder der Feder selbst kommt, so geht immer ein Theil der Arbeit darauf, die inneren molekularen Widerstände gegen solche Bewegungen zu überwinden, und die schliessliche Wirkung dieses Theiles der Arbeit wird in einer Erwärmung des Stranges bestehen.

Nach der obigen Berechnung der Arbeit unserer Feder müsste sie, wenn sie sich von 379 auf 264 mm zusammenzieht, einen Pfeil von 100 g Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 4,08 m schleudern, da aber eben einer so schnellen Bewegung sich sehr bedeutende innere Widerstände entgegenstellen, wird diese Geschwindigkeit in Wirklichkeit bei Weitem nicht erreicht werden. Es wäre nicht der Mühe werth, dies durch besondere Versuche festzustellen, da wir viel bessere Mittel haben, die von einem elastischen Strange hervorgebrachte kinetische Energie mit der berechneten Arbeit der elastischen Kräfte zu vergleichen. Man kann nämlich weit zweckmässiger den elastischen Strang an einem Hebel angreifen lassen, an dem man genau äquilibrirte Massen anbringt, so dass bloss ihre Trägheit, nicht aber ihr Gewicht der Spannung zur Last fällt. Dieser Hebel wird dann durch die elastischen Kräfte in drehende Bewegung versetzt und so lange darin beschleunigt, bis die Entspannung vollständig erfolgt ist. Aus der schliesslich erlangten Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmoment des Hebels könnte man nun die hervorgebrachte kinetische Energie berechnen. Dies wäre indessen ziemlich

umständlich und man kann die kinetische Energie des Hebels einfacher schätzen, wenn man sie schliesslich in potentielle Energie der Schwere verwandelt. Man braucht zu dem Ende nur um eine mit dem Hebel verbundene, um dieselbe Axe drehbare Rolle einen Faden zu schlingen und daran ein Gewicht zu hängen, das vorläufig in solcher Höhe aufgestützt ist, dass während der ganzen Beschleunigung der Faden noch schlaff ist und das Gewicht erst, nachdem der Hebel seine Endgeschwindigkeit erreicht hat, der Weiterbewegung desselben entgegenwirkt. Es wird alsdann, indem sich der Faden aufwickelt, steigen und dabei die Bewegung der Hebelmasse verzögern, bis seine negative Arbeit der vorhanden gewesenen kinetischen Energie gleich geworden ist. Man hat also dann schliesslich wieder in Form des Hubes einer Last den mechanischen Effect der elastischen Arbeit vor Augen, obwohl derselbe ursprünglich bloss in Erzeugung von kinetischer Energie bestand.

Versuche dieser Art wurden an einer schraubenförmigen Stahlfeder von 61 mm Länge angestellt, welche durch Dehnung auf 76,5 mm Länge eine Spannung von 710 g annahm. Die bei ihrer Zusammenziehung von 76,5 auf 61 mm zu leistende Arbeit war aus der Dehnungscurve zu 5530 gmm berechnet. In den Versuchen hob der durch eine solche Zusammenziehung in Schwung gesetzte Hebel beispielsweise einmal 800 g 5,9 mm hoch, was einer Arbeit von 4720 gmm entspricht. Dies sind etwa 85 Proc. der berechneten positiven Arbeit. Da nun vielleicht doch wohl 5 Proc. von der dem Hebel LL' wirklich ertheilten kinetischen Energie durch Widerstände gegen seine Bewegung aufgezehrt werden dürften, so können wir annehmen, dass unter günstigen Umständen beiläufig 90 Proc. der positiven Arbeit einer sich zusammenziehenden Stahlfeder zur Erzeugung kinetischer Energie in Form von Massenbewegung verwandt werden können und nur etwa $^1/_{10}$ davon zur Ueberwindung innerer Reibungswiderstände verbraucht und in Wärme verwandelt wird.

Etwas weniger günstig war das Resultat, wenn die äquilibrirten Schwungmassen des Hebels seiner Axe näher gestellt waren. Es kamen dabei höchstens 80 Proc. der berechneten Arbeit schliesslich als negative Arbeit der Schwere zum Vorschein. Offenbar hat dies seinen Grund darin, dass jetzt wegen des geringeren Trägheitsmomentes der Maschine alsbald grössere Geschwindigkeiten erreicht wurden, welchen die inneren und äusseren Widerstände verhältnissmässig mehr entgegenwirken. Auch wenn die Anfangsspannung der Feder geringer gemacht wurde, so dass im Ganzen weniger Arbeit geleistet wurde, erschien ein kleinerer Bruchtheil des berechneten Betrages in Form von negativer Arbeit der Schwere. Als Beispiel mögen folgende Zahlen dienen. Die Feder zog sich von 73 mm Länge (Spannung 540 g) auf ihre natürliche Länge von 61 mm zusammen, wobei ihre elastischen Kräfte theoretisch eine Arbeit von etwa 3060 gmm leisten. Der dadurch in Bewegung gesetzte Schwunghebel hob 600 g auf 4 mm Höhe. Die negative Arbeit der Schwere war also 2400 gmm, was nur etwa 80 Proc. der berechneten

Arbeit ausmacht, obwohl die Schwungmassen am Hebel wie im ersten Versuche standen. Bei einer Zusammenziehung von 68 auf 61 mm kamen gar nur 60 Proc. der berechneten Arbeit zum Vorschein. Vermuthlich rühren diese scheinbar ungünstigen Resultate bei kleinerer Gesammtarbeit von unwesentlichen äusseren Umständen her, deren Erörterung indessen hier unterbleiben mag, da diese Versuche an sich für uns kein Interesse bieten, vielmehr nur zur Erläuterung der Methoden dienen sollen, die auf die Untersuchung der Muskelarbeit anzuwenden sind.

Das wesentliche Ergebniss dieser Versuche ist, dass bei Strängen von so vollkommener Elasticität, wie eben eine stählerne Spiralfeder ist, fast die ganze Arbeit der elastischen Kräfte bei der Entspannung zu äusseren mechanischen Effecten verwandt werden kann, sowohl, wenn die Entspannung in „umkehrbarer“ Weise geschieht, indem eine der jeweiligen Spannung fast gleiche Gegenkraft überwunden wird, als auch wenn die elastischen Kräfte nur Beschleunigung von trägen Massen bewirken, wofern nur in diesem letzteren Falle die trägen Massen gross genug sind, um keine allzu grossen Geschwindigkeiten zu Stande kommen zu lassen. Bei Körpern von weniger vollkommener Elasticität ist dies anders. Da zehren die inneren Widerstände unter allen Umständen, wo Massen beschleunigt werden, einen namhaften Bruchtheil der Arbeit der elastischen Kräfte auf, so dass nie die gewonnene kinetische Energie in Bewegung gesetzter fremder Massen der aus der Dehnungscurve berechneten Arbeit annähernd gleich erscheint. So ist es schon bei Kautschuksträngen und mehr noch beim Muskel.

Es giebt nun noch eine dritte Art, die Arbeit elastischer Kräfte zu mechanischen Leistungen zu verwenden, die sich aus den beiden vorher betrachteten zusammensetzt. Man verknüpft nämlich das freie Ende des gespannten elastischen Stranges mit trägen Massen und lässt auf diese noch eine Gegenkraft wirken, welche aber der elastischen Spannung nicht Gleichgewicht hält. Dann wird die Differenz beider Kräfte im Sinne der letzteren die Masse in Bewegung setzen und es entsteht also einerseits kinetische Energie, andererseits negative Arbeit der Gegenkraft, und die Summe beider wird bei vollkommener Elasticität des Stranges der positiven Arbeit seiner elastischen Kräfte gleich sein. Man kann diese Bedingungen leicht herstellen an dem Fig. 7 (S. 52) dargestellten Apparat. Man braucht nur den in Schwung zu setzenden Hebel von vorn herein mit einer Belastung zu versehen.

Es ist nicht nöthig, Zahlenbelege von Versuchen dieser Art an Stahlfedern zur Erläuterung beizubringen, da sich schon bei den Versuchen der vorigen Art gezeigt hat, dass die elastische Arbeit einer solchen Feder fast vollständig zu äusserem mechanischem Effect verwandt werden kann, und dass diese dritte Versuchsweise der Erzielung äusserer mechanischer Effecte günstiger ist als die zweite.

Zweites Capitel.

Myographische Methoden.

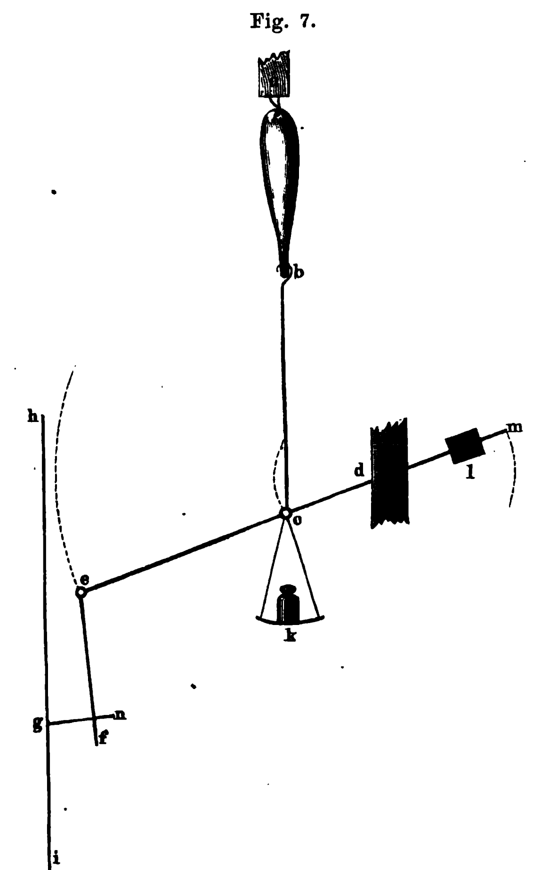
Für viele Aufgaben der Physiologie und Pathologie der Muskeln und Nerven ist es von Wichtigkeit, den Vorgang der Muskelverkürzung graphisch darzustellen. Es sind daher die mechanischen Grundsätze der zu diesem Zwecke dienenden Methoden hier zu behandeln, um so mehr, als diese Grundsätze zum Theil auch bei anderen graphischen Darstellungen Anwendung finden, und diese Art der Darstellung des zeitlichen Verlaufes von Vorgängen mit Recht heutzutage in der physiologischen Experimentirkunst die erste Stelle einnimmt.

Jede Vorrichtung zur graphischen Darstellung der Muskelzusammenziehung muss selbstverständlich aus zwei Stücken bestehen, die wesentlich von einander getrennt sind und sich in ihrer Construction durchaus nicht gegenseitig bedingen. Das erste Stück ist ein mit dem Muskel so zu verknüpfender beweglicher Körper, dass er die Bewegungen des freien Muskelendes möglichst genau — nach Bedürfniss in vergrössertem Maassstabe — mitmacht. Das zweite Stück ist eine mit bekannter Geschwindigkeit verschobene Fläche, an welcher ein Punkt des ersten Stückes eine sichtbare Spur hinterlässt, was meistens durch Berussung der Zeichenfläche bewerkstelligt wird. Natürlich muss die Bewegungsrichtung der Fläche möglichst senkrecht stehen zur Bewegungsrichtung des mit dem Muskelende verknüpften zeichnenden Punktes. Man hat sehr verschiedene Constructionen dieser beiden Stücke zu sogenannten Myographien zusammengestellt, von denen die gebräuchlichsten und zweckmässigsten hier beschrieben werden sollen.

Fassen wir zunächst das erste mit dem Muskel zu verbindende zeichnende Stück ins Auge. Bei den älteren Formen der Myographien ist dies ein metallener Hebel. Der Muskel ist nämlich (s. Fig. 7 a. f. S.) am einen Ende bei *a* an die unbeweglichen Theile des Instrumentes befestigt. Am anderen Ende hängt, unter Vermittelung geeigneter Zwischenstücke *bc*, die zur Spannung des Muskels dienende Last *k*. Bei *c* ist aber die Kette der Zwischenstücke an einen Hebel *em* befestigt. Dieser kann sich bloss bei *d* um eine zur Ebene des Papieres senkrechte Axe drehen, welche mit den festen Theilen des Apparates unbeweglich verbunden ist. Um die Sicherheit der Bewegung zu vergrössern, giebt man dem Hebel von *e* bis *d* die Gestalt eines wagerechten, mehrfach verspannten Rahmens. Am freien Ende *e* des Hebels hängt das Stäbchen *ef* herab, so dass es sich gegen den Hebel mit möglichst wenig Reibung um eine in *e* zur Ebene des Papieres senkrechte Axe drehen kann. Dies Stäbchen trägt den Zeichenstift *gn*, der in einer einfachen Stahlnadel besteht, die in jeder beliebigen Höhe am Stäbchen *ef* fest-

gestellt werden kann. Die in der Figur gezeichnete Lage wäre nun nicht die Gleichgewichtslage des frei hängenden Stäbchens *ef* mit dem Zeichenstifte, es würde vielmehr, sei es durch eine Ueberlast bei *n*, sei es durch einen besonders angebrachten Federdruck, mehr nach links herabhängen. Die Zeichenspitze lehnt sich also mit einer gewissen Kraft an die senkrechte Fläche, auf welche gezeichnet werden soll.

Fig. 7.



Es ist nach dieser Beschreibung klar: wenn sich der Muskel *ab* contrahirt, so kann die Last nicht genau geradlinig aufsteigen, vielmehr muss der Punkt *c* einen Kreisbogen um *d* beschreiben, der durch eine punktirte Linie angedeutet ist. Ebenso beschreibt der Punkt *e* einen Kreisbogen um *d*. Die Zeichenspitze *g* folgt aber dieser Bewegung, weil sie an *hi* angelehnt bleiben muss in einer senkrechten geraden Linie. Es muss sich dabei freilich der Winkel zwischen *ef* und *ed* ändern, was eben durch die Beweglichkeit der Verbindung zwischen *ef* und *ed* möglich gemacht wird. Die Zeichenspitze macht demnach allerdings nicht ganz genau proportionale Bewegungen mit dem Punkte *b*, aber, wenn die Erhebungshöhen dieses Punktes, und folglich die Kreisbogen, welche *c* und *e* beschreiben, klein sind gegen die Länge des Hebels, wenn endlich dieser nahezu wagerecht liegt, so sind die Abweichungen von der Proportionalität nur klein, und das Verhältniss der Vergrösserung, in welchem die Zeichenspitze die Bewegungen der Last am Muskel wiedergiebt, kommt dem Verhältnisse sehr nahe zwischen der Länge *ed* und *cd*.

Am Hebelarm *dm* bringt man zweckmässig ein Laufgewicht *l* an, durch das man die links von der Axe *d* gelegenen Theile des Hebelwer-

kes balanciren kann. Es ist alsdann die Belastung des Muskels genau gleich dem bekannten, auf die Wagschale bei *c* gelegten Gewichte. Stellt man dagegen das Laufgewicht näher an die Axe *d*, so fällt noch ein Theil des Hebelwerkes selbst dem Muskel zur Last.

Da bei dieser Einrichtung eine ziemlich bedeutende Masse, nämlich der schwere Metallhebel mit Belastung und Gegengewicht in grosse Bewegungen geräth, so kann es kommen, dass dieses System durch die Muskelzusammenziehung in ganz freien Schwung geräth und nicht mehr bloss der Zusammenziehung des Muskels folgt, welcher bei dem Vorgange vielleicht zeitweise ganz entspannt ist. Das Myogramm giebt dann eben das Bild einer vom Muskel in Bewegung gesetzten trägen Masse. Für manche Untersuchungen ist nun gerade dies von Bedeutung und wird alsdann die beschriebene Einrichtung gerade dem Zwecke entsprechen. In anderen Fällen aber verlangt man ein Bild vom Gange der Muskelverkürzung bei gleichbleibender Spannung.

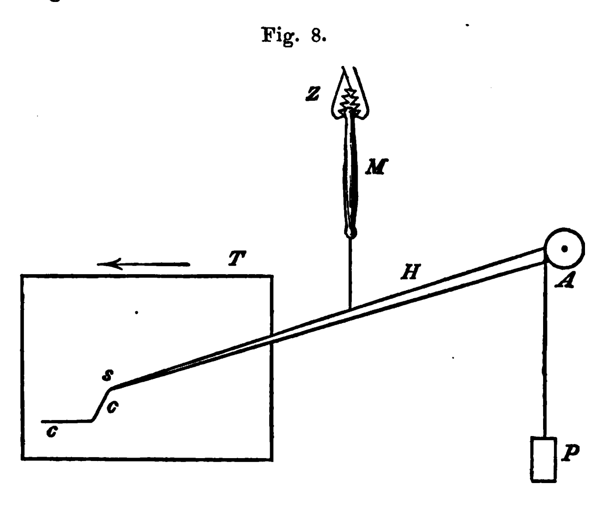
Für solche Fälle kommt es natürlich vor Allem darauf an, dass möglichst wenig Masse in Bewegung gesetzt wird, und es muss also der Zeichenhebel möglichst leicht verfertigt werden. Ein vorzügliches Material für diesen Zweck ist ein aus zwei Schilfstreifchen zusammengeleimtes Stäbchen, das, auf die hohe Kante in Anspruch genommen, eine bedeutende Steifigkeit bei äusserst geringer Masse besitzt. Auf die Geradführung der Zeichenspitze verzichtet man am besten, denn das in einem Gelenke hängende Stück *ef* — *gn*, Fig. 7, kann nicht ohne verhältnissmässig beträchtliche Masse hergestellt werden. Man lässt vielmehr eine an einer ganz leichten und schwach federnden Verlängerung des Schilfhebels angebrachte Nadelspitze direct anlehnen an der berussten Zeichenfläche, die alsdann freilich nicht in einer, die Hebelrichtung senkrecht kreuzenden, sondern in einer ihr nahezu parallelen Richtung vorbei zu bewegen ist.

Die Nadelspitze zeichnet jetzt, wenn der Hebel gehoben wird, an die ruhende Zeichenfläche nicht eine senkrechte Gerade, sondern einen Kreisbogen. Das ist aber ein kaum nennenswerther Nachtheil, da das in Betracht kommende Bogenstück nur wenig von der senkrechten Geraden abweicht, wenn nur der Muskel am Hebel so weit von der Axe angreift, dass die zu erwartende Verkürzung des Muskels ein kleiner Bruchtheil, sagen wir z. B. $^1/_5$, von jener Entfernung ist.

Die den Muskel spannende Last darf jetzt auch nicht, wie in Fig. 7, senkrecht unter dem Muskel angebracht werden, weil sie sonst in zu rasche Bewegung kommen kann und daher vielleicht zeitweise den Muskel nicht mit dem vollen Betrage ihres Gewichtes spannt. Man kann die Anwendung von Gewichten zur Erhaltung der Spannung ganz vermeiden und als spannende Gegenkraft die Elasticität einer Feder verwenden, wobei allerdings die ins Spiel tretende Masse auf ein Minimum reducirt werden kann. Dabei müssen aber complicirte Vorrichtungen verwendet werden, um die Spannung constant zu halten. Es ist deshalb

zweckmässiger, beim spannenden Gewichte zu bleiben, dasselbe jedoch so anzubringen, dass seine Masse sicher nicht in Schwung kommt. Dies erreicht man leicht, wenn man das spannende Gewicht an einen Faden hängt, der um die stählerne cylindrische Axe des Zeichenhebels geschlungen ist, deren Halbmesser etwa 5 mm betragen mag. Dann wird von dem Faden bei den grössten Excursionen des Hebels nur so wenig aufgewickelt, dass das Gewicht kaum merklich steigt und also selbst bei den raschesten Zusammenziehungen keine erhebliche Geschwindigkeit erlangt. Freilich ist nun die Spannung des Muskels nicht gleich dem angehängten Gewichte, sondern verhält sich zu ihm wie der Halbmesser der Axe zur Entfernung des Muskelangriffspunktes von der geometrischen Drehungsaxe.

Fig. 8.

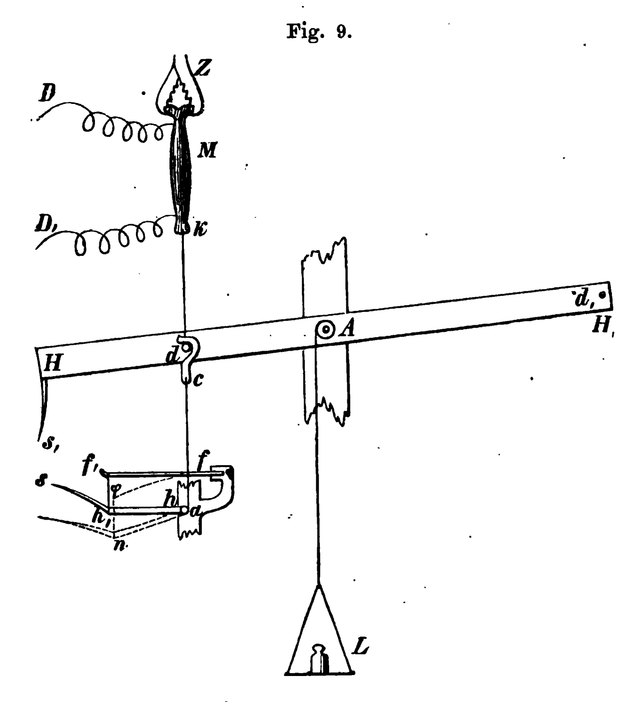


Man erhält auf Grund der vorstehenden Bemerkungen die in Fig. 8 schematisch dargestellte, ebenso zweckmässige, als einfache Vorrichtung. *M* ist der Muskel, dessen Knochenansatz bei *Z* in eine am Stativ befestigte Zange eingeklemmt ist. *H* ist der leichte Hebel, *A* die stählerne Axe, an welcher das spannende Gewicht *P* hängt, ungefähr in seiner Mitte ist der Hebel mit dem Muskel verknüpft und am freien Ende läuft er in die zeichnende Spitze *s* aus, an welcher in der Richtung des Pfeiles die Zeichenfläche *T* (Cylinder oder Tafel) vorübergeführt wird. Auf ihr ist bei *cc* der Anfang eines Myogramms angedeutet, dessen erster wagerechter Theil noch der Ruhe des Zeichenhebels entspricht.

Man kann der graphischen Methodik auch eine der vorigen genau entgegengesetzte Aufgabe stellen, nämlich ein Bild zu geben von dem zeitlichen Verlaufe der Aenderung, welche die Spannung eines Muskels bei seiner Reizung erleidet, wenn seine Länge constant gehalten wird. Man kann sich hierzu der nachstehend beschriebenen und in Fig. 9 schematisch abgebildeten Vorrichtungen bedienen.

Der obere Knochenansatz des Muskels (*M* Fig. 9) ist wieder in eine Zange gefasst, welche an dem Stativ des Apparats befestigt ist, jedoch so, dass man sie durch eine Schraube höher oder tiefer stellen kann. Der andere Knochenansatz (*k*) des Muskels ist durch einen undehnbaren Draht mit einem Stiftchen (*d*) verbunden, welches in den starken Stahlhebel (*HH*) 80 mm von seiner Axe *A* entfernt eingesetzt ist. Dieser Hebel ist, beiläufig gesagt, etwas über 320 mm lang und trägt ausser dem schon erwähnten Zäpfchen *d* noch eins *d,* an seinem anderen Arme in 160 mm Entfernung von der Achse. Die Achse *A* läuft mit Spitzen so gut wie ohne Reibung in einem Lager, welches mit dem Stativ des Appa-

Fig. 9.



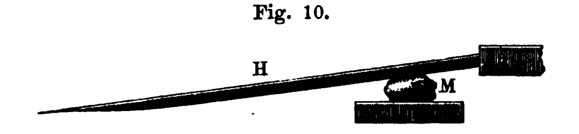
rats fest verbunden ist. Die Axe trägt noch ein Röllchen von 4 mm und eins von 8 mm Halbmesser. Um das eine oder andere ist ein Faden geschlungen, an welchem eine Wagschale hängt, auf die beliebige Gewichte aufgelegt werden können. Merklich senkrecht unter dem Zäpfchen *d* steht ein Spitzenlager wie das Lager für die Axe *A* an dem Stativ des ganzen Apparates befestigt. Darin ist die Axe (*a*) eines ganz leichten, aber sehr steifen einarmigen Schilfhebels (*h h,*) beweglich. Das freie Ende *h,* desselben ist durch ein steifes Drähtchen mit dem freien Ende (*f,*) eines federharten Stahldrahtes oder Glasstreifchens (*f f,*) verbunden, dessen anderes Ende (*f,*) in ein mit dem Stativ verbundenes Stück eingeklemmt ist. Das *f,* und *h,* verbindende Drähtchen ist bei-

derseits nur eingehakt, so dass es sich sowohl gegen die Feder als gegen den Hebel drehen kann. Um die Axe *a* ist ein vollkommen biegsamer, aber unausdehnbarer Faden geschlungen, der an ihrer hinteren Seite aufsteigt und an seinem freien Ende ein aus Messingblech gebildetes Häkchen (*c*) trägt, das an das Zäpfchen *d* angehängt werden kann. Es braucht kaum besonders bemerkt zu werden, dass der Faden etwas hinter der Feder (ff_1) vorbeigeht. Man sieht jetzt, dass, wenn der grosse Hebel (HH_1) aufwärts gezogen wird, der Schilfhebel *hh*, abwärts gedreht werden muss. Dies kann aber nicht geschehen, ohne dass das Federende (f_1) niedergebogen wird, wobei die Spannung der Feder rasch zunimmt. Da nun die cylindrische Axe *a*, um welche der Faden geschlungen ist, einen Halbmesser von nur einem Millimeter hat, so wird von demselben nur ein nach Bruchtheilen eines Millimeters zu messendes Stückchen abgewickelt sein, wenn die Feder schon ziemlich weit (z. B. bis zum Punkte φ) niedergebogen ist und eine grosse Spannung erlangt hat. Diese letztere hält aber an dem kleinen Halbmesser der Axe als Hebelarm einer noch viel grösseren aufwärts wirkenden Zugkraft Gleichgewicht. Jede beliebige an *d* aufwärts ziehende Kraft wird sich also mit der Federspannung in Gleichgewicht setzen, ohne dass der Punkt *d* um einen nennenswerthen Betrag aufsteigt. Die Grösse der Zugkraft kann dabei mit grosser Genauigkeit bemessen werden nach der Stellung, welche bei erreichtem Gleichgewicht der kleine Hebel *hh*, einnimmt, denn je grösser die Kraft, desto tiefer wird er das Federende herabbiegen. Man kann zum voraus eine Scala empirisch entwerfen, welche für jeden Kraftwerth die Stellung des Hebels anzeigt. Am besten geschieht dies graphisch, indem man an den Hebel *h* noch ein Zeichenspitzchen (*s*) anbringt. Man lehnt dieselbe an die Fläche, an welche hernach gezeichnet werden soll, und hängt an den anderen Arm des grossen Hebels bei *d*, nach einander verschiedene Gewichte, etwa 50 g, 100 g, 150 g etc. Selbstverständlich ist hierbei die Wagschale *L* zu entfernen. Man ertheilt durch das beschriebene Verfahren dem Faden *ca* nach einander Spannungen von 100 g, 200 g, 300 g etc. Jedesmal steht dann natürlich die Zeichenspitze *s* etwas tiefer. Indem man bei jeder Lage die Zeichenfläche einmal vorbeiführt, erhält man ein System von parallelen Linien, welches als Spannungsscala dient, in die man später die Versuche unmittelbar einzeichnen kann. Ist dabei mit dem grossen Hebel HH_1 auch noch eine Zeichenspitze (s_1) verbunden, die an dieselbe Trommel angelehnt ist, so erhält man zugleich eine Anschauung von den minimen Erhebungen, welche dieser Hebel bei den betreffenden Werthen der aufwärts gerichteten Zugkraft erleidet. Wird der an diesem Apparate befestigte Muskel gereizt, so wird der Spannungszeiger eine grosse Bewegung abwärts und wieder zurück ausführen, und an der vorüberbewegten Zeichenfläche eine Curve schreiben, aus welcher der zeitliche Verlauf der Spannungsänderung bei constanter Länge geschlossen werden kann, denn die Verkürzung des Muskels ist fast absolut verhindert.

Wenn man das Häkchen bei *d* während des Muskelactes abzieht, dann kann von diesem Augenblicke an der Muskel sich frei contrahiren. Dieser Augenblick der beginnenden Verkürzung kann nun aber nach Wunsch in jedes beliebige Stadium des Muskelactes gesetzt werden, wenn der Abzug des Häkchens durch eine geeignete elektromagnetische Vorrichtung ausgelöst wird.

Ausser der Verkürzung und der Spannungsänderung bei gleichbleibender Länge kann noch eine dritte am Muskel während seines Actes verlaufende Aenderung Gegenstand graphischer Darstellung sein, nämlich die Verdickung, welche mit jeder Verkürzung nothwendig Hand in Hand geht, da bekanntlich das gesammte Volumen des Muskels bei der Zusammenziehung nicht merklich geändert wird. Um durch die Verdickung an irgend einer Stelle des Muskels einen Hebel in Bewegung zu setzen, dessen Spitze den zeitlichen Verlauf dieses Vorganges an einer bewegten Fläche anzeichnen soll, muss man den Muskel seiner ganzen Länge nach auf eine starre Unterlage (etwa eine Glasplatte) auflegen und an irgend einer Stelle den Zeichenhebel nahe seiner Axe quer darüberlegen. Seine Spitze wird dann die Verdickung in sehr vergrössertem Maassstabe an eine vorübergeführte Fläche anzeichnen. Die sehr einfache Anordnung

Fig. 10.



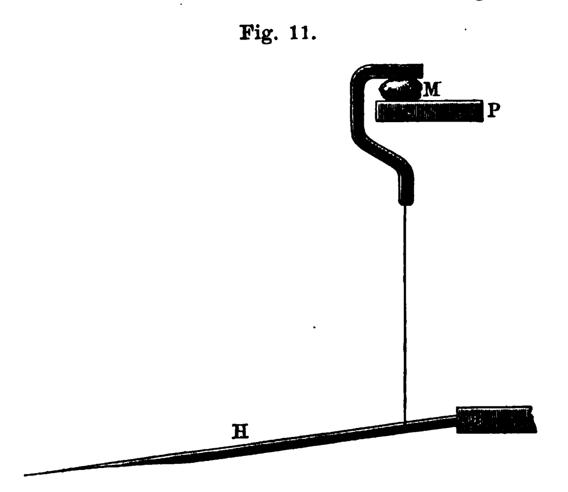
ist aus Fig. 10 zu ersehen. Vom Muskel, dessen Längsrichtung zur Ebene des Papieres senkrecht zu denken ist, sieht man bei *M* den Querschnitt, *H* ist der Zeichenhebel und bei *a* seine Axe. Zu diesem Versuche kann übrigens jeder beliebige Myographionhebel dienen, wenn man über ihm die Platte *P* (Fig. 11 a. f. S.) befestigt, auf welcher der Muskel aufliegt und auf ihn einen Bügel *B* aufsetzt, der mit dem Hebel *H* nahe bei dessen Axe verknüpft ist.

Die graphische Darstellung von Muskelverkürzung und Muskelverdickung erfordert nicht nothwendig ein aus dem Thiere herausgeschnittenes Muskelpräparat, das an dem Stative des Zeichenhebels befestigt wird. Es können vielmehr auch Zuckungen von Muskeln des lebenden Menschen solche Hebel in Bewegung setzen und somit zu graphischer Darstellung gebracht werden, was namentlich zu Untersuchung von pathologischen Störungen im Verhalten der Muskeln und Nerven eine unschätzbare Methode abgiebt. Die besonderen hierzu dienenden Veranstaltungen sind dem individuellen Falle anzupassen und können daher hier nicht allgemein beschrieben werden.

Den zweiten wesentlichen Theil jedes Myographion, die Zeichenfläche, hat man sehr mannigfaltig gestaltet. Am gebräuchlichsten ist der

rotirende Cylinder. Er ist zu myographischen Zwecken in sehr verschiedener Weise hergestellt. Bei der ersten von Helmholtz ausgedachten myographischen Vorrichtung ist die Zeichenfläche ein kleiner Glascylinder von etwa 4 bis 5 cm Grundflächenhalbmesser. Die Glasfläche wird direct berusst, so dass man, um das Myogramm aufzubewahren, den Cylinder mit der Zeichnung aus dem Apparate herausnehmen und auf angefeuchtetem Gelatinpapier abwickeln muss, an welchem die Russschicht festklebt. Gedreht wird der Cylinder von einem gut regulirten Uhrwerk. Bei der Kleinheit des Cylinderumfanges muss natürlich die Winkelgeschwindigkeit sehr gross sein und es fallen nothwendig mehrere Umläufe des Cylinders in die Zeit eines Muskelactes, so dass die Fortsetzung der myographischen Curve den Anfang ein oder mehrere Male durchkreuzt, was die Uebersichtlichkeit der Zeichnung erheblich beein-

Fig. 11.



trächtigt. Dieser Missstand ist gar nicht zu vermeiden, selbst wo es einem nur auf den Anfangstheil des Myogrammes ankommt, da man das Uhrwerk, wenn es in vollem Schwunge ist, nicht plötzlich anhalten kann.

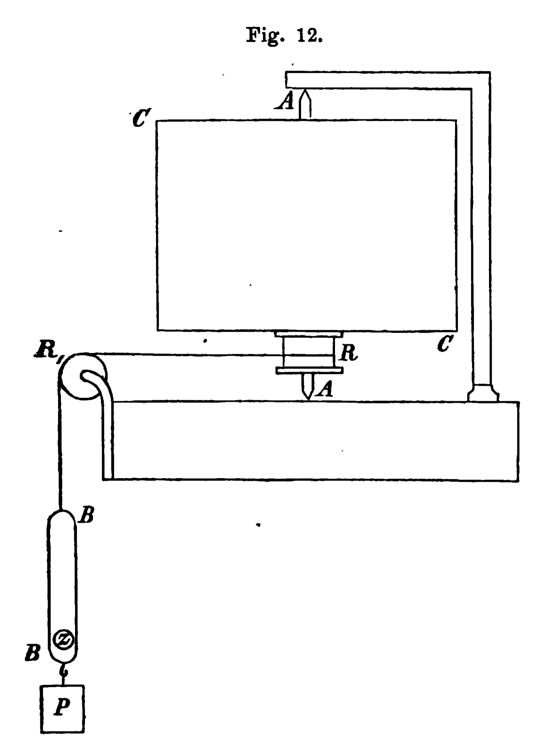
An Helmholtz' Myographion sind mancherlei Abänderungen von verschiedenen Forschern angebracht, die sich aber meist auf Nebenumstände und auf den Mechanismus der Bewegung beziehen, während der kleine Glascylinder als Zeichenfläche beibehalten wurde, der doch die wesentliche Unbequemlichkeit bedingt.

Offenbar wäre es ein grosser Vortheil, wenn man es so einrichten könnte, dass der Cylinder, an welchen gezeichnet werden soll, nur einmal umliefe und dann sofort angehalten würde. Natürlich müsste die Geschwindigkeit in dem Theile des Umlaufes, in welchen die Zeichnung fällt, ganz constant und doch gross genug sein, um kleine Bruchtheile einer Secunde (etwa $^1/_{1000}$) noch messen zu können. Dazu kann selbstverständ-

lich ein Cylinder von kleiner Grundfläche nicht dienen, auch ist ein regulirtes Uhrwerk als Triebkraft nicht anwendbar. In zahlreichen Untersuchungen habe ich seit mehreren Jahren eine auf den ersten Blick etwas primitiv aussehende Einrichtung solcher Art ausserordentlich brauchbar und allen billigen Anforderungen an Genauigkeit durchaus entsprechend gefunden.

Ein schwerer Cylinder *C C* (Fig. 12) aus starkem Messingblech von 1 m Umfang steckt auf einer stählernen Axe, welche mit möglichst wenig Reibung in Spitzen läuft. Auf derselben Axe steckt unter dem Cylinder eine Rolle von etwa 20 mm Halbmesser, um welche eine Schnur geschlungen ist. Das eine Ende derselben bildet ein Ringlein, welches an einem aus dem Boden des Cylinders hervorragenden Stift angehängt ist, so dass es, sowie die Schnur ihre Spannung verliert, abfällt, das andere Ende der Schnur geht zunächst über eine am Stativ befestigte Rolle *R*, und trägt einen starken eisernen Bügel *B B*, an welchem das als bewegende Kraft dienende Gewicht *P* hängt. Aus dem Boden des Cylinders ragt noch ein (in der Figur nicht gezeichneter) starker Zapfen hervor, der gegen einen (gleichfalls nicht gezeichneten) am Stativ befestigten Hebel anlehnt, wenn das Gewicht mittelst der Schnur den Cylinder zu drehen strebt. Der Zapfen und der Hebel müssen mit ebener Fläche, die durch die Axe des Cylinders geht, einander berühren und die Drehungsaxe des Hebels muss auf dieser Ebene senkrecht stehen. Wird nun der Hebel von dem Zapfen weggedreht, so kann der Cylinder anfangen, sich zu drehen und wird in der That durch das sinkende Gewicht *P* in beschleunigte Bewegung gesetzt. Ist aber das Gewicht durch eine gewisse Strecke gesunken, so setzt sich der Bügel auf den in seine Höhlung einspringenden, am Stativ befestigten und mit Kautschuk ge-

Fig. 12.



polsterten Zapfen Z. Damit hört die Beschleunigung und die Spannung der Schnur auf, diese löst sich durch Abfallen des Ringleins ganz vom Cylinder resp. der Rolle R und der Cylinder kann sich nun ganz frei mit der erlangten Winkelgeschwindigkeit in infinitum weiter drehen. Die Höhe der Lichtung des Bügels B, welche vermindert um die Dicke des Zapfens den maximalen Fallraum des Gewichts bildet, ist so bemessen, dass sie etwa dem halben Umfang der Rolle R gleichkommt. Denn mehr als eine halbe Umdrehung kann man nicht zur Beschleunigung des Cylinders verwenden, da die Zeichnung der Zuckung aus selbstverständlichen Gründen noch innerhalb der ersten Umdrehung ausgeführt werden muss. Durch Höherstellen des Zapfens kann natürlich der zur Beschleunigung verwendete Theil der Umdrehung verkleinert werden. Man sieht leicht, dass man durch die Wahl des Gewichts und seines Fallraums die Endgeschwindigkeit des Cylinders zwischen weiten Grenzen verändern kann. Werden 3 bis 4 Kilogramm angehängt und der Fallraum auf sein Maximum gebracht, so erreicht der Cylinder eine Endgeschwindigkeit, die für die subtilsten Versuche über Muskelzuckungen u. dergl. genügt. So roh die ganze Einrichtung aussieht, so arbeitet sie doch mit ungemeiner Genauigkeit. Ist einmal ein bestimmtes Gewicht angehängt und der Fangzapfen in bestimmter Höhe festgestellt, was durch eine massive Pressschraube geschieht, so erhält man immer wieder genau dieselbe Endgeschwindigkeit, und diese erleidet auch in dem Reste der ersten Umdrehung, welche zum Versuche benutzt wird, keine die Genauigkeit des Resultates irgend merklich beeinträchtigende Verzögerung, so dass sie als während des Versuchs vollkommen constant angesehen werden kann. Man überzeugt sich davon leicht durch Anzeichnung von Stimmgabelschwingungen an den Cylinder.

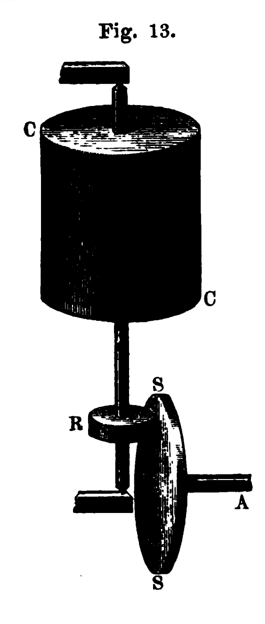
Beim wirklichen Versuch wird der Cylinder sofort, nachdem das Myogramm gezeichnet ist, noch ehe der Umlauf vollendet ist, mit der Hand angehalten. Es wäre natürlich leicht, zu diesem Zwecke eine selbstthätige Vorrichtung anzubringen, doch ist das Anhalten mit der Hand vollkommen genügend.

Als Zeichenfläche dient, ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit, berusstes Glanzpapier, das über den Cylindermantel gespannt ist, so das man die Originalzeichnung selbst auf dem abgenommenen Blatte fixiren und aufbewahren kann.

Wenn es nicht auf Messung sehr kleiner Zeittheile ankommt, darf sich natürlich der Cylinder, auf welchem gezeichnet wird, mit kleiner Geschwindigkeit drehen. Für solche Fälle verwendet man heutzutage zu myographischen sowie auch zu anderen graphischen Darstellungen allgemein eine Vorrichtung, deren eigenthümlichster Theil in Fig. 13 dargestellt ist. Eine Axe A, die an ihrem vorderen Ende die ebene Scheibe S trägt, wird durch ein sehr starkes, vom Foucault'schen Windflügel regulirtes Uhrwerk gedreht. Die Axe des Zeichencylinders C, dessen Umfang 0,5 m misst, trägt ein Röllchen R, dessen Peripherie

gegen die Scheibe *S* angedrückt ist, so dass diese bei ihrer Drehung durch Reibung das Röllchen und damit den Cylinder dreht. Indem es nun durch einen in der Figur nicht gezeichneten Mechanismus möglich ist, das Röllchen bald höher, bald tiefer an der Axe des Cylinders einzustellen, hat man es bei gleichbleibender Umlaufszeit der Scheibe in der Gewalt, der Umlaufszeit des Cylinders zwischen gewissen Grenzen jeden beliebigen Werth zu geben. Stellt man z. B. das Röllchen so, dass sein Berührungspunkt mit der Scheibe von ihrer Axe genau ebenso weit absteht als von seiner eigenen Axe, so wickelt sich das Röllchen an einer Kreisperipherie der Scheibe ab, welche der Peripherie des Röllchens gleich ist und dasselbe nebst dem Cylinder dreht sich also ebenso oft um als die Scheibe. Stellt man das Röllchen höher, so liegt der Berührungspunkt von der Axe der Scheibe weiter entfernt und der Umfang des Kreises, an welchem sich das Röllchen abwickelt, ist grösser als sein Umfang. Es dreht sich also nebst dem Cylinder öfter in der Minute um als die Scheibe, umgekehrt weniger oft, wenn man den Berührungspunkt näher an die Axe der Scheibe bringt. Die Apparate dieser Art, welche man gegenwärtig in allen Laboratorien antrifft, gestatten übrigens nicht die Umlaufszeit des Cylinders unter etwa 10″ herunterzudrücken. Ein Punkt des Cylindermantels bewegt sich also höchstens mit einer Geschwindigkeit von 50 mm in 1″, was für viele myographische Versuche viel zu klein ist. Als Zeichenfläche dient bei diesem Apparate meist über den Cylinder gespanntes berusstes Glanzpapier.

Fig. 13.



Zur Aufnahme der myographischen Zeichnungen hat man mehrfach auch statt rotirender Cylinder ebene Tafeln gebraucht, die durch verschiedene Mechanismen in ihrer eigenen Ebene verschoben werden. Von den zahlreichen Vorschlägen dieser Art sind indessen nur zwei häufiger in Gebrauch gekommen, nämlich das Federmyographion von du Bois-Reymond und das Pendelmyographion. Im Federmyographion wird ein geeignet gefasster Glasstreifen von etwa 5 cm Höhe und 20 bis 25 cm Länge in Falzen durch eine Spiralfeder von Stahldraht mit grosser Geschwindigkeit in seiner eigenen Ebene fortgezogen oder so zu sagen fortgeschnellt, während die Spitze des Zeichenstiftes an die berusste Oberfläche anlehnt, und dafür gesorgt ist, dass der Muskelact gerade in die Zeit des Vorüberfahrens der Glastafel fällt. Da die Geschwindigkeit nicht constant ist, so entspricht nicht jede Längeneinheit in der Abscissenrichtung demselben Zeittheil. Sollen also Zeitmessungen mit diesem

Apparate gemacht werden, so muss man sich den Zeitmaassstab auf eine andere Art verschaffen, wovon weiter unten die Rede sein soll.

Im Pendelmyographion ist eine Glasplatte am unteren Ende eines schweren, aus Eisenstangen gefertigten Pendels von etwa 1 m Länge so befestigt, dass ihre Oberfläche senkrecht zur Axe des Pendels steht, sich also bei der Schwingung in ihrer eigenen Ebene verschiebt. An diese senkrechte Oberfläche, die entweder selbst berusst oder mit einem berussten Papierblatt überzogen ist, lehnt nun der Zeichenstift. Das Pendel wird jetzt aus seiner Gleichgewichtslage gezogen und in einer gewissen zum Voraus bestimmten Entfernung — sagen wir 10^0 — festgehalten, sodann plötzlich durch Wegziehen einer Stütze, an die ein vom Pendel vorspringender Zapfen angelehnt war, losgelassen und nach Beendigung des Schwunges auf der anderen Seite der Gleichgewichtslage festgehalten. Während des Schwunges hat nun der Muskelact stattgefunden und die an der berussten Fläche angelehnte Zeichenspitze hat eine Curve geschrieben, aus der freilich der zeitliche Verlauf des Actes nicht so ganz einfach wie bei den anderen Vorrichtungen abzulesen ist. Die Abscissenlinie, in welcher die Zeiten zu messen sind, ist nämlich hier nicht eine gerade Linie, sondern ein Kreisbogen, denn einen solchen beschreibt ja die ruhende Zeichenspitze. Ueberdies entsprechen nicht gleiche Stücke des Bogens gleichen Zeiträumen, da das Pendel sich nicht mit constanten, sondern anfangs mit zunehmender und nach Passiren der Gleichgewichtslage mit abnehmender Geschwindigkeit bewegt. Diese beiden Umstände sind indessen nur insofern Uebelstände, als sie das Bild des zeitlichen Verlaufes der Muskelzuckung für die unmittelbare Anschauung entstellen oder verzerren. Eine genaue Messung der einzelnen Stadien des Verlaufes wird dadurch nicht beeinträchtigt, denn man kann aufs Allergenaueste angeben, welche Zeit das Pendel zum Durchlaufen jeder bestimmten Strecke seiner Bahn gebraucht. Gerade hierin dürfte das Pendelmyographion jeder anderen Vorrichtung überlegen sein; denn die Bewegung eines Pendels erfolgt, selbst wenn es ziemlich roh ausgeführt ist, mit einer Regelmässigkeit, die von anderen Mechanismen bei der sorgfältigsten Arbeit kaum zu erreichen ist. Man kann also zum Voraus auf der Pendeltafel angeben, in welchem Bruchtheil einer Secunde jeder bestimmte Winkelgrad der Schwingung durchlaufen wird, und wenn also hernach in einem Myogramm ein bestimmtes Stück der Erhebung des Zeichenstiftes in diesen Winkelgrad fällt, so weiss man, welche Zeit zu diesem Theile der Muskelzusammenziehung verwendet ist. Diese immerhin mühsame Arbeit kann man sich übrigens sparen, da neuerdings ein sehr bequemes Mittel in Gebrauch gekommen ist, um beim Versuche selbst den Zeitmaassstab mit dem Myogramm zugleich an die Pendeltafel anzuzeichnen. Dies Hülfsmittel, dessen Princip sogleich beschrieben werden soll, kann natürlich auch bei jeder anderen myographischen Vorrichtung, besonders auch beim Federmyographion angewandt werden.

Bekanntlich schwingen die Zinken einer Stimmgabel mit grosser Regelmässigkeit. Hält man also eine Stimmgabel so, dass die Schwingungen senkrecht auf- und abgehen und führt in wagerechter Richtung eine Fläche (Cylinder oder Ebene) daran vorüber, an welcher ein mit dem Zinkenende verbundenes Stiftchen eine Spurlinie hinterlässt, so wird diese Spurlinie eine auf- und abgehende Wellenlinie sein und der wagerechte Zwischenraum zwischen zwei Wellengipfeln wird genau die Strecke sein, welche die Zeichenfläche in der Zeit einer Schwingung durchlaufen hat. Wenn die Zeichenfläche mit genau constanter Geschwindigkeit geht, werden also die Wellengipfel alle genau gleich weit aus einander liegen, wo sich die Geschwindigkeit vergrössert, rücken die Wellengipfel weiter aus einander, wo sie sich verkleinert, rücken sie näher zusammen. Zeichnet mit der Stimmgabel gleichzeitig auf dieselbe bewegte Fläche irgend ein Myographionstift, so kann man durch Abzählen der Wellengipfel, welche unter ein bestimmtes Stück des Myogramms fallen, sofort sehen, in welcher Zeit z. B. die Zusammenziehung des Muskels oder seine Ausdehnung vollendet ist.

Es ist natürlich nicht bequem, eine grosse Stimmgabel selbst vor der Myographionfläche aufzustellen. Man wendet daher gegenwärtig zu dem gedachten Zwecke eine Vorrichtung an, durch welche die Schwingungen einer Stimmgabel mittelbar auf die bewegte Fläche gezeichnet werden. Die Stimmgabel, welche zur Bequemlichkeit der späteren Berechnung der Resultate meist auf 100 Schwingungen per Secunde abgestimmt ist, lässt man bei jeder Schwingung einen Platincontact unterbrechen, durch welchen ein elektrischer Strom geht. Dieser Strom wird erstens durch die Rolle eines Elektromagnets geführt, dessen Pole einer ihrer Zinken nahe stehen, dadurch erhält sich die einmal angeregte Gabel nach Art des bekannten Wagner'schen Hammers an Inductionsapparaten selbst im Gange. Zweitens ist der elektrische Strom noch durch die Rollen eines ganz kleinen Elektromagnets geführt, vor dessen Polen ein ganz kleines Stahlfederchen schwingen kann. Dies wird also bei jeder Schwingung der Gabel einmal angezogen und einmal losgelassen, macht also genau so viel Schwingungen als die Gabel selbst. Dieser ganz kleine Apparat kann aber weit bequemer als die Gabel neben dem Myographionhebel vor der Zeichenfläche an einem besonderen Stativ aufgestellt werden und die zeitmessende Wellenlinie anzeichnen.

Zu jeder myographischen Vorrichtung gehört noch ein Stück, durch welches bewirkt wird, dass der Muskelact wirklich in die Zeit fällt, wo die Zeichenfläche am zeichnenden Stifte vorüberfährt, und ferner dass man genau den Punkt kennt, wo der zeichnende Stift in dem Augenblicke gestanden hat, in welchem der den Muskelact auslösende Reiz stattgefunden hat. Selbstverständlich kann diese letztere Bedingung nur bei elektrischer Reizung erfüllt werden. Es wird sich also immer darum handeln, einen elektrischen Stromkreis zu öffnen in dem Augenblicke, wo die Zeichenfläche einen bestimmten Punkt ihrer Bahn erreicht.

Natürlich lässt man diese Oeffnung durch den bewegten Körper, der die Zeichenfläche trägt, selbstthätig bewerkstelligen, was bei allen den beschriebenen Mechanismen sehr einfach ausführbar ist. Man bringt nämlich an dem Cylinder, Pendel etc. irgendwo an passender Stelle einen vorspringenden Zapfen an, der an einer ganz bestimmten Stelle seiner Bahn den Contact zwischen zwei Platinstücken unterbricht. Bildet nun dieser Contact einen Theil der Leitung des primären Stromes eines Inductors und ist in der Leitung seiner secundären Rolle der Nerv oder Muskel des am Zeichenhebel befestigten Präparates, so durchfährt ihn der Oeffnungsinductionsschlag genau in dem Augenblicke, wo der erwähnte Zapfen den Contact öffnet. Oder bildet der letztere einen Theil einer guten Nebenschliessung zu einem constanten Strome, in dessen Kreis der Nerv oder Muskel aufgenommen ist, so bricht dieser Strom in jenem Augenblicke in den Nerv oder Muskel ein. Um aber auf der Zeichenfläche zu markiren, wo der zeichnende Stift in jenem Augenblicke steht, macht man vor jeder Versuchsreihe einen Versuch, in welchem die Zeichenfläche ganz langsam geführt wird, bis der Zapfen den Contact öffnet, dann macht bei der nun erfolgenden Zuckung der Zeichenstift an der nahezu ruhenden Fläche einen Strich, der die fragliche Stelle bezeichnet.

Drittes Capitel.

Geometrie der Gelenkbewegungen.

Die Muskelarbeit der höheren Thiere wirkt meist auf ein System starrer Massen (der Knochen), welche in mehr oder weniger beweglicher Verbindung mit einander stehen. Es sind daher die mechanischen Principien zu entwickeln, nach welchen die besonderen Arten der Knochenverbindung besondere Arten der Bewegung bedingen.

Die Anatomie theilt die Knochenverbindungen in zwei Classen ein, „Symphysen“ und „Gelenke“. Die Symphyse lässt vermöge ihrer Einrichtung eine allseitige Beweglichkeit der verbundenen Knochen zu; daher ist eine weitere mechanische Zergliederung dieser Verbindungsart nicht nöthig. Der Bewegungsumfang ist in den Symphysen stets ein sehr beschränkter. Das eigentlich Charakteristische der Symphyse besteht darin, dass sie den beiden verbundenen Knochen eine stabile Gleichgewichtslage anweist, in welche dieselben sofort zurückspringen, sowie eine Kraft aufhört zu wirken, welche sie aus jener Lage entfernt hielt.

Ein Gelenk hingegen schreibt im Allgemeinen den dadurch verbundenen Knochen keine stabile Gleichgewichtslage vor. Bringt man z. B. den Vorderarm durch irgend eine Kraft in irgend eine beliebige Stellung zum Oberarm und hört dann jede fremde äussere Kraft zu wirken auf, so springt der Vorderarm nicht von selbst in eine bestimmte Lage zurück, sondern er bleibt in der letzten Lage in Ruhe. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei ausdrücklich erwähnt, dass für diese Betrachtung die Schwere auch als eine dem Gelenke fremde Kraft anzusehen ist. Wollte man sich daher durch den Versuch von der Richtigkeit des Satzes überzeugen, so hätte man den Vorderarm der Wirkung der Schwere zu entziehen, etwa indem man die Axe des Gelenkes senkrecht stellte, so dass der Vorderarm sich nur in wagerechter Ebene bewegen könnte.

Das mechanisch Wesentliche an der anatomischen Gelenkeinrichtung ist Folgendes: Zwei Knochen stossen mit freien Endflächen an einander, und um die Berührungsstelle herum zieht sich eine schlauchartige Membran, die mit dem einen Saume an dem einen, mit dem anderen Saume an dem anderen Knochen und zwar am Rande der Berührungsstelle angeheftet ist. So entsteht an der Berührungsstelle eine vollständig geschlossene Höhle — die Gelenkkapsel — begrenzt durch die beiden einander zugekehrten Knochenendflächen und durch den membranösen Schlauch. Die Wände dieser Höhle und insbesondere die mit einem elastischen Polster, dem Gelenkknorpel, versehenen Knochenenden sind vollkommen glatt und durch eine eigene schmierige Flüssigkeit schlüpfrig erhalten. Der Binnenraum der Höhle ist meistens klein und von der soeben erwähnten Flüssigkeit vollkommen angefüllt. Da dieselbe so gut wie absolut incompressibel ist, so muss begreiflicherweise der Binnenraum der Gelenkkapsel an Grösse unveränderlich sein. Mit anderen Worten ausgedrückt, stellt sich dieser Satz als der oberste und einzige Grundsatz der ganzen Gelenkmechanik dar; es kann nämlich behauptet werden: Zwei durch ein Gelenk verbundene Knochen können **nur** solche Bewegungen gegen einander ausführen, bei denen die Grösse des Binnenraumes der Gelenkkapsel nicht verändert wird.

Es ist nun ein rein geometrisches Problem, im gegebenen Falle auszumitteln, wie die Bewegungen beschaffen sind, bei welchen eben die Gelenkkapsel ihren Rauminhalt nicht ändert. In vielen Fällen würde es freilich ein vergebliches Bemühen sein, dieses Problem zu lösen; denn es reduciren sich in vielen Fällen die ganzen Bewegungen eines Gelenkes auf ein unbedeutendes Wackeln, das übrigens allemal und zwar allseitig möglich ist, da die paar Tropfen der Gelenkflüssigkeit immer überall hin ausweichen können, und somit eine Gestaltveränderung der Gelenkhöhle, mit Beibehaltung der Grösse, durch ein solches Wackeln nach jeder Richtung hin immer stattfinden kann. Offenbar ist es um so umfangreicher, je kleiner die Berührungsflächen der Knochen sind. Die Gelenke, deren Bewegung ausschliesslich hierin besteht und die in der

Anatomie unter dem Namen der „Amphiarthrosen“ beschrieben werden, können wir füglich von den jetzt anzustellenden geometrischen und mechanischen Betrachtungen ganz ausschliessen.

Bei den grösseren Gelenken mit ausgiebigeren Bewegungen kommen nun, abgesehen von dem Wackeln — das bei ihnen wegen der Grösse der Berührungsflächen ohnehin so gut wie gänzlich ausgeschlossen ist — noch andersartige Bewegungen in Betracht. In ihnen berühren sich nämlich die Knochenenden mit grösseren Flächenstücken vollständig. Man denke sich jetzt, die paar Tropfen Flüssigkeit nicht beachtend, die schlauchartige Gelenkkapsel ringsum dicht angelegt. So ist es in der Wirklichkeit der Fall, und der Binnenraum der Gelenkhöhle ist somit $= 0$. Unser Grundsatz spricht sich also dann so aus: Das Gelenk lässt nur solche Stellungen zu, bei denen die Gelenkhöhle $= 0$ bleibt; oder, mit anderen Worten, bei denen die Gelenkflächen immerwährend vollkommen auf einander passen, d. h. bei der Bewegung müssen die Gelenkflächen auf einander schleifen, ohne ihre vollständige Contiguität aufzugeben. Man hat diesen Satz ganz richtig auch wohl so ausgesprochen: Die Gelenkflächen werden durch den Luftdruck in Berührung gehalten. In der That würde ja, wenn die Gelenkflächen auseinanderwichen, der Binnenraum der Gelenkhöhle nicht mehr $= 0$ sein; dieser Raum wäre aber leer, da bei der vollständigen Abgeschlossenheit desselben keine Masse in ihn eindringen könnte. Dem Entstehen eines leeren Raumes wirkt aber der Luftdruck entgegen.

Aus dem Gesagten ergeben sich mehrere unmittelbare Folgerungen. Erstens braucht wohl bloss erwähnt zu werden, dass bei einem Gelenke die eine Fläche der Abdruck der anderen, die eine der anderen (oder wenigstens einem Stücke der anderen) congruent sein muss. Zweitens aber muss, wenn Bewegung überhaupt soll gedacht werden können, von den Flächen eine gewisse geometrische Beschaffenheit gefordert werden; denn es lässt sich nicht für jede beliebige Fläche ein Bewegungsmodus angeben, der die Bedingung erfüllt, dass sie bei der Bewegung mit ihrem ruhend gedachten Ebenbilde in Congruenz bleibt (darauf schleift oder gleitet). Die Geometrie kennt in der That bloss zweierlei Classen von Flächen, welche der soeben unter Zweitens gestellten Bedingung genügen, nämlich gewisse Schraubenflächen [1]) und die Rotationsflächen. Die Schraubenflächen bilden den allgemeineren Begriff, in welchem der der Rotationsflächen eigentlich als specieller Fall enthalten ist, denn man kann

---

[1]) So viel ich sehen kann, bin ich der Erste, welcher die Möglichkeit der Verwendung von Schraubenflächen zur Bildung eines Gelenkes ausgesprochen hat in der ersten Auflage dieses Werkes. Erst geraume Zeit nach dem Erscheinen derselben hat Langer nachgewiesen, dass das Sprunggelenk einiger Säugethiere nach dem Princip der Schraube gebildet ist. Noch später hat man auch in mehreren Gelenkflächen des Menschen den Schraubentypus bemerkt.

jede Rotationsfläche ansehen als eine Schraubenfläche, bei der die Höhe des Schraubenganges = 0 ist. Der Bewegungsmodus, bei welchem eine Schraubenfläche mit ihrem ruhig gedachten Ebenbilde in Congruenz bleibt, ist bekanntlich der (wie uns täglich die Bewegung einer gewöhnlichen Schraube in ihrer Mutter lehrt), dass die Fläche um eine mit ihr fest verbundene gerade Linie sich dreht und sich gleichzeitig längs derselben verschiebt. Abschnitte von Schraubenflächen sind, wie neuere Untersuchungen lehren, im menschlichen Körper vielfach zur Bildung von Gelenken verwandt, welche sich daher nach dem soeben angedeuteten Modus bewegen müssen. Die Verschiebung längs der Axe ist aber bei allen diesen Gelenken des Menschen so klein gegen die Drehung, dass man mit grosser Annäherung die letztere ausschliesslich für den Bewegungsmodus erklären kann.

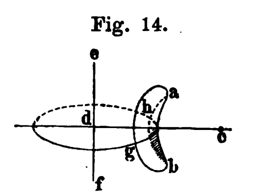
Rotationsflächen nennt man solche, die entstanden gedacht werden können durch Umdrehung einer beliebigen Curve um eine mit ihr fest verbundene gerade Linie. So entsteht unter anderen — um an bekannte Beispiele zu erinnern — durch Umdrehung einer geraden Linie um eine mit ihr in derselben Ebene gelegene Gerade der Kegel und der Cylinder, je nachdem die beiden gedachten Geraden einander schneiden oder parallel sind. Drehte man eine gerade Linie um eine andere, die sie weder schneidet noch zu ihr parallel ist, so entsteht ein anderer Rotationskörper, den wir weiter unten noch brauchen werden, den man das einschalige Rotationshyperboloid nennt, weil er noch auf einem anderen Wege aus der Hyperbel hergeleitet werden kann. Die gerade Linie, um welche die die Fläche erzeugende Drehung stattfand, nennt man die Rotationsaxe oder schlechtweg die Axe der Fläche, und man begreift leicht, dass alle Schnitte der Fläche mit Ebenen, die zu dieser Axe senkrecht stehen, Kreise sein werden, deren Mittelpunkte in der Axe liegen. Die gegebene Definition der Rotationsflächen fällt zusammen mit einer anderen, welche anschaulicher und nicht weniger allgemein ist: eine Rotationsfläche ist eine Fläche, die sich als Oberfläche eines Werkstückes auf der Drehbank erzeugen lässt.

Dreht sich die Rotationsfläche um ihre Axe, so wird sie mit ihrem ruhig gehaltenen Ebenbilde in Congruenz bleiben: denn jeder ihrer Punkte beschreibt bei dieser Bewegung einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, und nimmt nach einander Lagen an, die sämmtlich der Fläche in ihrer ersten Lage, also auch dem ruhend gedachten Ebenbilde angehören. Mit anderen Worten: eine Rotationsfläche gleitet an ihrem Abdrucke, wenn sie sich um ihre Axe dreht, während bei jeder anderen Bewegung die vollständige Deckung der Flächen aufgehoben wird. Es ergiebt sich somit: wenn die in einem Gelenke zusammenstossenden Flächen Stücke von Rotationsflächen sind, so können in demselben nur solche Bewegungen vorkommen, die in einer Drehung um die Axe der Rotationsfläche bestehen, von welcher die Gelenk-

flächen Stücke sind. In der That sind aber alle im menschlichen Körper vorkommenden Gelenke mit namhaftem Bewegungsumfange durch Zusammenstossen von Flächen gebildet, die wenigstens mit grosser Annäherung als Rotationsflächen angesehen werden können. Es ist also eine weitere Eintheilung nach dem Mechanismus nicht nöthig, da derselbe in allen gleich sein muss. Nur der specielle Fall, wo die zur Bildung des Gelenkes verwandte Rotationsfläche eine Kugel ist, erfordert noch eine besondere Analyse.

Ehe jedoch auf diesen eingegangen wird, mag noch ein von dem eben beschriebenen etwas abweichender Gelenkmechanismus Platz finden, der ermöglicht wird durch die im Organismus überall stattfindende Abweichung von der geometrischen Strenge[1]). Denken wir uns, Fig. 14, einen Kreisbogen *ab*, der keinen grossen Centriwinkel umspannt. Sein Mittelpunkt mag in *c* liegen. Er werde gedreht um eine in seiner Ebene gelegene Gerade *ef*, so wird ein gürtelartiges oben und unten sich erweiterndes Flächenstück entstehen, das mit dem mittleren Gürtel eines Rotationshyperboloides (wovon oben die Rede war) so gut wie congruent ist.

Fig. 14.



Dass es um die Linie *ef* gedreht werden kann, ohne mit seinem ruhend gedachten Ebenbilde ausser Congruenz zu gerathen, versteht sich von selbst. Man steche aus dieser Fläche durch einen Cylinder, der die Linie *cd* zur Axe hat, ein Stück heraus; seine Begrenzungslinie *agbh* schneidet den kleinsten Kreis in den Punkten *g* und *h*. Das ganze Stück ist offenbar sattelförmig gestaltet, und es lässt sich jetzt leicht zeigen[2]), dass Schnitte dieses Stückes mit Ebenen parallel zu der des Kreisbogens *ab* nahezu ebenfalls kreisförmig sind, und zwar, dass sie sich Kreisen anschliessen, deren Mittelpunkte sämmtlich in einer geraden Linie liegen, die im Punkte *c* senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht. Begreiflicherweise ist der Anschluss der Schnittcurven an Kreise um so genauer, je weniger Grade die Kreisbogen *ab* und *gh* umfassen. Es wird demnach unser sattelförmiges Flächenstück annäherungsweise auch dann in theilweiser Deckung mit seinem ruhenden Ebenbilde verbleiben oder beinahe auf seinem Abdrucke schleifen, wenn man es gedreht denkt um eine Gerade als Axe, welche in *c* auf der Ebene *abc* senkrecht steht. Es lässt sich ferner zeigen, dass in einem gewissen Umfange auch dann noch um die letztere Axe eine Drehung ohne Aufhebung der Congruenz vorgenommen werden kann, wenn schon vorher eine Drehung um die Axe *ef* stattgefunden hatte. Somit ergiebt sich, dass ein Gelenk, gebildet

---

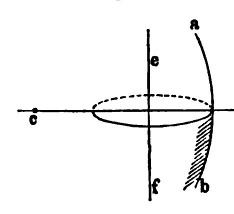
[1]) A. Fick, Ueber Gelenke mit sattelförmigen Flächen. Zeitschr. für rat. Med. 4, 314.

[2]) Am bequemsten, wenn man die Fläche geradezu als Rotationshyperboloid betrachtet, was gar nichts an der Sache ändert.

durch sattelförmige Flächen von der beschriebenen Natur, Bewegungen zulässt um zwei Axen, die sich in einer gewissen Entfernung (*dc*) senkrecht überkreuzen. Der Bewegungsmodus in einem solchen Gelenke lässt sich demnach folgendergestalt charakterisiren: Man denke sich den Knochen, in dessen Innerem die Linie *ef* gelegen ist, fixirt; in irgend einer Lage des anderen Knochens denke man sich nun die Lage der zweiten in *c* zu der Ebene *abc* Senkrechten. Diese Linie, mit den beweglichen Knochen in fester Verbindung, wird bei allen Lagen, die derselbe anzunehmen im Stande ist, immer in einer Ebene und in gleicher Entfernung vom Punkte *d* bleiben. Oder es sind in dem Gelenke nur solche Bewegungen möglich, bei denen die im beweglichen Knochen in der gedachten Weise fixirte Linie einen Kreis berührt, der mit dem Radius *dc* um *d* beschrieben ist. Der Beweis dafür ist schon in Obigem enthalten. Die gedachte Linie wird nämlich bei der Drehung um die andere Axe *ef* in der beschriebenen Weise herumgeführt, den Kreis mit dem Radius *dc* einhüllend, und alle übrigen Bewegungen des Gelenkes bestehen eben in Drehung um die jeweilige Lage dieser Linie selbst, wobei dieselbe also nicht verändert wird. Der Prototyp eines so gebauten Gelenkes ist das Karpometakarpalgelenk des Daumens. Man kann sich den Bewegungsmodus des Gelenkes mit sattelförmigen Flächen auch noch so vorstellen: Es leistet genau dasselbe, als ob zwischen die beiden durch dasselbe verbundenen Knochen noch ein Zwischenstück eingeschaltet wäre, das mit beiden Knochen in Charniergelenken verbunden wäre und zwar müsste die Axe des eines Charnieres *ef* sein, die Axe des anderen jene im Punkte *c* zur Ebene der Zeichnung senkrechte Gerade. In dem citirten Aufsatze von mir ist etwas ausführlicher nachgewiesen, in wiefern die Bewegungen eines solchen Gelenkes den Anschein arthrodischer Bewegung bieten, mit denen sie von manchen anatomischen Handbüchern irrigerweise verwechselt wurden.

Analoge Verhältnisse bietet eine Fläche, die entsteht, wenn man in Fig. 15 den Kreisbogen *ab* um die Linie *ef* gedreht denkt, die auf seiner concaven Seite gelegen ist, ohne durch seinen Mittelpunkt *c* zu gehen. Auch hier werden Schnitte der Rotationsfläche mit Ebenen, die zur Ebene *abc* parallel sind, sich Kreisen anschliessen, deren Mittelpunkte auf einer in *c* auf *abc*, d. h. auf der Ebene der Zeichnung errichteten Senkrechten liegen. Ein aus solchen Flächenstücken gebildetes Gelenk wird also ebenfalls zwei einander senkrecht überkreuzende Axen darbieten, um welche einigermaassen umfangreiche Bewegungen möglich sind. Nur werden in diesem Falle beide Axen im Inneren eines und desselben von den beiden verbundenen Knochen liegen, während in dem vorigen Falle der sattelförmigen Flächen die

Fig. 15.



eine Axe im einen, die andere im anderen der verbundenen Knochen lag. Das Gelenk zwischen Radius und Handwurzel dürfte nahezu Flächen von der zuletzt geschilderten Beschaffenheit besitzen. Es mag noch im Vorbeigehen bemerkt werden, dass die blosse Annäherung jedesfalls ein ebenso genaues Schleifen der Flächen in diesen Fällen zulässt, wie es die bestausgeführten Gelenkflächen factisch leisten, deren Bewegungsprincip an sich eine vollkommene geometrische Congruenz gestattete, denn diese findet eben in Wirklichkeit doch nicht statt.

Eine besondere Betrachtung erheischt der specielle Fall, wo die zu dem Gelenke benutzten Flächen Abschnitte ein und derselben Kugel sind; am einen Knochen wird dabei die concave, am anderen die convexe Seite der Kugelfläche sichtbar, so dass beide auf einander passen, Man nennt bekanntlich ein solches Gelenk eine Arthrodie[1]) und weiss. dass es sich durch allseitige Beweglichkeit auszeichnet, im Gegensatze zu den übrigen, die nur nach bestimmten Richtungen hin Bewegungen zulassen. Vor allen übrigen Rotationsflächen ist nämlich die Kugel dadurch ausgezeichnet, dass sie mit ihrem ruhend gedachten Ebenbilde in Congruenz bleibt, nicht bloss bei der Drehung um eine bestimmte Axe, sondern bei der Drehung um jede beliebige Linie als Axe, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, d. h. sie bleibt mit ihrem ruhig gedachten Ebenbilde in Deckung bei allen Bewegungen, bei denen der Mittelpunkt und nur der Mittelpunkt seine Lage im Raume beibehält. Sonach ist ein durch Arthrodie mit einem festgedachten verbundener Knochen ein Körper, der alle Bewegungen auszuführen im Stande ist bei denen ein Punkt, der mit ihm in fester Verbindung (sei es in seinem Inneren, sei es ausserhalb seines Umfanges) zu denken ist, unbewegt bleibt. Die Geometer haben diesen Bewegungen viel Aufmerksamkeit gewidmet und auch erschöpfend untersucht, wie die Einwirkung von Kräften auf einen solchen Körper modificirt wird, durch die Bedingung, dass einer seiner Punkte gezwungen ist, seinen Ort im Raume zu behaupten. Da diese Untersuchungen für die Muskelmechanik von grossem Interesse sind, so müssen sie hier mit einiger Ausführlichkeit abgehandelt werden.

In der Lehre von den denkbaren Bewegungen eines Körpers um einen festen Punkt (abgesehen von den Kräften, durch die sie hervorgebracht werden, also in der sogenannten Geometrie der Drehungen) giebt es einen Fundamentalsatz, der dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte entspricht und den man den Satz von der Zusammensetzung der Drehungen nennen kann.

Um die Vorstellungen bestimmter zu machen, muss vor Allem noch eine Verabredung getroffen werden über eine passende Art, den Sinn einer Drehung gleichzeitig mit der Linie zu bezeichnen, um welche sie

---

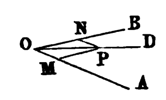
[1]) Was von den Bewegungen der arthrodischen Gelenke gilt, das gilt auch von den Bewegungen des Augapfels.

geschieht; denn es kann natürlich an sich ein Körper um jede gerade Linie zweierlei Drehungen ausführen, bei denen alle seine Punkte nach einander dieselben Stellungen einnehmen, nur in umgekehrter Ordnung der Aufeinanderfolge. Man hat in dieser Beziehung folgende sehr zweckmässige Uebereinkunft getroffen. Man spricht nämlich von Drehungen um Halbaxen, indem man die fragliche unendliche gerade Linie durch einen an sich willkürlichen Punkt in zwei Halbaxen eintheilt, und bei einer Drehung um diese Linie sagt man, sie geschehe um die eine oder die andere Halbaxe (die von dem gewählten Punkte aus nach der einen oder der anderen Seite ins Unendliche geht), je nachdem sie im einen oder dem anderen Sinne vor sich geht, und zwar lässt man diejenige Hälfte als Halbaxe der Drehung gelten, in welcher ein Beobachter mit den Füssen gegen den Theilungspunkt gestützt stehen müsste, damit er die Drehung so sähe, wie die Drehung der Zeiger einer Uhr, auf deren Zifferblatt er sieht. Diese Uebereinkunft werden wir im Folgenden consequent innehalten, nur mag das Wort Axe der Kürze wegen für Halbaxe stehen. Wenn ein fester Punkt so schon vorhanden ist, soll dieser immer als Anfangspunkt aller denkbaren Halbaxen der Drehungen gelten. Sei jetzt, Fig. 16, O der feste Punkt, um welchen sich ein Körper beliebig drehen kann, und seien im Sinne unserer Verabredung OA und OB zwei in demselben anfangende Drehungsaxen. Man denke sich, der Körper habe sich um die Axe OA zuerst um einen Winkel 2α gedreht, darauf noch um einen Winkel 2β um OB, so kann gezeigt werden, dass die durch beide auf einander folgende Drehungen hervorgebrachte Lagenveränderung des Körpers hätte hervorgebracht werden können durch eine einzige Drehung um eine gewisse Axe OD, deren Lage man findet als den Durchschnitt zweier Ebenen, von denen die eine, durch OA gelegt, einen Winkel α mit der Ebene AOB macht, während die andere, durch OB gelegt, den Winkel β mit derselben Ebene AOB einschliesst (OD ist also in unserer Figur nicht in der Ebene des Papiers, sondern über derselben herausragend zu denken). Es ist nämlich einleuchtend, dass die so bestimmte Linie OD bei der ersten Drehung um gerade so viel unter die Ebene des Papiers hinuntergeht, als sie im Anfang über dieselbe herausragte. Bei der zweiten Drehung um OB als Axe kommt sie dann genau wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Durch die beiden auf einander folgenden Drehungen wird mithin die Lage der einen Linie OD unverändert gelassen, und die ganze so hervorgebrachte Lagenveränderung des Körpers ist einer Drehung um diese Linie äquivalent. Das gilt für jede beliebige Grösse der beiden Drehungswinkel 2α und 2β, jedoch ist der Fall noch besonders zu untersuchen, wo diese beiden Winkel unendlich klein sind. In dem körperlichen Dreiecke, dessen Kanten die drei Linien OA, OB und OD sind, verhält sich nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie $\sin BOD : \sin AOD = \sin \alpha : \sin \beta$. Bekanntlich

Fig. 16.

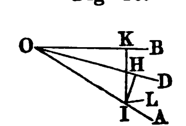
darf man aber für die Sinus unendlich kleiner Winkel diese selbst setzen, und man hat also, wenn die Drehungswinkel unendlich klein gedacht werden, $\sin BOD : \sin AOD = \alpha : \beta$; gleichzeitig ist dabei die Linie OD begreiflicherweise der Ebene AOB unendlich nahe gerückt oder in dieser selbst vorzustellen. Diese Folgerungen lauten aber, in Worten ausgedrückt, so: Wenn zwei unendlich kleine Drehungen auf einander folgen um zwei Axen OA und OB und das Verhältniss der beiden unendlich kleinen Drehungswinkel $\alpha : \beta$ bekannt ist, so kann man die Richtung der in derselben Ebene gelegenen Axe finden, um welche eine einzige Drehung dieselbe Lagenveränderung hervorgebracht hätte, wenn man auf den Axen (Fig. 17) OA und OB von O aus Längen OM und ON abschneidet, die sich wie die Drehungswinkel 2α und 2β verhalten, und das Parallelogramm OP vervollständigt, seine Diagonale ist die gesuchte Axe. Es verhält sich nämlich in der That in dem ebenen Dreieck OMP $\sin AOD : \sin OMP = MP : OM$, und es ist Winkel $OPM = BOD$, und das Verhältniss von MP ($= ON$) zu OM ist durch die Construction dem Verhältniss von $\alpha : \beta$ gleich gemacht worden.

Fig. 17.



Es bleibt nur noch übrig, die Grösse des Drehungswinkels der resultirenden Drehung (d. h. der einen, welche an die Stelle der beiden gesetzt werden kann) kennen zu lernen. Zu diesem Zwecke wählt man, Fig. 18, einen Punkt I auf der Axe OA; derselbe wird sich nur bei der zweiten Drehung um OB verrücken und eine unendlich kleine zur Ebene AOB senkrechte Linie IL beschreiben. Von I aus fällt man auf OD und OB die Perpendikel IH und IK. Weil sich zu derselben Bogenlänge (hier IL) gehörige unendlich kleine Winkel verhalten, umgekehrt wie die Radien der Kreise, in denen man sie als Centriwinkel ansieht, so muss die Drehung, die I nach L bringt, je nachdem sie angesehen wird als um OD oder um OB ausgeführt (da sie beide Male in demselben Sinne zu nehmen ist), durch Winkel gemessen werden, die sich verhalten wie $IK : IH = \sin KOI : \sin HOI$; ebenso verhält sich aber die Diagonale OP zur Seite ON in Fig. 17. Der Drehungswinkel der resultirenden Bewegung ist also gemessen durch die Länge der Diagonale des vorhin verzeichneten Parallelogramms, wenn die Seiten desselben die Masse der Drehungswinkel der componirenden Bewegungen darstellen.

Fig. 18.



Sprechen wir die Resultate noch einmal als Lehrsatz aus:

Wenn man auf die Richtungen der beiden Axen von ihrem Durchschnitte aus Grössen aufträgt, welche die unendlich kleinen Drehungswinkel[1]) der auf einander folgenden Rotationen um diese beiden Axen

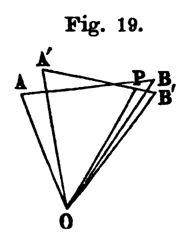
[1]) Häufig wird in mechanischen Abhandlungen statt des Wortes Drehungswinkel in diesem Zusammenhange „Winkelgeschwindigkeit" gebraucht; man

darstellen, so giebt die Diagonale des aus diesen beiden Linien gebildeten Parallelogramms die Richtung der Axe der resultirenden Rotation und die Grösse ihres Drehungswinkels an.

Man folgert hieraus, dass die Zusammensetzung und Zerlegung unendlich kleiner Rotationen um Axen, welche durch einen Punkt gehen, auf dieselbe Weise ausgeführt werden, wie die von Kräften, welche die Richtungen dieser Axen haben und ihrer Grösse nach durch die entsprechenden Drehungswinkel dargestellt werden.

Poinsot[1]) hat nun in einer äusserst sinnreichen Darstellung gezeigt, wie man sich von der allgemeinsten möglichen Bewegung eines Körpers um einen Punkt eine vollkommen klare Anschauung bilden kann, die unmittelbar nicht zu gewinnen ist. So anschaulich nämlich für jeden Menschen die Drehung eines Körpers um eine feste Axe ist, so dunkel ist die Vorstellung von einer irgendwie ausgeführten Drehung eines Körpers um einen festen Punkt (etwa nur einer Kugel um ihren Mittelpunkt). Eine solche Bewegung wollen wir uns zunächst in Elemente zerlegt denken, derart, dass bei der Vollendung jedes Elementes die Punkte des Körpers nur unendlich kleine Wege zurücklegen. Mag nun die Bewegung in aller Allgemeinheit wie auch immer gedacht werden, so wird doch jedes dieser Elemente anzusehen sein als Drehung des Körpers um eine feste Axe, die durch den absolut festen Punkt geht. Dies zeigt sich so: Sei O, Fig. 19, der feste Punkt, und beim Beginne eines der Bewegungselemente sei A und B die Lage zweier willkürlicher Punkte des Körpers; sie werden am Ende des Bewegungselementes unendlich nahe an A und B gelegene Orte, etwa A' und B' einnehmen. Diese unendlich kleine Lagenänderung des Körpers, mag sie sein welche sie will, kann aber jedesfalls folgendermaassen hervorgebracht gedacht werden: Man kann nämlich 1) den Körper um die Durchschnittslinie der beiden Ebenen OAB und $OA'B'$, die OP sein mag, so lange drehen, bis die Ebene OAB mit der Ebene $OA'B'$ zusammenfällt, und 2) dann den Körper um eine auf der Ebene $OA'B'$ in O errichtete Senkrechte drehen, bis die Dreiecke OAB und $OA'B'$ mit Seiten und Ecken zusammenfallen. Diese beiden successiven (unendlich kleinen) Drehungen kann man aber dann noch 3) nach dem bewiesenen Satze zu einer einzigen resultirenden zusammensetzen, welche die gedachte Lagenveränderung auf einmal hervorbringt. Die so gefundene Axe, um welche das Element jeder be-

Fig. 19.



unterstellt dabei, dass die auf einander folgenden Rotationen gleiche Zeiten zu ihrer Vollendung gebraucht hätten. Wir haben dieses Wort absichtlich vermieden, weil allen diesen Betrachtungen, als rein geometrischer Natur, der Begriff der Geschwindigkeit eigentlich fremd ist.

[1]) Théorie nouvelle de la rotation des corps.

liebigen Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt eine Drehung ist, heisst die „*instantane Drehungsaxe*“ für den Augenblick, in welchem das gedachte Bewegungselement ausgeführt wird. Im Allgemeinen wird natürlich die instantane Drehungsaxe in jedem Augenblicke eine andere Lage haben, oder präciser ausgedrückt, es werden im Allgemeinen im zeitlichen Verlaufe der Bewegung immer andere und andere Linien in stetiger Aufeinanderfolge die Rolle der instantanen Axe übernehmen, und zwar ist es gut, noch besonders zu beachten, dass sie sowohl ihre absolute Lage im Raume als auch die relative Lage zum bewegten Körper verändern muss. Sobald die eine fest bleibt, bleibt es auch die andere. Wollte man sich z. B. vorstellen, in zwei auf einander folgenden Momenten wäre dieselbe Linie des bewegten Körpers aber in verschiedenen Lagen im Raume instantane Axe, so stösst man sofort auf den Widerspruch: Während des ersten Momentes war die gedachte Linie eben als Axe im Raume unbeweglich und kann also nicht im folgenden Momente an einem anderen Orte des Raumes wiederum als Axe dienen, es muss sie also entweder im folgenden Momente auch eine andere Linie des Körpers in ihrem Dienste abgelöst haben oder sie muss auch an ihrem alten Platze im Raume fortfahren, denselben Dienst zu thun. In ähnlicher Weise würde die umgekehrte Annahme einen Widerspruch involviren, so dass die soeben gemachte Bemerkung ausser Zweifel ist.

Ferner kann man noch leicht sehen, dass zwei auf einander folgende Lagen der instantanen Drehungsaxe im Körper denselben Winkel einschliessen müssen, wie ihre entsprechenden Lagen im Raume. Sei nämlich, Fig. 20, z. B. Oa in einem gewissen Augenblicke die instantane Axe und sei Oc die Linie des Körpers, welche im folgenden Augenblicke zur Axe werden soll, aber natürlich, nachdem sie eine andere Lage im Raume, etwa Ob[1]), angenommen hat, dann ist also Ob die folgende Lage der instantanen Axe im Raume, bOa der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden solchen Lagen im Raume und aOc ist der Winkel zweier consecutiver Lagen der Axe im bewegten Körper, und diese beiden Winkel müssen offenbar gleich sein, wenn, was doch geschehen soll, durch Drehung um Oa hernach Oc mit Ob zusammenfallen soll. *Poinsot* drückt dies sehr kurz und gut, wenn auch etwas uneigentlich, so aus: die instantane Axe schreitet im Körper und im Raume immer mit gleicher Winkelgeschwindigkeit fort.

Fig. 20.

b a c

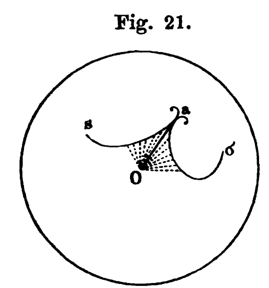
o

Jeder wirklich gedachten endlichen Bewegung eines Körpers um nur einen festen Punkt können sonach zwei Systeme von geraden Linien zugeordnet werden, die alle durch den festen Punkt gehen und die Bewegung geometrisch vollständig bestimmen. Das eine System, im Raume fest gedacht, ist der Inbegriff aller Lagen der instantanen Drehungsaxe

[1]) Natürlich sind nicht alle drei Linien der Figur in der Ebene der Zeichnung zu denken.

im Raume, das andere, mit dem Körper unveränderlich verbunden, begreift alle Linien desselben, die successiv instantane Axen werden. Ist die Richtungsänderung der Bewegung fortwährend eine stetige, so wird sich jedes der beschriebenen Systeme zu einer krummen Fläche zusammenschliessen, von der Gattung der Kegelflächen, denn so nennt man ja alle Flächen, welche erzeugt werden können durch Bewegung einer geraden Linie, wenn einer ihrer Punkte festgehalten wird. Geschieht die Richtungsänderung in Sprüngen, zwischen denen endliche Drehungen um eine und dieselbe Axe liegen, so fallen die einzelnen Linien des Systems discontinuirlich aus einander. Für irgend einen besonderen Fall denke man sich nun um den festen Punkt O, Fig. 21, eine Kugel beschrieben; die beiden Systeme von geraden Linien (hier als Kegelflächen gedacht) werden alsdann die Oberfläche jener Kugel in sphärischen Curven schneiden. Die Schnittcurve mit dem im Raume festen Systeme sei as, und in einem gewissen Momente, wo Oa die instantane Axe ist, mag $a\sigma$ die Lage der Schnittcurve mit dem im Körper festen Systeme sein. Im weiteren Verlaufe der Bewegung werden nun immer andere und andere Seiten der beiden Kegel (durch punktirte Linien angedeutet) mit einander in Berührung kommen, wobei, der Voraussetzung gemäss, as im Raume seine Stelle behauptet, $a\sigma$ sie verändert. Man wird also die Bewegung hervorbringen können, wenn man den Kegel $a\sigma$ mit dem Körper unveränderlich verbunden denkt und ihn mit demselben am Kegel as, der im Raume fest liegt, abrollen lässt, ohne dass ein Gleiten dabei stattfindet. Für den Fall discontinuirlicher Richtungsänderung würden sich begreiflicherweise die beiden Kegel in Pyramiden verwandeln, deren Kanten die Axen darstellen, und die man so an einander abwickelte, dass nach einander die verschiedenen entsprechenden Seiten derselben (die ja nach dem Obigen allemal gleich sein müssen) sich decken. Dies ist das deutlichste Bild, was man sich von der für die Anschauung so schwierigen und dunklen Drehung eines Körpers um einen Punkt machen kann.

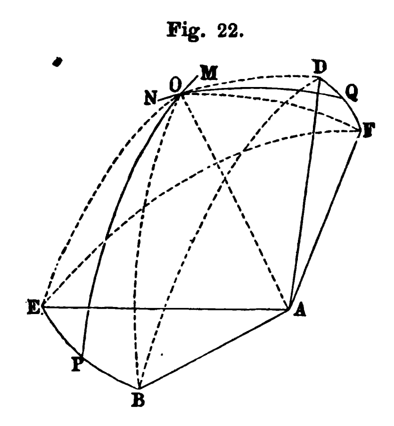
Fig. 21.



Stellen wir die aus einer in dieser Art ganz allgemein gedachten Bewegung hervorgegangene Endstellung unmittelbar mit der Anfangsstellung zusammen, so giebt es, wie Euler zuerst hervorhob, allemal eine durch den Drehpunkt gehende gerade Linie in dem Mobile, welche wieder dieselbe Lage im Raume einnimmt, die sie im Anfang gehabt hat. Man hätte also durch eine einfache endliche Drehung um diese Linie als Axe dieselbe Lagenveränderung hervorbringen können, wie durch die wirklich gedachte complicirtere Bewegung. Es ist sogar sehr leicht, durch geometrische Construction diese definirte Linie zu finden. Sei, Fig. 22 (a. f. S.), A der Drehpunkt, AB die erste, AE die zweite Lage einer Linie des Mobile, sowie AD die erste und AF die zweite Lage

einer anderen Linie desselben. Man sieht ohne Weiteres, dass hierdurch die Lagenveränderung des Mobile vollständig bestimmt ist. Man muss aber noch beachten, dass wenn über die Linien AB, AE und AD willkürlich verfügt worden ist, über die Lage von AF nur noch innerhalb der Grenzen willkürlich verfügt werden darf, dass der in der Natur der Sache liegenden Bedingung genügt wird: Winkel FAE gleich Winkel DAB. Wie nun auch immer diese Lagenveränderung wirklich hervorgebracht sein mag, so hätte sie, behauptet der Euler'sche Satz, hervorgebracht werden können durch eine Drehung von der endlichen Winkel-Amplitude φ um die feste Axe AO, deren Lage so zu finden ist: Man legt durch AB und AE eine Ebene und stellt darauf in der Halbirungslinie des Winkels EAB eine senkrechte Ebene MPA. Ebenso stellt man auf eine Ebene DAF in der Halbirungslinie des Winkels DAF die Ebene NQA senkrecht. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist die gesuchte AO. Beschreibt man nämlich um A eine Kugel mit dem willkürlichen Halbmesser AB, welche die erwähnten Geraden in B, E, D, F und O schneidet, so kommen einige sphärische Dreiecke zur Anschauung, aus deren Beziehungen sich Folgendes ergiebt. Zuvörderst sieht man unmittelbar aus der Construction, dass die Dreiecke BOE und DOF gleichschenklig, also $BO = EO$ und $DO = FO$ ist. Folglich müssen die Dreiecke BOD und EOF wegen Gleichheit ihrer drei Seiten congruent sein, also Winkel $EOF = BOD$ und, wenn man von beiden den Winkel BOF abzieht, Winkel $EOB = DOF = \varphi$. Drehte man also um diesen Winkel φ das Mobile um die Axe AO, so käme die Ebene ABO nach AEO, und gleichzeitig die Ebene ADO nach AFO zu liegen, oder AB nach AE und AD nach AF; es würde also durch diese eine Drehung die vorausgesetzte Lagenveränderung des Mobile hervorgebracht.

Fig. 22.



Es wird gut sein, hier noch vor einigen Missverständnissen ausdrücklich zu warnen, die manchen Betrachtungen über die Bewegungen arthrodischer Gelenke in anatomischen Abhandlungen zu Grunde liegen. Man pflegt in der Anatomie durch die grossen Arthrodien drei sich senkrecht schneidende Axen zu legen, nach denen man die Bewegungen bezeichnet. So legt man z. B. durch das Hüftgelenk 1) eine Axe, die durch den Drehpunkt wagerecht von rechts nach links geht. Drehung um diese Axe nennt man Flexion oder Extension, je nachdem sie um die nach links oder rechts gerichtete Halbaxe geschieht. Man legt 2) eine Axe durch den Drehpunkt wagerecht von vorn nach hinten und

nennt Drehung um die nach vorn gerichtete Halbaxe beim rechten Schenkel Abduction, beim linken Schenkel Adduction. Umgekehrt werden die Drehungen um die nach hinten gerichtete Halbaxe bezeichnet. Endlich 3) legt man durch den Drehpunkt des Hüftgelenkes eine Axe senkrecht von oben nach unten und nennt die Drehungen um dieselbe Rotation, nach aussen oder nach innen, je nachdem die eine oder die andere Halbaxe gilt. Die Auszeichnung dieser drei Axen ist eine rein willkürliche, wie denn vom rein geometrischen Standpunkte aus (den wir hier einstweilen einzunehmen haben) keine durch den Drehpunkt gelegte Gerade als Axe vor irgend einer anderen irgend welchen Vorzug hat. Mit Rücksicht auf die mechanischen Hülfsapparate des Gelenkes (Hemmungsbänder etc.) könnten sich allerdings gewisse Axen auszeichnen, z. B. Axen des grössten Bewegungsumfanges. Dies sind aber jedesfalls nicht die vorhin definirten drei Hauptaxen. Es scheint nun der in anatomischen Büchern üblichen Bezeichnungsweise die Idee unterzuliegen, man solle jede wirkliche Bewegung des arthrodischen Gelenkes nach jenen drei Hauptaxen zerlegen, d. h. sich drei successive Drehungen vorstellen, um die drei Hauptaxen, welche schliesslich das bewegte Glied in dieselbe Lage bringen, in welche es wirklich durch die zu zerlegende Bewegung gekommen ist[1]).

Diese Idee hat aber den Anatomen offenbar nur ganz dunkel vorgeschwebt, denn die fragliche Zerlegung, die zwar allerdings stets möglich ist, hat nur dann einen bestimmten Sinn, wenn man noch einige Feststellungen macht, von denen in den Schriften der Anatomen meines Wissens nirgend zu lesen ist und die sich keineswegs von selbst verstehen. Man kann diese Feststellungen im Gegentheil willkürlich mit gleicher Berechtigung ganz verschieden machen. Um die Sache der Anschauung näher zu bringen, wollen wir uns bestimmt an das Beispiel des linken Hüftgelenkes halten. Wir wollen uns als Anfangslage desselben diejenige denken, welche es beim aufrecht stehenden Menschen hat, und nun die drei vorhin definirten Hauptaxen hineinlegen. Bis hierher sind nun alle Vorstellungen vollständig bestimmt. Jetzt bringen wir auf irgend einem Wege bei feststehendem Becken das linke (gestreckte) Bein in eine zweite Lage, beispielsweise in eine solche, bei welcher der Fuss nach vorn und aussen gehoben ist und bei welcher zugleich die Fussspitze einwärts weist und zwar haben wir uns eine ganz bestimmte derartige Lage vorzustellen. Diese Lage mag entstanden sein wie sie wolle, stets können wir allerdings das Bein aus seiner Anfangslage in dieselbe Lage bringen durch drei auf einander folgende Drehungen um

[1]) Wenn ich nicht irre, ist mir in anatomischen Abhandlungen sogar schon die Meinung aufgestossen, diese Zerlegung einer Drehung in „Componenten“ bezüglich zu jenen drei Hauptaxen habe etwas mit der Zerlegung von Kräften nach dem Gesetze des Parallelogramms der Kräfte gemein. Dass diese Meinung auf einem vollkommenen Missverständniss beruht, bedarf wohl keines Beweises.

die drei Hauptaxen, d. h. nach anatomischer Bezeichnungweise durch auf einander folgende Flexion, Abduction und Rotation. Wenn aber nichts weiter als bisher verabredet worden, so kann man nicht angeben, wie viel Grad Abduction, Flexion und Rotation nöthig wären, um die gedachte Stellung des Beines hervorzubringen. In der That, wenn man auch drei Winkel für die drei Drehungen festsetzte, so käme man dennoch zu ganz verschiedenen Stellungen des Beines, je nachdem man die drei Axen als bestimmte Linien im absoluten Raume, d. h. im Becken oder als bestimmte Linien im Bein dächte und je nachdem man die drei Drehungen in der einen oder anderen Reihenfolge ausführte. Ueber diese beiden Fragen muss also durch eine Verabredung entschieden werden, wenn die Zusammensetzung jeder beliebigen Drehung aus Flexion (bezüglich Extension), Abduction (bezüglich Adduction) und Rotation einen bestimmten Sinn haben soll.

Es wäre nun unsere Aufgabe, eine solche Verabredung zu treffen und zwar dergestalt, dass sie die allfällige unbewusste Meinung der Anatomen ausdrückte. Es ist übrigens eine solche bezüglich aller Fragepunkte kaum aus den anatomischen Schriften herauszudeuten. Nur ein Punkt scheint unzweifelhaft: die Rotationsaxe ist im Schenkel fest zu denken und zwar ist ein- für allemal die Mittellinie des Oberschenkels darunter zu verstehen. In der That dürften alle Anatomen unter Rotation des flectirten Schenkels eine Drehung desselben verstehen um die neue schräge Lage seiner Längsmittellinie, nicht aber eine Drehung um eine im absoluten Raume lothrechte Linie, welche Drehung den flectirten Oberschenkel in einer Kegelfläche herumführen würde. Was die übrigen Punkte betrifft, so ist darüber eine bestimmte Verständigung unter den Anatomen zu gewärtigen. Hier mag es genügen, die Nothwendigkeit einer solchen dargethan zu haben, wofern überall die Zerlegung der Bewegungen in Flexion (Extension), Abduction (Adduction), Rotation einen bestimmten Sinn haben soll.

Es giebt noch eine andere Art, jede beliebige Lage eines arthrodisch beweglichen Gliedes in Beziehung auf eine bestimmte Ausgangsstellung zu bezeichnen. Man wählt eine im beweglichen Gliede feste Linie, welche durch den Drehpunkt geht, für das Bein z. B. die Längsmittellinie des Oberschenkels. Jede Lage des Beines lässt sich nun hervorbringen durch zwei auf einander folgende Drehungen, die erste derselben geschieht um eine zur Anfangslage der Längsmittellinie senkrechte Axe. Durch eine solche Drehung kann offenbar der Längsmittellinie jede beliebige Lage im Raume ertheilt werden. Nun muss aber dem Beine durch eine Drehung um die Längsmittellinie in ihrer neuen Lage noch die verlangte Orientirung um dieselbe gegeben werden.

Um irgend eine Stellung des Beines nach diesem Principe vollständig zu bestimmen, wären folgende Data nöthig: 1) Die Richtung der zur Anfangslage der Längsmittellinie senkrechten Axe. Wählen wir als Anfangslage der Mittellinie die lothrechte, so muss die fragliche Axe

im Horizont des Drehpunktes liegen und ihre Richtung wird also durch einen Winkel bestimmt; 2) der Winkel, welcher bei der Drehung um die unter 1) definirte Axe durchlaufen wird; 3) der Winkel, welcher dann noch beschrieben wird bei der Drehung um die neue Lage der Längsmittellinie. Man sieht, dass hier wie bei jeder anderen vollständigen Bestimmung der Lage eines um einen Punkt drehbaren Körpers drei Winkel nöthig sind und genügen.

Die soeben entwickelte Bestimmung der Stellung ist natürlich auf jedes arthrodisch bewegliche Glied anwendbar, man hat sie bisher vorzugsweise bei den Bewegungen des Auges angewandt. Bei den wirklich vorkommenden Stellungen des Auges ist merkwürdigerweise die zweite Drehung allemal gleich Null, wenn man die Sehaxe zur festen Linie macht und eine geeignete Wahl der Ausgangsstellung trifft.

Viertes Capitel.

Muskelstatik.

Nachdem für irgend ein Gelenk der mögliche Bewegungsmodus in der im vorhergehenden Capitel dargelegten Weise festgestellt worden ist, kann eine neue Untersuchung beginnen, die Untersuchung, wie die möglichen Bewegungen durch die an dem Gelenke angebrachten Muskeln verwirklicht werden. Es kann gefragt werden: 1) Wenn einer von diesen Muskeln sich contrahirt, welche von den möglichen Bewegungen erfolgt? 2) Wenn mehrere sich gleichzeitig in gegebener Weise contrahiren, welche Bewegung erfolgt? 3) Wenn eine bestimmte Bewegung erfolgen soll, welche Muskeln müssen sich contrahiren, und wie? Die so gestellten Fragen schliessen freilich eine so gut wie unentwirrbare Verwickelung in sich, denn wenn man eine ganze Bewegung von endlicher Ausdehnung übersehen wollte, so müsste man den Veränderungen Rechnung tragen, welche sich in der Wirkungsweise jedes einzelnen Muskels jeden Augenblick ereignen, wegen der eben durch den Verlauf der Bewegung hervorgebrachten Lagenveränderung desselben. Man hat sich bisher damit begnügt, bloss statische Fragen zu stellen, was übrigens auch den praktischen Bedürfnissen fürs erste genügt.

Da, wie im vorigen Capitel gezeigt wurde, alle Bewegungen der Gelenke auf Drehungen hinauskommen, so reduciren sich die hier zu stellenden Fragen auf folgende, entsprechend den drei obigen: 1) Wenn ein Muskel ein bestimmtes Contractionsbestreben (Spannung) hat, welches Drehungsbestreben wird dadurch in dem Gelenke hervorgebracht? oder: wo und welche Kraft muss an dem Knochen angebracht werden,

um mittelst des Gelenkes der Spannung des Muskels Gleichgewicht zu halten? 2) Wenn mehreren Muskeln gleichzeitig gewisse Spannungen beigelegt werden, welches Drehungsbestreben ist dann im Gelenke? oder: wie kann durch ein anderes Drehungsbestreben (durch eine fremde Kraft hervorgebracht) den Spannungen mittelst des Gelenkes Gleichgewicht gehalten werden? 3) Umgekehrt, wenn ein bestimmtes Drehungsbestreben in einem Gelenke hervorgebracht werden soll, welche Muskeln müssen gespannt werden, und wie stark? oder: wenn eine gegebene Kraft auf ein Gelenk wirkt, wie muss man die Muskeln spannen, um der Kraft Gleichgewicht zu halten? Um das Letztere durch ein Beispiel zu erläutern, denke man sich den Arm unter einem gewissen Winkel nach vorn erhoben und durch ein Gewicht beschwert und frage sich, welche Muskeln und wie stark müssen sie gespannt sein, um den beschwerten Arm in seiner Lage, d. h. dem Gewichte Gleichgewicht zu halten.

Bei den hierher gehörigen Untersuchungen macht man in der Regel noch einige Voraussetzungen, die nicht frei von aller Willkürlichkeit sind. Einen Muskel im üblichen anatomischen Sinne lässt man auch als eine mechanische Einheit gelten und spricht von seiner Spannung so, als ob nothwendig alle seine einzelnen Elemente unter allen Umständen eine gleiche Spannung besitzen müssten. Man erlaubt sich wohl ferner noch, alle Fasern eines Muskels in ihrer Verlängerung nach einem Punkte convergirend anzusehen (der Fall des Parallelismus ist hierunter mitbegriffen — Convergenz in unendlicher Ferne). Unter diesen beiden Voraussetzungen findet sich nun in jedem Muskel eine mittlere gerade Linie, welche die Richtung seines Gesammtzuges darstellt. Diese Linie verändert natürlich ihre Lage zum Gelenke sowohl als auch im Muskel mit jeder Veränderung in der Stellung des Gelenkes. Diese Linie findet sich nach den Regeln der Zusammensetzung paralleler Kräfte oder solcher Kräfte, die an einem Punkte (dem Convergenzpunkte) angebracht sind — Parallelogramm der Kräfte; denn diese Linie ist nichts Anderes, als die Resultante der Spannungen aller Fasern des Muskels. Sind diese unter einander immer gleich, so hängt die Richtung der Resultirenden von ihrer absoluten Grösse nicht mehr ab. In der Regel wird man sich zur Bestimmung dieser Linie angenäherter Methoden bedienen, und es braucht daher auf eine weitere Ausführung der strengen Art ihrer Bestimmung hier nicht eingegangen zu werden. Wenn nämlich die Muskeln geradezu in strangförmige Sehnen auslaufen, so ist natürlich die Verbindungslinie des Ursprunges und Ansatzes, die in diesem Falle als Punkte anzusehen sind, die Richtung der Resultirenden. In den übrigen Fällen ist doch wenigstens meist der Muskel vorherrschend flächenartig ausgebreitet oder kann in mehrere trapezförmige Stücke zerlegt werden; wenn man dann von einem solchen Stücke die beiden äussersten Fasern bis zur Convergenz verlängert und den Winkel halbirt, so hat man annäherungsweise die Richtung der Resultirenden. Was endlich noch die Grösse der resultirenden Gesammtspannung, die in der eben definirten Linie wirk-

sam zu denken ist, betrifft, so ist sie, wenn alle Fasern der Richtung der Resultirenden parallel liegen, geradezu die Summe der einzelnen Faserspannungen, also dem Querschnitte (der Anzahl der Fasern) direct proportional, d. h. gleich dem Producte aus dem Querschnitte und einem rein physiologischen Factor, der von der Stärke der Innervation abhängt. Auch in den meisten, streng genommen, hiervon ausgeschlossenen Fällen weichen die Fasern vom Parallelismus wenigstens nicht so sehr ab, dass es nicht angenähert richtig sein sollte, die Resultirende an Grösse dem Querschnitte proportional zu setzen; nur muss der Querschnitt so angelegt sein, dass er alle Fasern unter möglichst rechten Winkeln trifft. Man kann also im Allgemeinen wohl ohne grossen Fehler annehmen: zwei Muskeln ziehen gleich stark innervirt und gleich stark gedehnt in der Richtung ihrer Resultirenden, mit Kräften, die sich wie ihre Querschnitte verhalten. Sind die verschiedenen Fasern eines Muskels ungleich lang, so tritt sofort wieder eine neue Complication hinzu, die sich im Einzelnen nicht mehr übersehen lässt. Es können dann nämlich in einem gewissen Verkürzungsstadium die kürzeren Fasern schon das Minimum ihrer Länge erreicht haben und weiterer Spannung unfähig sein, so dass dann die verschiedenen Theile des Querschnittes nicht mehr als gleichwerthig in Rechnung gezogen werden können.

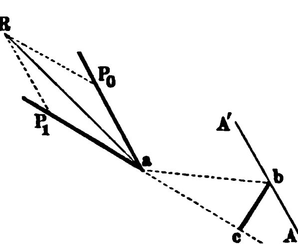
Hierdurch ist nun ein Knochen mit den gesammten darauf wirkenden Muskeln zurückgebracht auf ein System unveränderlich mit einander verbundener Punkte (der Muskelansatzpunkte), an welchen nur in bestimmten Richtungen, nämlich den definirten Resultirenden der einzelnen Muskeln, Kräfte wirkend gedacht werden können, über deren Grösse allein noch verfügt werden darf. Ueber den Sinn, in welchem die Richtung der Kraft zu nehmen sei, kann kein Zweifel sein, da der Muskel immer vom Ansatz nach dem Ursprung zieht, niemals vom Ursprung nach dem Ansatz, wo unter Ansatz die Befestigung des Muskels an dem für die jedesmalige Betrachtung beweglich gedachten Knochen zu verstehen ist. Das System fest verbundener Punkte ist ferner nicht vollkommen frei beweglich zu denken, sondern seine Bewegungen sind noch irgend einer durch die specielle Gelenkverbindung gesetzten geometrischen Bedingung unterworfen, wie wir im vorigen Capitel sahen, welche die Gleichgewichtsbedingungen darauf wirkender Kräfte wesentlich modificirt. Wir behandeln im Folgenden die beiden wichtigsten Fälle noch etwas eingehender; nämlich 1) ein System von Muskeln, das auf einen Ginglymus wirkt, und 2) ein System von Muskeln, das auf eine Arthrodie wirkt — hier sind die Muskeln des Augapfels mit einbegriffen.

Die geometrische Bedingung, welche ein Ginglymusgelenk (sogenanntes Rotationsgelenk u. s. w.) in unser System von Punkten einführt, ist: alle Bewegungen können nur Drehungen um eine gerade Linie, die Axe des Gelenkes, sein, die mit den Punkten in einer bestimmten unveränderlichen Verbindung steht. Es wird dadurch möglich, alle hier auftretenden Fragen einfach nach den Gesetzen des Hebels zu beurtheilen, wie

dies auch bereits von jeher geschehen ist. Wir wollen in dieser Weise unsere drei oben aufgestellten allgemeinen Fragen beantworten.

1) Die Contractionsbestreben aller auf einen Ginglymus wirkenden Muskeln sind bekannt, welches ist das totale hervorgebrachte Drehungsbestreben; oder durch eine wie angebrachte und wie grosse Kraft kann den gesammten gleichzeitigen Spannungen der Muskeln Gleichgewicht gehalten werden? In dieser Frage ist die erste oben aufgestellte als specieller Fall enthalten insofern, als man nur die Contractionsbestreben aller Muskeln ausser eines gleich Null zu setzen braucht. Die Richtung des gesuchten Drehungsbestrebens ist von vornherein bekannt; es kann nämlich nur um die Axe des Gelenkes stattfinden. Gefragt wird also nur noch nach dem Sinne — ob nach rechts oder links (ob Extension oder Flexion; ob Pronation oder Supination u. s. w.) — und nach der Intensität. Wir nehmen an, für die vorausgesetzte Stellung des Gelenkes seien, nach irgend einer Methode, die Richtungen der Resultirenden für die einzelnen Muskeln bereits ermittelt, und es wären von den Angriffspunkten aus auf denselben Längen abgetragen, die an Grösse die resultirenden Spannungen repräsentiren. Man kann dann mit diesen offenbar nach den Regeln der Statik als mit lineär dargestellten Kräften operiren. Es ist vor Allem zu beachten, dass alle der Axe des Gelenkes parallelen Componenten dieser Kräfte für das hervorgebrachte Drehungsbestreben unwirksam sind, da sie eine Verschiebung längs der Axe zu bewirken streben, welche durch die Einrichtung des Gelenkes ausgeschlossen ist. Das erste Geschäft in unserem Falle wird also darin bestehen, dass man jede der gegebenen Kräfte, nach dem Parallelogramm der Kräfte, in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine der Axe parallel ist, die andere in einer zur Axe senkrechten Ebene (die man allemal durch den Angriffspunkt legen kann) enthalten ist. Sei z. B. aR, Fig. 23, eine der gegebenen Kräfte. Man legt durch ihren Angriffspunkt a eine zur Gelenkaxe AA' senkrechte Ebene, welche die Ebene der Zeichnung sein mag (so dass also aR sowie AA' nicht in der Ebene des Papiers zu denken ist) und welche die Axe in b schneidet. Man zerlegt nun aR in die beiden zu einander senkrechten Componenten aP_0 und aP_1, so dass aP_0 der Axe AA parallel, aP_1 aber in der zu ihr senkrechten Ebene (des Papiers) enthalten ist. Nur diese letzteren Componenten bedürfen einer weiteren Behandlung. Man fällt nämlich jetzt von der Axe — und zwar bei dem in der Figur gedachten Muskel vom Punkte b der Axe — aus auf die Richtung einer solchen Componente, im Beispiel also auf die Richtung aP_1, ein Perpendikel bc, dessen Länge den Hebelarm dieser Kraft bildet. Bekanntlich ist nun das Product aus

Fig. 23.



Kraft und Hebelarm ($a P_1 \times b c$) das Moment oder das Drehungsbestreben, welches die Kraft hervorbringt. Hat man diese Producte für sämmtliche gegebene Kräfte berechnet, so bildet man aus allen in dem einen Sinne wirkenden eine Summe, sowie aus allen im entgegengesetzten Sinne wirkenden ebenfalls. Die Differenz beider Summen ist die Grösse des gesuchten, durch die gegebenen Muskelspannungen zusammen hervorgebrachten Drehungsbestrebens; sein Sinn stimmt mit dem der grösseren von beiden Summen überein. Sind ursprünglich die Muskelspannungen in Kilogrammen, die Länge der Hebelarme in Metern ausgedrückt gewesen, so muss man als Einheit des Drehungsbestrebens dasjenige, welches 1 kg an einem Hebelarm von 1 m Länge wirkend hervorbringt annehmen. Hätte man also z. B. den auf das Ellenbogengelenk wirkenden Muskeln bei einer gegebenen Stellung gewisse Spannungen beigelegt und nach dem auseinandergesetzten Verfahren ein flectirendes Moment = 0,5 herausgerechnet, so wäre dies zu deuten, dass man, um Gleichgewicht herzustellen, in 1 m von der Gelenkaxe eine Kraft von 0,5 kg oder, was denselben Erfolg hervorbrächte, in ein Decimeter Entfernung 5 kg so anbringen müsste, dass sie senkrecht am Vorderarm extendirend zöge.

2) Ein Drehungsmoment von gegebener Grösse und bestimmtem Sinne soll am Ginglymus hervorgebracht werden; wie gross müssen die Muskelspannungen sein? Es hält z. B. Einer in der horizontal ausgestreckten Hand ein Gewicht von 2 kg, wie muss er die Flexoren des Vorderarms spannen, damit die Hand nicht sinkt? Man sieht auf den ersten Blick, dass das so gestellte Problem nicht mehr bestimmt ist. Man kann offenbar unendlich viele Combinationen von Muskelspannungen erdenken, welche alle das verlangte Drehungsmoment hervorbringen. Man kann erst durch eine neue, der Aufgabe an sich fremde, Bedingung die Bestimmtheit herbeiführen. Man kann z. B. noch fordern, dass das verlangte Drehungsmoment mit möglichst geringer absoluter Gesammtspannung hervorgebracht werde, oder man kann verlangen, es soll durch einen Muskel geleistet werden, nur darf natürlich dieser kein Extensor sein, wenn das verlangte Moment ein flectirendes ist und umgekehrt. Man hat bei letzterer Bedingung nur wieder den Hebelarm $b c$ für den betreffenden Muskel zu berechnen (der bloss von der Richtung seiner Resultante abhängt) und dadurch das verlangte Moment zu dividiren; der Quotient wäre die Grösse der drehenden Componente P_1, woraus die Spannung R selbst noch gefunden werden kann, die ihm beizulegen ist, damit seine drehende Componente $= P_1$ und folglich sein Moment gleich dem geforderten wäre.

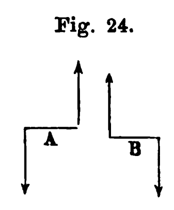
Für eine Arthrodie reicht man nun mit dem speciellen Hebel nicht mehr aus [1]; man muss vielmehr zu den allgemeineren Gesetzen der Sta-

[1] A. Fick, Ueber die Bewegungen des menschlichen Augapfels. Zeitschr. f. rat. Med. Neue Folge, 4, 101.

tik zurückgehen. Da in den gangbaren physikalischen Lehrbüchern diese nicht hinlänglich aus einander gesetzt sind, so mag das Nothwendige davon hier Platz finden. Wir haben es bei einer Arthrodie nach den bereits vorausgesetzten Reductionen zu thun mit einem System unveränderlich verbundener Punkte, an denen in gegebenen Richtungen Kräfte angebracht sind. Mit dem Systeme ist dann noch ein Punkt in unveränderlicher Verbindung, der seine Lage im Raume beizubehalten gezwungen ist, nämlich der Drehpunkt des Gelenkes. Ein solches System behandelt man folgendermaassen. Im Drehpunkte denkt man sich zunächst neue Kräfte angebracht in der Weise, dass für jede gegebene Kraft des Systems am Drehpunkte zwei mit derselben an Grösse gleiche und parallele zu denken sind, von denen die eine der gegebenen gleich, die andere entgegengesetzt gerichtet ist. Diese Einführung neuer Kräfte ist offenbar erlaubt, da dieselben nichts an der mechanischen Natur der Sache ändern, sich vielmehr unter einander paarweise vernichten. Die den gegebenen Kräften gleich gerichteten vereinigt man ferner nach der Regel des Parallelogramms zu einer Resultante der sogenannten Hauptkraft. Sie strebt — im Drehpunkte angebracht — dessen Lage zu verändern, wird also durch die Einrichtung des Gelenkes unwirksam gemacht, oder anschaulicher, da ihre Richtung durch den Drehpunkt geht, ist sie zu den kugelförmigen Gelenkflächen normal und drückt dieselben gegen einander oder sucht sie von einander loszureissen, was beides unmöglich ist. Eine Drehung kann die Hauptkraft nicht bewirken, sie kann also aus der ferneren Betrachtung weggelassen werden. Es bleiben somit nur noch ebenso viele „Kräftepaare“ übrig, als ursprünglich Kräfte in dem Systeme gegeben waren. Jedes derselben besteht nämlich aus einer der gegebenen Kräfte und der gleich grossen parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft, die dafür am Drehpunkte angebracht worden war. Unter einem Kräftepaare versteht man nämlich die Zusammenstellung zweier gleich grosser paralleler, entgegengesetzt gerichteter Kräfte. Ein solches hat keine Resultante im Sinne der Statik, d. h. strebt keine Ortsveränderung des Körpers, an dem es wirkt, hervorzubringen, sondern bloss eine Drehung um irgend eine zur Ebene des Paares (d. h. zu der Ebene, welche die beiden parallelen Kraftrichtungen enthält) senkrechte Axe; und zwar ist die Grösse des hervorgebrachten Drehungsbestrebens für jede beliebige Lage der Axe gleich dem Producte einer Kraft des Paares, multiplicirt mit dem Abstande beider von einander — dem Hebelarme des Paares —; diese Grösse nennt man „das Moment des Paares“. Die Wirkung eines Paares ist also vollständig bestimmt, wenn man die Richtung seiner Axe und sein Moment kennt. Man muss nur noch bedenken, dass in jeder geraden Linie zwei Richtungen enthalten sind, z. B. in einer verticalen die Richtung von oben nach unten und von unten nach oben. Um dem Doppelsinne zu entgehen, wollen wir nach der bereits oben (S. 71) getroffenen Uebereinkunft in allen ferneren Betrachtungen die Halbaxen der Drehungen

einführen. Wir errichten auf der Ebene des Paares ein Perpendikel nach der Seite hin, dass ein in demselben stehender, mit den Füssen gegen die Ebene des Paares gestützter, Beobachter die hervorgebrachte Drehung so vor sich gehen sieht, wie die Drehung eines Uhrzeigers, wenn er das Zifferblatt ansieht. Die Richtung des Perpendikels, von der Ebene an gerechnet, heisst dann die Richtung der Axe oder der Halbaxe des Paares. Wären also z. B. *A* und *B*, Fig. 24, zwei Paare in der Ebene des Papiers und deuteten die Pfeilspitzen die Richtungen der Kräfte an, so wäre die Axe für *A* das nach u n t e n, die Axe für *B* das nach o b e n errichtete Perpendikel auf der Ebene des Papiers. In unserem Falle müssen wir noch die Axen sämmtlicher Paare von dem Drehpunkte des Gelenkes ausgehen lassen, da nur um eine durch diesen gehende Axe eine Drehung überhaupt möglich ist.

Fig. 24.

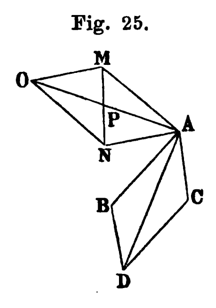


Die Axen sind also hier geradezu die im Drehpunkte auf den Ebenen der einzelnen Paare nach der festgestellten Regel errichteten Perpendikel. Die Momente derselben finden sich (nach der Definition dieser Grössen), wenn man vom Drehpunkte auf die Richtungen der einzelnen Kräfte Senkrechte fällt und deren Längen mit den Kräften selbst multiplicirt.

Ueber Paare, deren Axen von einem Punkte ausgehen, gilt folgender Satz: Trägt man vom gemeinschaftlichen Anfangspunkte auf jeder Axe eine Länge ab, welche die Grösse des zugehörigen Momentes darstellt, so kann mit diesen begrenzten Linien verfahren werden wie mit lineär dargestellten Kräften, d. h. sie können nach der Regel des Parallelogramms zusammengesetzt werden. Man kommt also schliesslich zu einer begrenzten Linie, deren Richtung die Axe, deren Grösse das Moment eines Paares darstellt, dessen Wirkung vollkommen äquivalent ist dem Zusammenwirken der sämmtlichen gegebenen Paare, das ihnen allen folglich substituirt werden kann; wir wollen es das „r e s u l t i r e n d e P a a r" nennen. Der Beweis braucht nur für zwei Paare geführt zu werden, da mit dem resultirenden von zweien das dritte u. s. f. nach derselben Regel zusammengesetzt werden darf, sobald die Zulässigkeit der Zusammensetzung von zweien erwiesen worden ist, was so geschieht: Seien *AB* und *AC*, Fig. 25 (a. f. S.), die Axen der beiden Paare und die Längen dieser Linien stellen die Grössen ihrer Momente dar. Die Ebene des Paares *AB* steht senkrecht auf dieser Linie und schneidet die Ebene *BAC* in der Linie *AM*, die wir $= AB$ machen wollen; sehen wir diese als Hebelarm des Paares an, so kann man das Paar selbst herstellen, indem man in *M* eine der Einheit gleiche aufwärts gerichtete und in *A* eine ebenfalls der Einheit gleiche abwärts gerichtete Kraft anbringt. In derselben Weise stellen wir das andere Paar her, indem wir in *N* eine der Einheit gleiche aufwärts gerichtete, in *A* wieder eine ebenso grosse abwärts gerichtete Kraft anbringen, wenn $AN = AC$ und in der Ebene *BAC* senkrecht auf *AC* ist. Wir haben also jetzt im Ganzen drei

Kräfte; eine an A abwärts wirkende $= 2$ (die Summe der beiden daselbst angebrachten, der Einheit gleichen), eine $= 1$ an M und eine $= 1$ an N aufwärts wirkend; die beiden letzteren lassen sich zu einer Resultirenden vereinigen, welche $= 2$ ist und am Punkte P in der Mitte zwischen M und N aufwärts gerichtet angebracht ist. Diese bildet aber mit der an A abwärts wirkenden Kraft 2 ein neues Paar, dessen Wirkung dem Zusammenwirken der beiden gegebenen äquivalent sein muss. Das Moment dieses Paares ist nach der oben aufgestellten Regel[1] $2 . PA = OA$ gleich der Diagonale des Parallelogramms $AMON$ oder des congruenten $ABDC$, die Ebene des Paares steht in der Linie AO senkrecht auf der Ebene des Papiers; seine Axe ist also ein in A auf der Ebene des Paares errichtetes Perpendikel, d. h. die Linie AD selbst (wofür der geometrische Beweis wohl nicht ausgeführt zu werden braucht). Das resultirende Paar ist also bestimmt nach Drehungsrichtung und Grösse des Momentes durch die Diagonale eines Parallelogramms, dessen anliegende Seiten die Axen der componirenden Paare sind, wenn man dieselben so lang als ihre Momente macht, was zu beweisen war. Ebenso, wie man nach diesem Satze Paare zu einem resultirenden zusammensetzen kann, kann man natürlich auch ein Paar zerlegen, d. h. mehrere Paare angeben, die, wenn sie zusammenwirken, ein Drehungsbestreben hervorbringen, das nach Richtung und Grösse mit dem gegebenen zusammenfällt.

Fig. 25.



Mit Hülfe dieses Satzes sind nun die drei allgemeinen Fragen am arthrodischen Gelenke augenblicklich zu beantworten. 1) Für einen gespannten Muskel das Drehungsbestreben zu bestimmen, heisst nichts Anderes, als sein Moment berechnen. (Wir wollen fernerhin schlechtweg Moment des Muskels das Moment desjenigen Kräftepaares nennen, das der Wirkung des Muskels äquivalent ist.) Man fällt nämlich vom Drehpunkte auf die Richtung der Resultante des Muskels ein Perpendikel, das den Hebelarm des Paares darstellt, und multiplicirt mit seiner Länge die Grösse der Spannung. Das Product ist das gesuchte Moment, dessen Axe sich findet, wenn man auf die Ebene, welche die Resultante des Muskels und den Drehpunkt enthält, in letzterem ein Perpendikel nach der übereingekommenen Seite errichtet. 2) Haben mehrere Muskeln gleichzeitig gegebene Spannungen, so berechnet man, wie eben, die Momente, trägt sie als Längen auf den entsprechenden Axen ab und bestimmt nach der bewiesenen Regel das resultirende Moment. Hätte sich z. B. für eine bestimmte Combination im linken Oberschenkel seine Grösse $= 12$ herausgestellt, und hätte sich die Axe desselben als gerade von hinten nach vorn gerichtet gefunden (es wäre alsdann für den linken

[1] Moment = Kraft × Hebelarm.

Oberschenkel ein adducirendes), so hiesse das, unter Beibehaltung der früher gewählten Einheiten, man müsste in einer von rechts nach links durch den Drehpunkt gehenden Verticalebene (die auf der Axe des resultirenden Paares senkrecht stände, also die Ebene desselben sein müsste), irgendwo 1 m vom Drehpunkte entfernt, die Kraft 12 kg [1]) im abducirenden Sinne anbringen, um den vorausgesetzten Muskelspannungen Gleichgewicht zu halten. Es braucht wohl kaum besonders darauf aufmerksam gemacht zu werden, dass in unserem Falle mit dem festen Drehpunkte die eine Kraft dasselbe leistet, wie ein Paar aus zwei solchen Kräften mit dem Momente 12, da man ja eben am festen Punkte sofort noch eine gleiche parallele und entgegengesetzt wirkende Kraft angebracht denken darf, ohne das Gleichgewicht zu stören.

3) Es sei gegeben eine durch den Drehpunkt eines arthrodischen Gelenkes irgendwie gezogene Linie, um welche als Axe ein Drehungsbestreben von gegebener Intensität hervorgebracht werden soll. Es wird gefragt, welche Spannungen müssen den einzelnen auf das betreffende Gelenk wirkenden Muskeln beigelegt werden, damit das gedachte Drehungsbestreben um die gegebene Axe wirklich vorhanden sei. Man sieht leicht, dass, wenn die Anzahl der Muskeln, folglich die der verfügbaren Spannungen, eine gewisse Grenze überschreitet, das Problem nicht mehr zu den bestimmten gehört, d. h. dass man verschiedene Zusammenstellungen der Muskelspannungen wird auswählen können, deren jede den gewünschten Erfolg hervorbringt. Soll dieses Problem besser übersehen werden, so ist es gut, mit den einzelnen Grössen — mit den Momenten der einzelnen Muskeln — noch einige Umformungen vorzunehmen. Das Moment jedes einzelnen Muskels ist hier, da seine Spannung erst gefunden werden soll, an Grösse noch nicht bekannt; nur seine Axe und die Länge des Hebelarmes ist bekannt, da ja die Richtung der Resultante eines Muskels unabhängig von der Grösse der Spannung desselben ist. Das Moment jedes Muskels tritt also hier auf als Product einer unbekannten Grösse, nämlich seiner zu bestimmenden Spannung (die mit x, y etc. in üblicher Weise bezeichnet werden mag) und eines bekannten Factors der Länge des Hebelarmes (mit r bezeichnet). Es wird alsdann zerlegt in drei Componenten nach drei auf einander senkrechten Richtungen. Diese Zerlegung ist auch trotz des einen unbekannten Factors immer möglich, da die Richtung des zu zerlegenden Momentes (seine Axe) bekannt ist. Die Zerlegung besteht nämlich einfach darin, dass man das unter der Form $x . r$ auftretende Moment, multiplicirt mit den Cosinus der drei Winkel, welche seine Axe mit den drei gewählten, auf einander senkrechten Richtungen bildet; denn die drei anliegenden Seiten eines rechtwinkeligen Parallelepipedons verhalten sich zu seiner Diagonale wie die Cosinus der Winkel, die diese mit den Seiten macht, sich verhalten zu 1. Heissen also die Winkel α, β, γ, so sind die drei

[1]) Oder die Kraft 24 kg in 0,5 m Entfernung u. s. w.

Componenten $x.r\ cos\,\alpha$; $x.r\ cos\,\beta$; $x.r\ cos\,\gamma$. Jede Componente behält den unbekannten Factor bei. Ist diese Zerlegung für alle einzelnen Muskeln ausgeführt, so kann man die nach jeder der drei Richtungen wirkenden Componenten zu einer Summe vereinigen, die ein noch zu bestimmendes Moment um diese Richtung als Axe bedeuten. Diese drei Summen, in deren Bildung die zu bestimmenden Unbekannten, deren Zahl mit der der verfügbaren Muskeln übereinstimmt, seien der Reihe nach durch L, M, N bezeichnet. Man zerlegt das vorgegebene Moment ebenfalls in drei Componenten nach denselben Richtungen und erhält natürlich drei vollständig bestimmte Grössen, die durch P, Q, R in derselben Reihenfolge bezeichnet werden mögen. Die Lösung des Problems besteht darin, über die in die Bildung der Grössen L, M, N eingehenden unbekannten Factoren so zu disponiren, dass diese Grössen, einzeln genommen, den Grössen P, Q, R gleich werden. Die Lösung hängt also ab von der Lösung der drei Gleichungen $L = P$, $M = Q$, $N = R$. Denn wenn diesen genügt ist, so sind in der That die drei rechtwinkeligen Componenten des, vermöge der Muskelspannungen, wirklich vorhandenen Drehungsbestrebens gleich den nach denselben Richtungen wirkenden Componenten des geforderten, oder, was dasselbe ist, wenn man die drei Momente L, M, N zu einem einzigen zusammensetzte, so würde dies, in Beziehung auf seine Grösse und die Lage seiner Axe, mit dem Geforderten übereinkommen. Die Grössen L, M, N sind aber Summen von der Form $x.a + y.a_1 + z.a_2 + \ldots$; $xb + yb_1 + zb_2 + \ldots$; $x.c + yc_1 + c'$ etc., wo die Coëfficienten a, $a_1 \ldots b$, $b_1 \ldots c$, c_1 etc. bloss von der anatomischen Lage und Beschaffenheit der Muskeln abhängen. Die Grössen a sind nämlich, wie wir sahen, Producte aus einem Hebelarme r und einem $cos\,\alpha$ eines Winkels mit der ersten Richtung, die Grössen b Producte eines r und eines $cos\,\beta$ von einem Winkel mit der zweiten Richtung, und die Grössen c bestehen aus einem r und einem $cos\,\gamma$, der sich auf die dritte der gewählten auf einander senkrechten Richtungen bezieht. x, y, z . . . sind die gesuchten Spannungen der Muskeln. Man hat also zwischen diesen Grössen, deren Zahl beliebig gross sein kann, nur drei Gleichungen, und das Problem gehört daher, wie oben schon angedeutet wurde, zu den unbestimmten. Einer Einschränkung sind zwar die Unbekannten zu unterwerfen; sie müssen nämlich der Natur der Sache nach positive Werthe haben, da ein negativer Werth einer Muskelspannung nach den getroffenen Verabredungen so gedeutet werden müsste, dass die Wirkung der Kraft vom Ursprunge des Muskels nach dem Ansatze gerichtet wäre, während sie doch immer die entgegengesetzte Richtung hat, wenn man unter Ansatz, wie dies gewöhnlich geschieht, die Anheftung an dem für die betreffende Betrachtung als beweglich angesehenen Theile versteht. Unter dieser einschränkenden Annahme, dass man nur unter den positiven Grössen die Werthe x, y etc. zu wählen hat, zeigt sich die Lösung des Problems in speciellen Fällen sehr häufig als unmöglich, selbst wenn

die Zahl der zu wählenden Werthe 3 übersteigt, wenn also das Problem unendlich viele Lösungen haben würde, sobald die Verfügung uneingeschränkt wäre. Wenn aber die Lösung für mehr als drei Muskeln überhaupt möglich ist, so ist sie auch allemal unbestimmt; man kann dann nämlich allemal nur drei der bekannten Grössen in algebraischen Ausdrücken darstellen, welche die übrigen Unbekannten noch enthalten. Es lassen sich in solchen Fällen meist nur gewisse Grenzen angeben, zwischen denen die Beziehung einzelner der unbekannten Grössen variiren kann. Es lässt sich beispielsweise angeben, in diesem bestimmten Falle darf die Grösse y nicht kleiner als dreimal so gross als x sein u. dergl. mehr.

Welche physische Bedeutung die Unmöglichkeit der Lösung unseres Problems hat, ist leicht aus folgendem Beispiele zu ersehen. Man nehme an, am Oberschenkel eines Menschen wären alle Muskeln, die irgendwie eine Flexion hervorbringen können, durchschnitten; man würde dann immer noch mehr als drei übrig behalten. Stellte man jetzt die Frage: welche Spannungen müssen diese versetzt werden, dass die Gesammtwirkung in einem Drehungsstreben besteht um eine von rechts nach links horizontal durch den Drehpunkt gelegte Axe, von irgend einer bestimmten Intensität, und zwar derart, dass die Drehung das Knie nach aufwärts brächte; d. h. also anatomisch gesprochen: man soll den Muskeln eine Spannung beilegen, dass der Gesammteffect ein reines Flexionsbestreben von gewisser Stärke wird. Es sieht Jeder sofort, dass dies unmöglich ist, obwohl noch eine Reihe von Muskeln, die in verschiedenen Richtungen wirken, zur Verfügung stehen; so lange wenigstens jeder Muskel in der Richtung vom Ansatze nach dem Ursprunge zieht. Wäre diese Einschränkung nicht vorhanden, könnten die Muskeln auch drücken statt zu ziehen, so würde man auch mittelst der Extensoren den Schenkel flectiren können. Diese Einschränkung wird aber, wie gesagt, algebraisch sich so darstellen, dass den Gleichungen nur durch positive Werthe der Unbekannten Genüge geschehen soll.

Die Aufgabe kann auch bei mehr als drei Muskeln sofort zu einer bestimmten gemacht werden, wenn man eine der Sache an sich fremde Bedingung einführt. Beim wirklichen Gebrauche im Leben macht sich höchst wahrscheinlich eine solche Bedingung ganz von selbst geltend. Man wird nämlich zum Hervorbringen eines bestimmten Drehungsmomentes am arthrodischen Gelenke die Spannungen zwischen den verfügbaren Muskeln so vertheilen, dass das Gefühl der Gesammtanstrengung möglichst klein wird. Da nun das Gefühl der Anstrengung doch irgendwie mit der Spannung der Muskeln zusammenhängen muss, wird nur eine bestimmte Vertheilung der Spannungswerthe der Forderung genügen. Es liegt am nächsten zu vermuthen, dass das Gefühl der Anstrengung der Spannung einfach proportional ist, dann hätte man in den Gleichungen $L = P$, $M = Q$, $N = R$ die unbekannten Grössen x, y, z etc. so zu bestimmen, dass die Summe $x + y + z$ etc. ein Minimum würde. Ich selbst habe diese Vermuthung früher ausgesprochen und zu

numerischen Auswerthungen in einzelnen Fällen benutzt. Es ist aber später von Fuchs[1]) durch äusserst scharfsinnige Betrachtungen nachgewiesen, dass diese Annahme auf Ungereimtheiten führt und dass, wenn man das wohl kaum anfechtbare Princip der kleinsten Anstrengung aufrecht halten will, nothwendig die Annahme gemacht werden muss, „das Gefühl der Anstrengung wachse rascher als die Spannung, der doppelten Spannung entspreche also beispielsweise ein mehr als doppeltes Gefühl der Anstrengung". Wollte man hier auch wieder bei der denkbar einfachsten Annahme stehen bleiben, so hätte man das Gefühl der Anstrengung etwa dem Quadrate der Spannung proportional zu setzen und es träte dann neben die Gleichungen $L = P$, $M = Q$, $N = R$ die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2$ etc. $=$ Minimum.

Es kann offenbar von vornherein gefragt werden, wie viele Muskeln sind überall nothwendig, um an einem Gelenke mit einem blossen Drehpunkte alle mögliche Bewegungen durch irgend welche Combination ihrer Spannungen hervorbringen zu können, und wie müssen sie gelagert sein[2])? Es ist sehr leicht zu sehen, dass vier Muskeln allemal genügen, wenn eine gewisse Einschränkung für ihre Lage gemacht ist. Diese Einschränkung kann auf mehrere Arten ausgesprochen werden. Man denke sich vor Allem die Muskeln ersetzt durch die Halbaxen, um welche jeder, allein wirkend gedacht, eine Drehung hervorbringen würde, derart, dass man auf ihnen nur die gewisse Länge abzutragen brauchte, um das Moment des Muskels für irgend einen gegebenen Fall zu haben. Wenn jetzt die vier Muskeln eine Drehung um jede beliebige Axe durch Zusammenwirken sollen hervorbringen können, so muss die Lage der vier Halbaxen folgender Bedingung unterworfen sein. Wenn man auf jeder Halbaxe eine beliebige Länge abträgt, so hat man vier Punkte im Raume, die als Ecken eines Tetraëders (nicht gerade eines regelmässigen) angesehen werden können; liegt nun der Drehpunkt in diesem Tetraëder, so ist jede Drehung möglich; liegt er ausserhalb desselben, so sind gewisse Axen ausgeschlossen, so kann um gewisse Axen durch keine Combination der Muskeln eine Drehung hervorgebracht werden. Die Bedingung lässt sich auch noch so formuliren: legt man durch zwei der Halbaxen eine unbegrenzte Ebene, so müssen jedesmal die beiden anderen auf entgegengesezten Seiten dieser Ebene liegen; oder auch so: combinirt man die Axen zu drei, so lassen sich vier hohle körperliche Ecken bilden; füllen diese den ganzen Raum aus, so ist jede Drehung möglich, wo nicht, nicht. Der Beweis für diese Behauptung ist durch geometrische Anschauung sehr leicht zu führen, und wird dabei sogleich ersichtlich, welche Axen bei einem Systeme von vier Muskeln ausgeschlossen sind, das die aufgestellte Bedingung nicht erfüllt. Seien die nach der einen

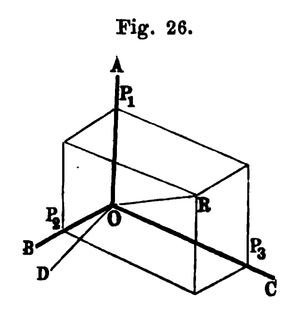
---

1) Pflüger's Archiv, 19, 67.

2) A. Fick, Noch eine Notiz über die Augenmuskeln. Zeitschr. für rat. Med. Neue Folge, 5, 331.

Seite unbegrenzt gedachten Linien OA, OB, OC, OD, Fig. 26, vier Halbaxen, in dem Punkte O anfangend, von der beschriebenen Beschaffenheit. OA ist gerade nach oben gerichtet, OB nach vorn, unten und links, OC nach vorn, unten und rechts, OD nach unten und hinten. Es wäre also beispielsweise der dritte Muskel des Systems so angelegt, dass er, allein wirksam, eine Drehung hervorbrächte, die ein in OC mit den Füssen nach O, mit dem Kopfe nach C hin aufgestellter Beobachter so vor sich gehen sähe, wie die Zeiger einer Uhr sich drehen, deren Zifferblatt er ansieht. Sei nun OR das geforderte Moment, d. h. es sei verlangt, ein Drehungsbestreben zu erzielen um die Linie OR, als Axe von einer Intensität, die durch die Länge OR gemessen wird. Die vier hohlen Ecken (OA, OB, OC), (OA, OB, OD), (OA, OC, OD) und (OB, OC, OD) füllen, der Voraussetzung gemäss (die Anschauung setzt es in unserem Falle ausser allen Zweifel), den ganzen Raum aus. Die Halbaxe OR liegt also, sie mag eine Richtung haben welche sie will, allemal in einer dieser hohlen Ecken, in unserem Beispiele in der Ecke OA, OB, OC. Legt man daher jetzt durch den Punkt R drei Ebenen parallel zu den drei Ebenen (OA, OB), (OB, OC) und (OC, OA), so schneiden diese die Halbaxen OA, OB, OC jedesfalls selbst, nicht ihre Verlängerungen, und begrenzen nebst den genannten drei Ebenen ein Parallelepiped, dessen Kanten in der Figur gezeichnet sind. Der Muskel, der allein wirkend um die Axe OA dreht, kann nun offenbar bei einer gewissen positiven Spannung ein Moment $= P_1$ haben, der zweite ein solches $= P_2$ und der dritte $= P_3$. Ertheilt man aber den drei Muskeln diese Spannungen wirklich, lässt den vierten ruhen, so ist das resultirende Moment OR die Diagonale des Parallelepipedes, dessen Seiten OP_1, OP_2, OP_3 sind. Da aber die Lage und Grösse von OR unter der Voraussetzung, die wir machten, jede beliebige sein konnte, so ist bewiesen, dass das vorausgesetzte System von vier Muskeln jede beliebige Drehung hervorbringen kann. Es braucht jetzt nicht noch bewiesen zu werden, dass ein System von mehr als vier Muskeln sicher allemal den Ansprüchen genügt, sobald sich vier Muskeln darunter befinden, welche die obigen Bedingungen befriedigen.

Fig. 26.



Werfen wir noch einen Blick auf ein System von vier Muskeln, das der Bedingung nicht genügt. Es muss bei einem solchen allemal eine der Halbaxen in der hohlen Ecke liegen, welche die drei anderen bilden; also um so mehr müssen zwei Halbaxen auf derselben Seite der Ebene liegen, die man durch die beiden übrigen legen kann. Seien, Fig. 27 (a. f. S.), die vier analog bezeichneten Linien vier solcher Axen; die Ebene (OB, OC) mag horizontal gedacht sein und die Axen OA und OD liegen beide unter dem Horizonte; insbesondere liege die Halbaxe OA noch

innerhalb der hohlen Ecke (OB, OC, OD). Liegt jetzt die geforderte Momentaxe OR oberhalb der Horizontalebene, so schneiden die Ebenen, mit Hülfe deren das Parallelepiped zu construiren ist, man mag wählen wie man wolle, nicht mehr alle drei gewählte Halbaxen selbst, sondern nothwendig mindestens eine in der Verlängerung. In dem Beispiele der Figur würde die Verlängerung der Halbaxe OA getroffen und das die Resultante OR componirende Moment des ersten Muskels müsste OP_1 sein, das hiesse aber, derselbe müsste eine Drehung hervorbringen, die ein mit den Füssen nach O, mit dem Kopfe nach P_1 gerichteter Beobachter wie die Drehung eines Uhrzeigers sähe, was unmöglich ist, weil der gedachte Muskel um dieselbe Linie in entgegengesetztem Sinne durch seinen Zug dreht. Ganz Aehnliches fände aber statt, wenn die verlangte Halbaxe OR zwar unterhalb der Horizontalebene, aber immer nach ausserhalb der hohlen Ecke (OB, OC, OD) fiele, wovon ein Blick auf die Fig. 28 überzeugen kann. Es ist also die ganze Axengruppe ausgeschlossen, welche ausserhalb der erwähnten hohlen Ecke oder inner-

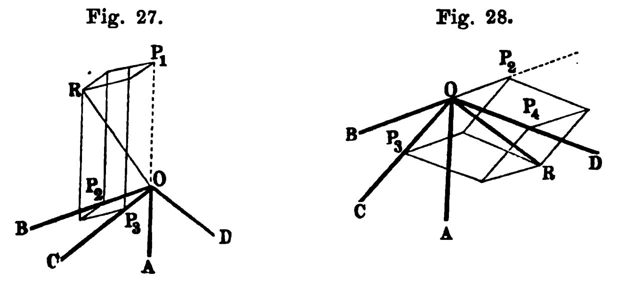


Fig. 27. Fig. 28.

halb der gleichbenannten erhabenen, mehr als den halben Raum betragenden, Ecke liegt. Sind mehr als vier Muskeln vorhanden, die der Grundbedingung nicht genügen, so wird man unter ihren Axen allemal wieder drei heraussuchen können, die sich zu einer alle übrigen einschliessenden hohlen Ecke combiniren lassen; die durch sie gebildete erhabene Ecke umschliesst dann wiederum alle Halbaxen, um welche eine Drehung n i c h t bewirkt werden kann.

Die Resultate unserer bisherigen Betrachtungen können noch in etwas anderer Form dargestellt werden, wo sie sich dann der anatomischen Nomenclatur mehr anschliessen. Durch ein Gelenk mit nur einem festen Punkte, z. B. durch das rechte Hüftgelenk, denkt man sich wieder die drei schon öfter gebrauchten auf einander senkrechten Halbaxen gelegt; die eine vertical aufwärts, die zweite horizontal von rechts nach links (zur symmetrisch theilenden Medianebene senkrecht), die dritte dieser parallel horizontal nach hinten. Man nennt dann die um diese Axen ausgeführten Bewegungen in derselben Reihenfolge Rotation nach aussen, Flexion und Adduction; die entgegengesetztsinnigen Drehungen (also die Drehungen um die entgegengesetzt gerichteten Halbaxen oder, was dasselbe ist, um die Verlängerungen der ursprünglich gewählten, d. h. also um eine nach

unten, nach aussen und nach vorn gerichtete) heissen dann Rotation nach innen, Extension und Abduction.

Wenn die Axen dieser letzten drei Bewegungen, d. h. die Verlängerungen der zuerst gewählten drei Halbaxen nach der anderen Seite des Ursprunges noch mitgezählt werden, so hat man im Ganzen sechs Halbaxen, welche acht rechtwinkelige hohle Ecken mit einander bilden, die den ganzen Raum ausfüllen. Es ist nun wohl sehr unwahrscheinlich, dass irgend ein Muskel, wenn er allein wirksam wäre, eine Drehung gerade um eine dieser drei Halbaxen hervorbringen würde, aber die Axe muss in eine der acht erwähnten hohlen Ecken fallen. Man wird also allemal sein Drehungsmoment in drei zu einander rechtwinkelige Componenten zerlegen können nach drei der sechs Halbaxen, deren Verhältniss obendrein noch bloss von der Richtung der Axe, nicht von dem Maasse des Momentes abhängt. So könnte man offenbar alle auf ein arthrodisches Gelenk wirkenden Muskeln durchgehen und das Verhältniss der drei Componenten für jeden einzelnen finden, oder, wenn man lieber will, jedem der Muskeln die der Einheit gleiche Contractionsenergie beilegen und für diesen Fall die absoluten Maasse der jedesmaligen drei Componenten angeben. Auf diese Weise würden sich die gesammten Muskeln des Gelenkes zu einer Tabelle [1]) zusammenordnen, die aus drei Doppelcolumnen zusammengesetzt wäre. Die erste würde die Axen der Rotation nach aussen und der Rotation nach innen, die zweite die Axen der Flexion und Extension, die dritte die der Adduction und Abduction enthalten. Jeder Muskel würde in jeder der drei Doppelcolumnen einmal auftreten, aber auch nur einmal, denn er kann bei der hier angenommenen Zerlegungsweise nicht eine Componente nach zwei entgegengesetzten Halbaxen haben. Also z. B. nicht gleichzeitig ein componirendes Moment um die Flexions- und Extensionsaxe. Diese jedesmaligen drei Componenten haben dann auch noch einen physischen Sinn: Angenommen, ein Muskel hätte beispielsweise eine Componente nach der Flexionsaxe = 0,27, so würde er, wenn durch irgend welche sonstige Veranstaltungen die Flexionsaxe festgemacht und keine Drehung um eine andere Axe als diese gestattet wäre, ein Flexionsbestreben = 0,27 hervorbringen, wenn sein Contractionsbestreben der Einheit gleich wäre. Aus dem unmittelbaren Gefühle für die Grössenverhältnisse dieser Momentscomponenten, wie es auf den groblichen anatomischen Augenschein hin urtheilt, entstanden die Namen der Muskeln, die in den anatomischen Handbüchern als physiologische verzeichnet werden. Man sieht es nämlich der Lage eines Muskels in der Mehrzahl der Fälle unmittelbar an, welcher von den sechs Haupt-Halbaxen die Drehungsaxe

---

[1]) Ich habe eine solche Tabelle für die Oberschenkelmuskeln einmal aus Messungen berechnet, sie findet sich Zeitschr. für rat. Med. 9, 94. Später hat Eugen Fick ähnliche Messungen am Schultergelenke ausgeführt. Arbeiten aus dem physiolog. Laboratorium der Würzburger Hochschule IV. 1878.

des Muskels am nächsten sich anschliesst. Seine Componente nach dieser (die Projection seines Momentes auf dieselbe) ist dann die grösste unter den dreien. Ist sie auffallend grösser als die beiden anderen, so giebt man nach ihr dem Muskel geradezu den Namen. So nennt man z. B. den M. iliopsoas einen Flexor des Oberschenkels schlechtweg, weil offenbar seine flectirende Componente die beiden übrigen bedeutend überwiegt. Aber es wird gleichwohl Niemandem einfallen zu glauben, wenn sich der genannte Muskel allein contrahirte, würde eine reine Flexion entstehen, d. h. eine Erhebung des Schenkels genau um eine von rechts nach links horizontal laufende Linie als Axe. Herrscht keine der drei Componenten über die beiden anderen sehr auffallend vor oder sind namentlich zwei derselben nahezu gleich gross, so wird die eine als sogenannte Haupt-, die andere als Nebenwirkung hingestellt, und man sagt in diesem Sinne vom M. glutaeus maximus, er sei extensor femoris, und habe die Nebenwirkung, den Schenkel nach aussen zu rotiren.

Wenn für ein arthrodisches Gelenk die Momentcomponenten sämmtlicher darauf wirkenden Muskeln bezüglich jener sechs Haupthalbaxen bestimmt sind, so ist die Bedingung dafür, dass jedes geforderte Drehungsmoment mit dieser Muskulatur realisirbar ist, einfach die, dass eben um jede der sechs Halbaxen ein componirendes Moment vorhanden ist. In der That, man mag der Axe eines zu realisirenden Momentes jetzt irgend eine Lage im Raume geben, immer wird sie Diagonale eines Parallelepipeds sein, dessen anliegende Seiten Axen von herstellbaren positiven Momenten sind.

Alle bisher gemachten Erörterungen gelten natürlich nur für die statischen Verhältnisse in einer bestimmten Lage des betreffenden Gelenkes; sobald diese Stellung durch eine wirkliche Zusammenziehung der Muskeln verändert wird, verändern sich sofort auch die Lagen der Muskeln selbst, sowohl im absoluten Raume als auch relativ gegen die Knochen, auf die sie wirken, und die für die erste Stellung berechneten Momentaxen haben keinen Sinn mehr; es müssten für die neue Stellung von Neuem die Axen bestimmt werden. Man sieht indessen die Möglichkeit ein, auch eine endlich grosse Bewegung vollständig mechanisch zu zergliedern. Eine solche kann nämlich (nach S. 75) allemal angesehen werden als die Abwickelung zweier Kegelflächen, von denen die eine im Raume, die andere in dem bewegten Systeme eine feste Lage hat und deren Spitzen mit dem Drehpunkte zusammenfallen. Stellt man sich irgend ein bestimmtes Stadium der Abwickelung vor, so ist offenbar die Lage aller Punkte des festen Systems, folglich aller Muskelansätze im Raume gegeben, die Ursprünge bleiben ohnehin an ihren Stellen, und man kennt demnach für die herausgegriffene Lage die Richtungen der Kräfte; man kennt ausserdem die Lage der Drehungsaxe, die in dem Stadium der Abwickelung für die folgende unendlich kleine Elementardrehung — und aus solchen unendlich kleinen Elementardrehungen ist ja die ganze Abwickelung zusammengesetzt — gefordert wird; man kann

folglich die Spannungen der einzelnen Muskeln nach den obigen Principien ermitteln, welche durch ihr Zusammenwirken die Drehung um die geforderte Axe einleiten. Natürlich wird dabei wieder eine Willkürlichkeit statthaben, wenn nicht immer noch die Hülfshypothese des möglichst kleinen Gefühles von Anstrengung gemacht wird. Indem man nun zu der unmittelbar folgenden Lage übergeht, die nur unendlich wenig von der vorhergehenden verschieden ist, kann man von Neuem die Lagen der Muskelansätze im Raume bestimmen und die veränderten Längen der einzelnen Muskeln berechnen und mit den vorhergehenden vergleichen. Es wird sich dann ergeben, dass gewisse Muskeln eine unendlich kleine Verkürzung, andere eine unendlich kleine Verlängerung erfahren haben; insbesondere wird es recht gut möglich sein, dass auch solche Muskeln, deren Mitwirkung durch eine namhafte Spannung bei der gedachten Elementardrehung absolut erforderlich war, gleichwohl durch die Ausführung selbst eine Verlängerung erfuhren. Es kann also, wenn am Ende einer Bewegung gewisse Muskeln verkürzt gefunden werden, nicht behauptet werden, dass sie allein dabei activ betheiligt waren. Während eines unendlich kleinen Stadiums der Verlängerung oder Verkürzung gilt nun die berechnete Spannung. In dieser Weise müsste die ganze Abwickelung durchgangen werden.

Wollte man diese Betrachtung für einen speciellen Fall wirklich einmal ausführen, so müsste noch besonders beachtet werden, dass möglicherweise in jedem Stadium der Bewegung auch die Grösse des resultirenden geforderten Momentes eine andere sein könnte ausser der Richtung seiner Axe. Bei einer solchen Bewegung nämlich kann es sich darum handeln, bloss Widerstände gerade zu überwinden, und es müsste alsdann in jedem Augenblicke das resultirende Moment der Kräfte, wenn die Bewegung mit constanter Geschwindigkeit ausgeführt werden soll, und unter Widerstand alles begriffen wird, was eine Verzögerung hervorbringen kann, gerade gleich sein dem resultirenden Momente der Widerstände zu derselben Zeit. Offenbar kann aber das letztere veränderlich gedacht werden. In anderen Fällen kann mit einer derartigen Drehung auch noch die Fortbewegung einer Last beabsichtigt werden (möglicherweise auch nur die des bewegten Gliedes). In diesem Falle muss auch das resultirende Moment immer grösser sein als das Moment der Last, das allemal, je nach der Lage derselben, in den einzelnen Stadien der Bewegung verschieden sein wird. Dieser letztere Umstand dürfte z. B. nicht unberücksichtigt bleiben, wenn es sich um die Bewegungen des Oberschenkels durch seine Muskeln handelte. Endlich darf noch ein wirksamer Factor nicht übergangen werden, es kann nämlich bei einer Bewegung irgend ein Band schon einen gewissen Spannungsgrad erlangt haben, ohne darum die Weiterbewegung absolut zu verhindern. Im letzteren Falle (wenn seine Dehnbarkeit erschöpft wäre) würde sofort keine Bewegung mehr möglich sein, als eine Drehung um eine Axe, die durch den Drehpunkt und den Ansatz des Bandes gelegt werden kann, d. h.

eine Drehung, bei welcher der Ansatz des Bandes in gleicher Entfernung von seinem Ursprunge bleibt, abgesehen natürlich von allen Bewegungen, bei denen der Ansatz dem Ursprunge des Bandes wieder genähert wird. Wäre aber die Dehnbarkeit noch nicht erschöpft, so würde das Band selbst wie ein Muskel mitwirken, d. h. in der Richtung seiner Fasern einen Zug ausüben, dessen Grösse von der Ausdehnung abhängt, die er erlitten hat.

Bei flüchtiger Betrachtung könnte man vielleicht einen Widerspruch finden zwischen der zuletzt entwickelten Zerlegung der Drehungsmomente nach drei Hauptaxen und der weiter oben (siehe S. 77) aufgestellten Behauptung, dass eine Zerlegung beliebiger Drehungen nach drei Hauptaxen nicht ohne Weiteres, jedesfalls aber nicht nach dem Principe des Parallelogramms der Kräfte, statthaft sei. Dem aufmerksamen Leser kann jedoch nicht entgangen sein, dass eben ein Drehungs*moment* etwas durchaus Anderes ist als eine ausgeführte Drehung von *endlich grossem* Umfange, und dass daher die Behandlung der Drehungs*momente* auch eine durchaus andere sein muss. Bei ihr haben wir es gar nicht mit wirklich ausgeführten Bewegungen zu thun, vielmehr wird nur untersucht, in welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit eine Bewegung *anfangen* würde, wenn die in Betracht kommenden Zugkräfte anfangen zu wirken.

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, dass die Grösse des statischen Momentes eines Muskels ausser von seiner Spannung auch noch von seiner Lage zum Gelenke abhängt. An einem Charniergelenk z. B. kann ein Muskel selbst bei grosser Spannung nur ein sehr kleines Moment hervorbringen, wenn sein Ansatz sehr nahe an der Drehungsaxe liegt, weil er dann eben, wie man sich auszudrücken pflegt, an einem sehr kleinen Hebelarm angreift. Besonders klein wird das Moment eines Muskels an einem Charniergelenke sein, wenn die Richtung seines resultirenden Zuges die Richtung der Axe nicht einmal annähernd senkrecht überkreuzt, sondern ihr eher annähernd parallel ist, wie dies beispielsweise für den Supinator brevis zutrifft. Hier würde nur eine kleine Componente der Muskelspannung überhaupt ein Drehungsmoment haben. Man spricht deshalb in der Anatomie öfters von mehr oder weniger „*günstiger*“ Ansatzweise dieses oder jenes Muskels. Es ist sehr wichtig zu beachten, dass dies nur einen Sinn hat für den *statischen* Effect der Muskelspannung, d. h. zwei verschieden angesetzte Muskeln können bei gleicher Spannung möglicherweise sehr verschiedenen in der Entfernung 1 von der Axe senkrecht zur Axenrichtung angreifenden Kräften *Gleichgewicht* halten.

Wollte man hieraus schliessen, dass der eine Muskel dem anderen auch in der *dynamischen* Wirkung überlegen wäre, so würde man sich in einem schweren Irrthume befinden. Die *Arbeit*, welche ein Muskel gegen widerstehende Kräfte bei einer wirklichen Zusammenziehung am Gelenke leistet, hängt durchaus nur ab von der Spannung und der

Grösse der Zusammenziehung, welche mit dieser Spannung stattgefunden hat. Sie ist dem Producte dieser beiden Kräfte (Kraft × Wegstrecke) gleich und sie hängt von der Ansatzweise und der Zugrichtung gar nicht ab. Von zwei Muskeln nämlich, die nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise ungleich günstig angesetzt sind und die sich mit gleicher Spannung um den gleichen Betrag zusammenziehen, kann zwar der eine eine grössere in der Entfernung 1 von der Axe und senkrecht zu ihr angreifende Kraft überwinden als der „weniger günstig“ angesetzte, dafür aber kann dieser letztere die kleinere Kraft bei gleicher Zusammenziehung durch eine in demselben Maasse grössere Wegstrecke überwinden, so dass die geleistete Arbeit in beiden Fällen genau gleich ist.

Es dürfte nicht überflüssig sein, diesen eigentlich selbstverständlichen Satz hier streng zu beweisen, da er vielleicht nicht Allen ohne Weiteres einleuchtet. Wir wollen zu diesem Ende beweisen, dass die ganze Arbeit: Spannung × Wegstrecke, durch welche sie wirkt, d. h. Spannung × Betrag der Zusammenziehung in Ueberwindung von Gegenkräften am Gelenke bei der Zusammenziehung eines Muskels selbst dann wirklich zur Geltung kommt, wenn die Drehung in einer Ebene zu Stande kommt, zu welcher die Zugrichtung schräg läuft (sei es, dass andere gleichzeitige Muskelzüge die Bahn bestimmen, wenn das Gelenk ein freies ist, sei es, dass das Gelenk, Charnier, diese Bahn an sich vorschreibt). In einem solchen Falle wird man ja am ersten daran zweifeln können, dass die dynamische Wirkung ganz zu Stande kommt.

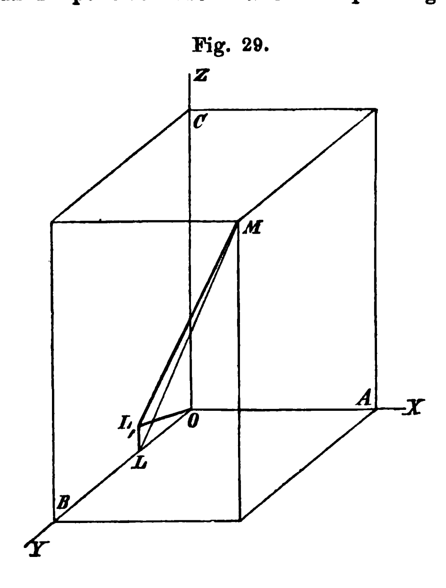
Wir wählen (s. Fig. 29 a. f. S.) zur X-Axe eines räumlichen Coordinatensystems die Axe der factischen Drehung zur Y-Axe das Perpendikel vom Ansatze L des betrachteten Muskelbündels am beweglichen Knochen auf die Drehaxe und zur Z-Axe eine auf die beiden vorigen senkrechte Gerade. Der Ursprung des Muskelbündels am festen Knochen sei M und die Coordinaten dieses Punktes seien $OA = x$; $OB = y$; $OC = z$. Die Coordinaten des Ansatzpunktes sind $x_1 = o$; $y_1 = r$; $z_1 = o$, wenn die Entfernung OL durch r bezeichnet wird. Die Länge des Muskelbündels ML ist demnach

$$R = \sqrt{x^2 + (y - r)^2 + z^2}.$$

Seine elastische Spannung bei dieser Länge sei P und es erfolge jetzt eine unendlich kleine Zusammenziehung um die Grösse dR, während welcher die Spannung constant $= P$ gedacht werden darf, dann ist $P.dR$ die positive Arbeit der elastischen Kräfte bei diesem Acte und es ist zu beweisen, dass die negative Arbeit der Kräfte, welche am beweglichen Knochen der Zusammenziehung entgegenwirken, gerade so gross ist. Um der Spannung P mittelst des Gelenkes Gleichgewicht zu halten, müsste bei L eine parallel zu OZ abwärts gerichtete Kraft angebracht sein, gleich der Projection von P auf die Richtung der Z-Axe, also $= P\frac{z}{R}$. Wäre der Knochen im betrachteten Augenblicke schon aufwärts in Bewegung, so würde er dem Muskelzuge weiter aufwärts folgen ohne Beschleunigung und es würde im nächsten Zeitdifferential die Gegenkraft $P\frac{z}{R}$ eine relative Arbeit leisten gleich dem Producte aus $P\frac{z}{R}$ und der Wegstrecke, welche der Punkt L in der Richtung dieser Kraft zurücklegt. Dieser Punkt kann sich aber nach der Voraussetzung nur um O in der Ebene OYZ drehen. Er sei durch die unendlich kleine Drehung um den

Winkel $L_1 O L \rightleftharpoons d\omega$ in die Lage L_1 gekommen, dann ist $P \frac{z}{R} \cdot L L_1$ oder $P \frac{z}{R} \cdot r\, d\omega$ die gesuchte negative Arbeit der widerstehenden Gegenkraft. Um nun die positive Arbeit der Muskelspannung $P\, d R$ hiermit zu vergleichen, beachten wir, dass $d R = M L - M L_1 = \frac{d R}{d z_1} \cdot d z_1$ sein muss, da durch die Verrückung des Punktes L nach L_1 nur die Coordinate z_1 des Ansatzpunktes eine Aenderung erlitten hat, während x, y, z, y_1 und x_1 unverändert bleiben. Nun ist aber $\frac{d R}{d z_1} = \frac{z - z_1}{R}$ oder, da z_1 in unserem Falle $= o$ ist $\frac{d R}{d z_1} = \frac{z}{R}$; ferner ist $d z_1 = L L_1 = r\, d\omega$, also ist

Fig. 29.



$$P\, d R = P \frac{z}{R} . r\, d\omega,$$

d. h. die negative Arbeit der überwundenen Kräfte ist genau gleich der bei der Zusammenziehung um den Betrag $d R$ geleisteten positiven Arbeit der Muskelspannung, unabhängig davon, in welcher Richtung der Muskelzug auf den beweglich gedachten Knochen wirkt. Man liest aus der obigen Gleichung unmittelbar heraus, dass, je kleiner die Componente $P \frac{z}{R}$ ist, von der das statische Moment bezüglich der betrachteten Axe abhängt, desto grösser muss die Wegstrecke $r . d\omega$ sein, durch welche das Moment bei einer Zusammenziehung um den Betrag $d R$ wirkt, da das Product $P \frac{z}{R} . r\, d\omega$, wie erwiesen wurde, immer $= P . d R$ sein muss. Ist aber der Satz für eine unendlich kleine Drehung bewiesen, so gilt er auch für jede endliche, bei welcher die Spannung P sich stetig verändert. Eine solche endliche Drehung kann in lauter unendlich kleine Elemente zerlegt werden und innerhalb jedes Elementes kann die Spannung des Muskels als merklich constant betrachtet werden.

DRITTER ABSCHNITT.

HYDRODYNAMIK.

Erstes Capitel.

Stromlauf in starren Röhren.

Von den Problemen der Hydrodynamik ist für die Physiologie besonders wichtig das der Strömung von Flüssigkeiten in verzweigten Röhrensystemen, denn dies ist das Problem des Blutkreislaufes. Die Röhren, welche das Blutgefässsystem darstellen, haben sämmtlich elastische Wandungen. In einigen Abtheilungen des Systems, nämlich in den grösseren Arterien, spielt die Elasticität der Wände eine bedeutende Rolle bei dem Bewegungsvorgang, indem derselbe in periodisch beschleunigtem und verzögertem wellenartigem Fortschreiten besteht, was durch die Elasticität der Röhrenwände vermittelt wird. Die Gesetze dieser Art von Bewegung sind noch sehr wenig bekannt. Das Wenige, was wir darüber wissen, soll den Gegenstand des zweiten Capitels ausmachen. Im gegenwärtigen beschäftigen wir uns mit dem einfacheren Falle eines stationären Stromes in starren Röhren. Die Gesetze desselben haben in einem grossen Theile des Blutkreislaufes trotz der Elasticität der Wandungen uneingeschränkte Geltung. In der That kommt ja die Elasticität einer Röhrenwand gar nicht mehr in Betracht, sowie in der Röhre ein stationärer Strom fliesst, so dass der Druck an jeder Stelle einen constanten Werth behauptet; denn mit diesem Druck werden die elastischen Kräfte der Wandung für einen bestimmten Werth des Umfanges im Gleichgewicht sein. Es ist daher durchaus kein Grund zu einer Aenderung des Lumens vorhanden und der Flüssigkeitsstrom wird genau ebenso fortgehen, als flösse er in einem starrwandigen Rohre von derselben Weite.

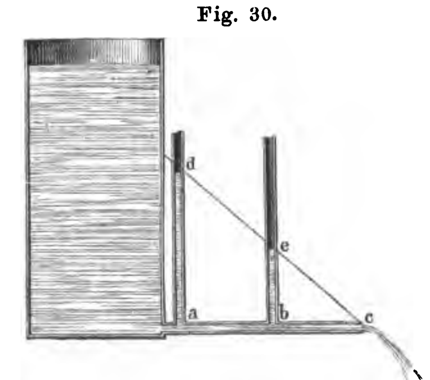
Solche stationäre Ströme in Gefässen von unveränderlicher Weite bilden aber den grössten Theil des Blutkreislaufes, denn wellenartiges

Fortschreiten findet bloss in den grösseren Arterien statt. Schon in den kleinsten Arterien, noch mehr in den Capillaren und Venen, sind die Ströme stetig, wenigstens hält sich hier die Geschwindigkeit regelmässig durch längere Zeiträume constant und ändert sich nur allmälig durch äussere Einflüsse in ganzen Gefässprovinzen, wird z. B. langsamer im ganzen Gebiete des Arterienstämmchens, wenn sich dieses für eine längere Zeit contrahirt. Innerhalb eines Zeitraumes stationäres Strömens könnten offenbar die Gefässe durch gleich weite starre Röhren ersetzt werden, die Elasticität der Wände hat nur Einfluss auf den Uebergang von einem Zustande des Stromes zu einem anderen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall. Wir denken uns eine gerade cylindrische, also überall gleich weite Röhre von kreisförmigem Querschnitt. Damit die Schwere die Flüssigkeit innerhalb des Rohres weder beschleunigt noch verzögert, legen wir dasselbe in eine wagerechte Ebene. Durch diese Röhre lassen wir nun eine Flüssigkeit, beispielsweise Wasser, in stationärem Strome fliessen, d. h. so dass in jeder Zeiteinheit jeden Querschnitt der Röhre eine gleiche Flüssigkeitsmenge passirt. Factisch ist dies leicht herzustellen. Man braucht nur die Flüssigkeit durch eine fortwährend constante Kraft in das eine Ende der Röhre einzutreiben und am anderen Ende die Ausflussbedingungen constant zu erhalten. Es stellt sich alsdann fast momentan ein constanter Strom her.

Am einfachsten lässt sich dieser Zweck auf die in Fig. 30 dargestellte Weise erreichen: das wagerechte Stromrohr mündet bei c frei in die Luft; die Ausflussbedingung ist also constant, indem der Ausfluss fortwährend unter dem einfachen Atmosphärendruck stattfindet. Das andere Ende (in der Figur links) ist mit einem grossen Wasserbehälter verbunden, in welchem man fortwährend das Niveau durch irgend eine Vorrichtung constant erhält.

Fig. 30.



Ein solcher Strom folgt sehr einfachen Gesetzen, sobald seine Geschwindigkeit und die Weite des Rohres gewisse Grenzen nicht übersteigen, die indessen nicht allgemein angegeben werden können. Ist die Röhre sehr weit, hätte sie beispielsweise einige Centimeter Durchmesser, oder ist der Strom in einer engen Röhre sehr stark, so verwickeln sich die Erscheinungen vermuthlich durch Wirbelbildung längs der Wände in solchem Grade, dass man mit der Theorie nicht mehr folgen kann. Die älteren Mechaniker haben zwar geglaubt, im Besitze einer vollständigen Theorie dieser Ströme zu sein, die auch in physiologische Schriften

vielfach Eingang gefunden hat. Diese Theorie beruht aber auf einer gänzlich falschen Grundvorstellung, nämlich auf der, dass alle in einem Querschnitte der Röhre befindlichen Wassertheilchen gleiche Geschwindigkeiten besässen. Die unter dieser Voraussetzung entwickelten Formeln stimmen daher auch sehr schlecht mit der Erfahrung überein und sind kaum als empirische Formeln zu brauchen.

Für die Physiologie haben die Gesetze der gleichmässigen Strömung in weiteren Röhren kein Interesse, denn es treten höchstens die grösseren Venenstämme aus den Grenzen der Enge heraus, innerhalb deren jene einfacheren Gesetze Geltung haben. Die übrigen Blutgefässe mit constanter Strömung, die Capillaren und kleinen Arterien und Venen sind hinlänglich eng, denn sobald der Arteriendurchmesser auch nur etwa 1 mm nahe kommt, ist schon Wellenbewegung im Gefässe bemerkbar. Ueberdies ist auch in den kleinen Arterien und Capillaren die Geschwindigkeit der Strömung nicht bedeutend.

Unter den soeben aufgestellten Bedingungen, d. h. bei einem höchstens einige Millimeter weiten Rohre und einer mässigen Stromstärke geschieht nun die Bewegung im beharrlichen Strome in folgender Weise: Die Theilchen in der Axe des Stromes bewegen sich am schnellsten, die Theilchen an der Wand sind vollständig in Ruhe, wenigstens wenn die Wand aus einem Stoffe besteht, der durch die darin bewegte Flüssigkeit benetzbar ist. So würde es also z. B. der Fall sein, wenn Wasser in Glasröhren oder Metallröhren fliesst. Anders verhielte sich die Sache, wenn z. B. Quecksilber in Glasröhren fliesst. Es leuchtet daher ein, dass das Material der Wand gar keinen Einfluss auf den Strömungsvorgang haben kann, sobald es durch die Flüssigkeit überhaupt benetzbar ist, denn in diesem Falle strömt ja die Flüssigkeit gleichsam in einer Röhre, die aus ihrem eigenen Stoffe gebildet ist. Es muss z. B. gleichgültig sein, ob Wasser in einer Glasröhre strömt, oder unter sonst gleichen Bedingungen in einer Messingröhre von genau denselben Abmessungen. Diesen auch für die Physiologie höchst wichtigen Satz hat die Erfahrung vollkommen bestätigt.

Zwischen der grössten Geschwindigkeit in der Axe des Cylinders und der absoluten Ruhe an der Wand kommen alle Mittelstufen der Geschwindigkeit im Strome vor, und zwar bewegt sich irgend ein Flüssigkeitsfaden mit um so kleinerer Geschwindigkeit, je weiter er von der Axe entfernt liegt. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsfadens hängt aber auch einzig von seiner Entfernung von der Axe ab. Es werden sich daher alle Flüssigkeitstheilchen, welche in irgend einer der Röhrenwand conaxialen Cylinderschale liegen, mit derselben Geschwindigkeit bewegen und zwar so, dass diese Geschwindigkeit um so kleiner ist, je näher der Radius des Querschnittes dieser Cylinderschale dem Radius des Querschnittes der ganzen Röhre kommt. Ist der Radius der Cylinderschale dem Röhrenradius gleich, so erreicht die Geschwindigkeit, wie schon gesagt, den Werth Null.

Dass in jedem Flüssigkeitsfaden längs der ganzen Röhre gleiche Geschwindigkeit herrscht, versteht sich aus dem Begriffe des constant beharrlichen Stromes von selbst und ist auch schon im Vorstehenden stillschweigend vorausgesetzt. Hiernach können wir uns von dem ganzen Hergange folgende Vorstellung machen: Wir theilen die jeweilen in der Röhre befindlichen Flüssigkeitsmassen durch unendlich benachbarte, der Röhrenwand conaxiale Cylinder in unendlich dünne Schichten, deren innerste — der axiale Flüssigkeitsfaden — natürlich als unendlich dünner Vollcylinder zu denken ist. Die übrigen Schichten sind Cylinderschalen und das ganze System kann verglichen werden mit dem System der Jahresschichten eines Tannenbaumes. Jede dieser Schichten bewegt sich nun, als wäre sie ein fester Körper, d. h. sie verschiebt sich als Ganzes längs der Axe in der Richtung des Stromes, der Axenfaden mit der grössten Geschwindigkeit und irgend eine Schicht um so langsamer, je grösser ihr Radius ist, die äusserste Schicht — die Wandschicht — bleibt ganz in Ruhe.

Bei dieser Bewegung muss jede Schicht an ihren beiden Nachbarschichten sich verschieben, indem sie hinter der mehr nach innen gelegenen zurückbleibt und der ihr nach aussen benachbarten voraneilt. Darin liegt nun die Ursache des „Widerstandes", die man in Ermangelung genauer Kenntniss ihres eigentlichen Wesens mit dem Namen Reibung bezeichnet. Weil, wie wir sahen, die Wandschicht ganz in Ruhe ist, so kommt eine Reibung der Flüssigkeit an der Röhrenwand gar nicht in Betracht, sondern bloss die innere Reibung der Flüssigkeit. Man hat nun angenommen, dass die Grösse des Reibungswiderstandes — alles Uebrige gleichgesetzt — einfach proportional sei dem Unterschiede der Geschwindigkeiten in den an einander vorbeigleitenden Flüssigkeitsschichten. Man kann unter dieser Voraussetzung mathematisch alle Gesetze entwickeln, nach welchen sich Wasser in einem wagerechten cylindrischen Rohre bewegen muss.

Die Theorie ergiebt folgende Sätze, welche sich theilweise durch Versuche prüfen lassen:

1. Der Druck ist in allen Punkten eines Röhrenquerschnittes derselbe.

Dieser Satz ist eigentlich nur ein anderer Ausdruck für die Annahme, dass die Bewegung aller Flüssigkeitstheilchen der Röhrenaxe parallel geschieht. In der That wäre in einem zur Axe senkrechten Querschnitt an verschiedenen Punkten der Druck verschieden, so müsste sofort Bewegung von den Orten höheres zu den Orten niederes Druckes erfolgen und es könnte nicht überall die Bewegung ausschliesslich der Axe parallel bleiben. Ludwig und Stefan haben den vorstehenden Satz 1. experimentell zu widerlegen versucht, indem sie zwei Manometer an demselben Querschnitt eines Rohres anbrachten, deren eines ins Innere der Röhre reichte. Dies letztere zeigte stets einen tieferen Stand, als das bloss in der Wand befestigte. Diesen Versuchen kann man aber einwenden, dass das Hereinragen des

Manometerendes in die Bahn des Stromes diesen selbst verändert. Ueberdies sind die in Rede stehenden Versuche an so weiten Röhren angestellt, dass darauf unsere Betrachtungen ohnehin keine Anwendung fänden. Direct kann unser Satz überhaupt nicht durch Versuche geprüft werden.

2. Der Druck nimmt in der Richtung des Stromes ab und zwar wie die Ordinaten einer geraden Linie, d. h. so, dass die Differenz der an zwei Punkten statthabenden Druckwerthe der Entfernung dieser beiden Punkte proportional ist.

Hätte also beispielsweise an einer gewissen Stelle des Rohres der Druck die Höhe von 500 mm (Wasser) und 100 mm weiter stromabwärts die Höhe von 450 mm, so würde er 200 mm stromabwärts vom ersten Punkte 400 mm betragen, 220 mm unterhalb des ersten Punktes würde er 390 mm betragen u. s. w. Natürlich würde nach demselben Gesetze beispielsweise 50 mm stromaufwärts vom ersten Punkte der Druck gleich 525 mm sein u. s. w. bis an den Anfang der Röhre.

Dies Gesetz findet in der Erfahrung seine volle Bestätigung. Setzt man in die Wand eines gut gearbeiteten cylindrischen Rohres eine Reihe senkrechter, oben offener Röhren, und lässt nun in dem wagerechten Rohre einen beharrlichen Strom zu Stande kommen, so stellt sich alsbald die Flüssigkeit in den senkrechten Manometern so ein, dass die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Wassersäulen genau in einer geraden Linie liegen. Diese Linie senkt sich in der Richtung des Stromes schräg herab und trifft an der Ausflussmündung die Röhrenaxe (siehe die Linie *dec* Fig. 30), wenn die Flüssigkeit in die freie Luft abfliesst. Es muss nämlich in diesem Falle am Röhrenende der Drucküberschuss über den Atmosphärendruck gleich Null sein und dieser Drucküberschuss ist es ja eigentlich, den wir in den beschriebenen Versuchen messen und vorhin Druck schlechtweg genannt haben.

Die Neigung der soeben gedachten schrägen Geraden, deren Ordinaten die Druckwerthe darstellen, gegen die Röhrenaxe ist eine, wie sich weiterhin zeigen wird, für einen Strom charakteristische Constante. Wir können sie messen durch die Abnahme des Druckes, welche für jede Längeneinheit der Strombahn stattfindet. Diese Grösse wollen wir das „Gefälle" nennen. Wir können alsdann den Satz 2 auch so ausdrücken: für jeden beharrlichen Strom in einem cylindrischen wagerechten Rohre ist das Gefälle überall constant. Das Gefälle ist im gegebenen Falle leicht zu berechnen. Man braucht nur an zwei Stellen des Rohres die Druckhöhe zu bestimmen und ihre Differenz durch die Anzahl von Längeneinheiten zu dividiren, um welche die beiden Stellen von einander abstehen, dadurch ergiebt sich die auf jede Längeneinheit der Strombahn kommende Druckdifferenz, die wir eben Gefälle genannt haben. In dem oben willkürlich gewählten Beispiele würde das Gefälle also $\frac{500-450}{100} = 0{,}5$ betragen, wenn das Millimeter als Längeneinheit für

die Entfernungen sowohl als für die Druckhöhen gewählt wird. Für einen ins Freie abfliessenden Strom braucht man nur an einer Stelle, deren Abstand vom offenen Röhrenende bekannt ist, den Druck zu bestimmen, um das Gefälle zu berechnen, denn man weiss ja wegen des freien Ausflusses schon zum Voraus, dass am Ende der Röhre der Druck $= 0$ ist (indem der Atmosphärendruck ein- für allemal überall in Abzug gebracht wird). Das Gefälle ist alsdann einfach der Quotient des ermittelten Druckwerthes, dividirt durch den Abstand des Punktes, wo er statthat, vom Röhrenende. Ist die Länge der ganzen Röhre $= l$ und ist der Druck an ihrem Anfange (d. h. l Längeneinheiten von ihrem Ende) $= p^0$, so ist hiernach das Gefälle $= \frac{p^0}{l}$.

Die Theorie giebt ferner ein bestimmtes Gesetz über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit in den einzelnen concentrischen Flüssigkeitsschichten von ihrem Halbmesser. Da indessen dies Gesetz zu verwickelt ist, um in Worten klar ausgedrückt zu werden, und da es andererseits auch nicht direct durch Beobachtung zu prüfen ist, so soll es hier nicht näher besprochen werden. Obgleich also die Geschwindigkeit der einzelnen Flüssigkeitsfäden nicht direct experimentell bestimmt werden kann, so ist es doch möglich, die hierauf bezüglichen Ergebnisse der Theorie an der Erfahrung zu prüfen. Man kann nämlich weiterhin entwickeln, welche mittlere Geschwindigkeit der Strom haben muss, wenn die einzelnen Flüssigkeitsfäden die von der Theorie geforderten Geschwindigkeiten haben. Unter mittlerer Geschwindigkeit eines Stromes versteht man diejenige Geschwindigkeit, welche alle Theilchen haben müssten, wenn in der Zeiteinheit eben so viel Flüssigkeit den Querschnitt der Strombahn passiren sollte, als ihn bei der ungleichen Geschwindigkeit an verschiedenen Stellen wirklich passirt. Die mittlere Geschwindigkeit ist daher leicht aus der in gegebener Zeit ausgeflossenen Menge zu berechnen. Man braucht nur diese Menge (ausgedrückt in Volumeinheiten) zu dividiren durch die Anzahl von Zeiteinheiten, welche über ihrem Ausflusse verstrich, und durch die Anzahl von Flächeneinheiten, welche der Querschnitt des Stromes enthält. Wären beispielsweise in 7,5 Secunden aus einer Röhre von 5,3 qmm Querschnitt 11 925 cmm Wasser ausgeflossen, so wäre die mittlere Geschwindigkeit des Stromes $= 300$ mm in der Secunde. In der That bewegte sich durch einen Querschnitt von 5,3 qmm eine Flüssigkeit mit überall gleicher Geschwindigkeit, so würde sie in einer Secunde einen Cylinder füllen von 5,3 qmm Grundfläche und 300 mm Länge, d. h. von 1590 cmm Inhalt in 7,5 Secunden, also einen solchen von 11 925 cmm Inhalt, und so viel lieferte der Strom in der gegebenen Zeit wirklich.

Die mittlere Geschwindigkeit ist also der in gegebener Zeit oder resp. in der Zeiteinheit ausgeflossenen Menge, d. h. der Gesammtstromstärke einfach proportional. Für die mittlere Geschwindigkeit giebt nun

die Theorie ein äusserst einfaches Gesetz, das unter dem Namen des Poiseuille'schen bekannt ist.

3. Die mittlere Geschwindigkeit ist proportional dem Flächenraum des Röhrenquerschnittes und dem Gefälle. Man kann daher die mittlere Geschwindigkeit c stets darstellen durch das Product aus drei Factoren: Röhrenquerschnitt, Gefälle und ein constanter Coefficient, welcher die innere Natur der Flüssigkeit in dem bestimmten Zustande, in welchem sie zu den Versuchen verwandt wird, charakterisirt. Man kann ihn anschaulich definiren als diejenige mittlere Geschwindigkeit, welche der Strom für ein Gefälle $= 1$ in einem Rohre, dessen Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, haben würde. Dieser Coefficient hängt unmittelbar zusammen mit dem, was die Physiker den Coefficienten der inneren Reibung nennen. Beide Coefficienten sind einander verkehrt proportional. Es ist nämlich leicht einzusehen, dass der lediglich von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängige Factor in dem Ausdrucke für die mittlere Geschwindigkeit um so kleiner sein muss, je grösser der specifische Reibungswiderstand ist, denn um so kleiner wird für gleichen Röhrenquerschnitt und gleiches Gefälle die mittlere Geschwindigkeit sein.

Da man die mittlere Geschwindigkeit leicht bestimmen kann, so lässt sich das Poiseuille'sche Gesetz leicht prüfen. Die Ergebnisse der Beobachtung stimmen nun aufs Genaueste mit dem Gesetze überein. Es ist gut zu bemerken, dass von Poiseuille selbst sein Gesetz ursprünglich als empirisches aufgestellt wurde und dass ihm erst später von Anderen die theoretische Begründung gegeben wurde, deren leitende Gesichtspunkte hier angedeutet sind.

Um zu zeigen, mit welcher Genauigkeit sich das Poiseuille'sche Gesetz in der Erfahrung bewährt, will ich ein Beispiel aus einer Untersuchung von Jacobson ausführlich hersetzen. Es kann zugleich noch dienen, die entwickelten Begriffe anschaulicher zu machen. In einem Versuche floss Wasser durch eine 437 mm lange Röhre von 1,147 mm Halbmesser mit einer mittleren Geschwindigkeit von 802,54 mm in der Secunde. In einem 427,8 mm vom freien Ende der Röhre entfernten Manometer wurde die Druckhöhe 234,8 mm beobachtet. Das Gefälle war daher in diesem Versuche $= \frac{234,8}{427,8} = 0,5485$. Der Flächenraum des Röhrenquerschnittes betrug der obigen Angabe des Halbmessers gemäss 4,132 qmm. Setzen wir, indem wir den constanten, lediglich von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängigen Coefficienten mit A bezeichnen,

$$802,54 = A \times 4,132 \times 0,5489,$$

so berechnet sich dieser Coefficient

$$A = 353,85.$$

Wenn nun das Poiseuille'sche Gesetz richtig ist, so muss sich mit Hülfe dieser Zahl die mittlere Geschwindigkeit berechnen lassen für jeden

Versuch, bei welchem Wasser in demselben Zustande durch eine Röhre von bekanntem Querschnitte mit bekanntem Gefälle strömt. Ein solcher Versuch war beispielsweise der folgende aus Jacobson's Reihe: Das Rohr hatte einen Halbmesser von 0,8769 mm, also einen Querschnitt von 2,4157 qmm. 541,3 mm oberhalb des freien Endes der (im Ganzen 552,3 mm langen) Röhre wurde die Druckhöhe von 368 mm beobachtet. Das Gefälle war demnach $= \frac{368,0}{541,3} = 0,6798$. Das Gesetz verlangt also für diesen Versuch eine mittlere Geschwindigkeit:

$$c = 353,85 \times 2,4157 \times 0,6798 = 581.$$

Die in diesem Versuche wirklich beobachtete mittlere Geschwindigkeit betrug 577,51 mm in der Secunde. Eine so ausserordentlich geringe Differenz zwischen den beobachteten und berechneten Werthen fällt offenbar lediglich den unvermeidlichen Beobachtungfehlern zur Last und die strenge Gültigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes kann als vollständig erwiesen angesehen werden. Mit diesem Gesetze ist aber auch die ganze Vorstellung, welche wir uns von der Bewegung der Flüssigkeit machten, sowie die speciellen Gesetze über die Geschwindigkeit der einzelnen Flüssigkeitsfäden als richtig erwiesen, denn das Poiseuille'sche Gesetz ist nur eine mathematische Folgerung aus jenen.

4. Die mittlere Geschwindigkeit für ein Gefälle = 1 in einem Rohre, dessen Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist — d. h. der vorhin mit A bezeichnete Coefficient — variirt bei derselben Flüssigkeit mit der Temperatur, und zwar wächst diese Grösse mit steigender Temperatur.

Dieser Satz bedeutet mit anderen Worten, dass der Reibungswiderstand mit steigender Temperatur abnimmt, d. h. dass die Theilchen der Flüssigkeit bei höherer Temperatur leichter an einander vorbeigleiten als bei niederer. Der oben berechnete Werth des Coefficienten A, welcher wahrscheinlich genauer etwa 352 betragen dürfte, gilt beispielsweise für Wasser bei einer Temperatur zwischen 16,8 und 17° C. Für niedere Temperaturen würde sich ein geringerer, für höhere ein grösserer Werth ergeben.

5. Der in Rede stehende Coefficient hat bei derselben Temperatur für verschiedene Flüssigkeiten im Allgemeinen verschiedene Werthe. Je kleiner für eine bestimmte Flüssigkeit der Werth ist, desto „zäher" nennt man dieselbe.

Wird der Strom in der Röhre, wie dies in den künstlichen Versuchen meist der Fall ist, aus einem grossen Behälter gespeist, in dessen Wand der Anfang der Röhre eingefügt ist, dann muss in diesem Behälter die Druckhöhe um eine endliche Differenz grösser sein als im Anfang der Röhre selbst. Man kann diese zwar nicht direct messen, weil es technisch unausführbar ist, ein Manometer gerade genau auf den Röhrenanfang zu bringen. Man kann aber die hier stattfindende Druckhöhe aus dem

Gefälle und der Röhrenlänge leicht berechnen, und es findet sich allemal wie gesagt ein Werth, der von der beobachteten Druckhöhe im Behälter um eine endliche Differenz übertroffen wird. Diese Differenz hat man in hydraulischen Schriften öfters als Geschwindigkeitshöhe bezeichnet, indem man voraussetzte, die Druckabnahme beim Uebergange eines Flüssigkeitstheilchens aus dem Behälter in das Rohr entspreche dem Uebergange desselben von der im Behälter herrschenden fast vollständigen Ruhe zu der in der Röhre herrschenden Bewegung gemäss dem Toricelli'schen Gesetze[1]). Diese Voraussetzung ist aber nicht einmal theoretisch gerechtfertigt, selbst dann nicht, wenn man ganz absieht von dem Verluste an lebendiger Kraft, welcher ohne Zweifel beim Uebertritt der Flüssigkeit aus dem Behälter in die Röhre statthat. Auch empirisch ist noch keine allgemeine Relation hergestellt zwischen dem Drucke in dem den Strom speisenden Behälter, der Geschwindigkeit des Stromes und den übrigen Daten des Versuches.

Ueber das Strömen von Flüssigkeiten in verwickelteren Röhrensystemen ist fast noch gar nichts bekannt. Die hydrodynamische Theorie ist noch nicht weit genug entwickelt, um solche Erscheinungen streng zu behandeln. Wir sind daher darauf angewiesen, das experimentelle Material einfach aufzuzählen.

Es existiren genaue Versuche über den Fall, wo das Wasser von einem weiteren in ein engeres Rohr fliesst, das die Verlängerung des ersteren bildet. In jedem der beiden Röhrenabschnitte für sich gilt hier Poiseuille's Gesetz. Das Gefälle muss dabei im engeren Rohre allemal grösser sein als im weiteren. In der That muss ja in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des engen Rohres dieselbe Flüssigkeitsmenge wie durch den Querschnitt des weiten, die mittlere Geschwindigkeit muss also im engen Rohre grösser sein als im weiten. Nun gehört in einem engeren Rohre schon ein gröseres Gefälle dazu, um dieselbe mittlere Geschwindigkeit hervorzubringen, wie viel mehr also erst, um eine grössere zu bewirken. Es ist leicht einzusehen, dass sich die Gefälle in den beiden Röhrenabschnitten verhalten müssen umgekehrt wie die zweiten Potenzen ihrer Querschnittsflächen.

Beiderseits in nächster Nachbarschaft der Uebergangsstelle vom weiteren zum engeren Rohre gilt Poiseuille's Gesetz nicht. Der Druck ist hier im weiteren Rohre eine ganz kleine Strecke merklich constant, dann sinkt er, indem man zum engeren Rohre übergeht, plötzlich bedeutend, und es ist endlich noch ein Stück Wegs ins engere Rohr hinein das Sinken des Druckes etwas rascher als in dem übrigen Rohre.

Sehr befremdende Erscheinungen hat Jacobson beobachtet, wenn er Wasser aus einem engeren in ein weiteres Rohr strömen liess. Die Druckcurve längs dem engeren Rohre war wiederum nahezu eine gerade

---

[1]) Siehe 1, 307.

Linie und so gegen die Röhrenaxe geneigt, als ob das Wasser aus dem engeren Rohre direct ins Freie abflösse, d. h. am Ende desselben war der Druck merklich $= 0$, oder schärfer gesagt, er übertraf hier den atmosphärischen Druck nicht merklich. In der ganzen Erstreckung des weiteren Rohres war der Druck so klein, dass er gar nicht manometrisch bestimmt werden konnte, indem die Druckhöhe nicht grösser war, als die Dicke der Röhrenwand; das Wasser stieg also gar nicht in die aufgesetzten Manometerröhren. Zuweilen war in der weiteren Röhre der Druck sogar kleiner als der Atmosphärendruck. Die Versuche über den in Rede stehenden Fall sind indessen noch nicht hinlänglich, um allgemeine Gesetze dafür aufstellen zu können.

Es ist ziemlich wahrscheinlich, dass man namhafte positive Druckwerthe im weiteren Rohre beobachten würde, wenn man es sehr lang machte. Theoretischen Betrachtungen zufolge könnte es sich alsdann sogar ereignen, dass am Anfange des weiteren Rohres der Druck höher wäre als am Ende des engen. Dies wäre sogar allemal zu erwarten, wenn nicht beim plötzlichen Uebergange des Stromes aus dem engeren in den weiteren Theil der Bahn ein Verlust an lebendiger Kraft stattfände. In der That müssten sich ja sonst die im engen Rohre rasch bewegten Theilchen bei der Verzögerung, die sie im engeren Rohre erleiden, zusammendrängen und folglich einen höheren Druck ausüben. Derartige Phänomene hat Volkmann in seinen Versuchen auch wirklich öfters beobachtet und sie mit dem Namen der negativen Stauung bezeichnet. Die Volkmann'schen Versuche lassen aber nicht wohl allgemeine Schlüsse zu, da sie nicht unter den einfachsten Bedingungen angestellt sind. Namentlich waren die Röhrenabschnitte so weit und so kurz, dass man nicht erwarten darf, es habe in jedem einzelnen die Bewegung in der oben beschriebenen Weise stattgefunden. Sowie aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, so ist der theoretischen Betrachtung der Boden entzogen.

Auch über Ströme in verzweigten Röhren liegt einiges experimentelle Material vor. Die zuverlässigsten Versuche sind die von Jacobson angestellten. Es diente dazu ein sehr sorgfältig gearbeiteter Apparat folgender Einrichtung: Aus einem Behälter mit constantem Niveau floss das Wasser zunächst in ein wagerechtes cylindrisches Rohr, dessen Durchmesser hinlänglich klein und dessen Länge hinlänglich gross war, um sicher zu sein, dass darin der Strom dem Poiseuille'schen Gesetze folgte. Aus diesem Rohre konnte die Flüssigkeit in zwei Röhren von demselben Durchmesser wie die erste weiter strömen, welche beide ins Freie ausmündeten. Den Winkeln zwischen den drei Röhrenaxen konnten verschiedene Werthe ertheilt werden. Insbesondere konnte z. B. die eine Zweigröhre die Verlängerung der Stammröhre bilden und die andere konnte dann unter spitzem, rechtem oder stumpfem Winkel davon abzweigen. Beobachtet wurde in allen Fällen die aus jeder Zweigröhre ausfliessende Wassermenge, woraus die mittlere Geschwindigkeit gefunden werden kann sowohl in jeder Zweig- als auch in der Stammröhre; und ferner wurde

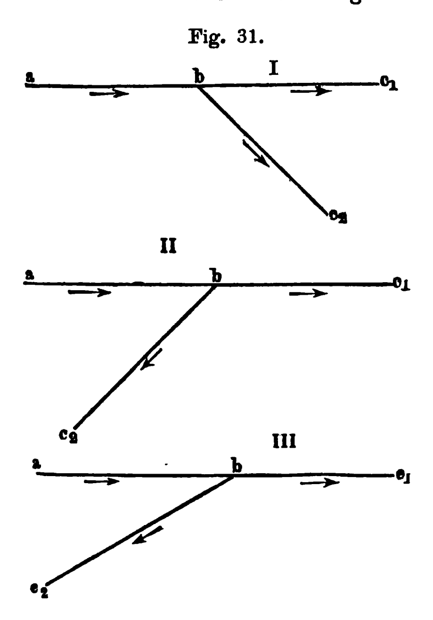
beobachtet der Druck an verschiedenen Stellen der Stammröhre und jeder Zweigröhre, diese Data lassen das Gefälle überall erkennen.

Stellen wir uns jetzt zunächst vor, dass nur der eine Zweig offen ist, welcher die Verlängerung des Stammstromes bildet, dann haben wir den schon genau erörterten Fall eines einfachen Stromes, der ein bestimmtes Quantum Wasser in der Zeiteinheit bei einem bestimmten Gefälle liefert. Oeffnet man nun den Seitenweg bei gleich gehaltener Druckhöhe im Reservoir, so wird in der Stammröhre der Strom schneller, was sich daraus ergiebt, dass aus den Oeffnungen der beiden Zweige in der Zeiteinheit mehr ausfliesst, als zuerst aus der einen Oeffnung. Dem entsprechend wird im Stammrohre auch das Gefälle grösser. Man sieht nämlich den Druck am Ende desselben sehr bedeutend sinken, am Anfange dagegen nicht merklich.

Die Eröffnung eines Seitenzweiges unter den oben angeführten Bedingungen beschleunigt den Stammstrom in merklich gleichem Maasse, unter welchem Winkel auch der Seitenzweig abgeht.

Dieser höchst merkwürdige Satz, den man eigentlich nicht hätte vermuthen sollen, wird anschaulicher werden durch einige Zahlenbeispiele aus Jacobson's Untersuchung. In drei Versuchen, bei welchen die Druckhöhe im Speisungsbehälter 874 mm betrug, war die Anordnung der Röhrenverzweigung, wie in Fig. 31 unter I, II, III zu sehen ist, wo ab die Stammröhre, bc_1 und bc_2 die beiden Zweigröhren sind. Die Bewegungsrichtung ist durch die Pfeile angedeutet. In dem Versuch I war der Verzweigungswinkel $c_1 b c_2 = 45^0$, die gesammte Wassermenge, welche bei c_1 und bei c_2 zusammen in einer gewissen Zeit ausfloss, betrug 30557 g. In Versuch II war der Verzweigungswinkel $= 135^0$ und die gesammte während derselben Zeit aus bc_1 und bc_2 zusammen ausgeflossene Wassermenge betrug 30643. In Versuch III war der Verzweigungswinkel $= 150^0$ und die in derselben Zeit ausgeflossene Gesammtmenge betrug 30470. Diese drei Zahlen weichen nicht um $^1/_{100}$ von einander ab, trotz der grossen Unterschiede der Verzweigungswinkel. In drei anderen Versuchen war die Druckhöhe im Behälter 676 mm, der Verzweigungs-

Fig. 31.



winkel war im ersten 30°, im zweiten 45°, im dritten 90°; die entsprechenden während gleicher Zeiten aus beiden Zweigen zusammengenommen ausgeflossenen Wassermengen betrugen resp. 38374, 38367, 38187 g, auch diese drei Zahlen weichen so wenig von einander ab, dass man den obigen Satz als erwiesen betrachten kann. Dieser Satz lässt sich auch so ausdrücken: Die Summe der mittleren Geschwindigkeiten in beiden Stromzweigen ist unabhängig von dem Verzweigungswinkel.

Das Verhältniss, nach welchem sich der Stammstrom in die beiden Zweigströme theilt, hängt vom Verzweigungswinkel ab, und zwar fliesst von der gesammten Wassermasse um so mehr durch den die Verlängerung des Stammstromes bildenden Zweig, je grösser der Winkel ist. Aus einer grossen Anzahl von Versuchen leitet Jacobson Werthe des Verhältnisses $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ der mittleren Geschwindigkeiten in beiden Stromzweigen für verschiedene Verzweigungswinkel ab, welche in nachstehender Tabelle verzeichnet sind:

Verzweigungswinkel	30°	45°	90°	135°	150°
Verhältniss $\frac{v_2}{v_1}$	0,782	0,719	0,615	0,573	0,564

v_2 bedeutet die Geschwindigkeit des schrägen (bc_2 Fig. 31), v_1 des geradauslaufenden Zweiges (bc_1 Fig. 31). Nehmen wir also beispielsweise an, in den drei ersten oben angeführten Versuchen hätte die wahre in der gegebenen Zeit ausgeflossene Gesammtmasse 30500 g betragen, indem wir die Abweichungen von dieser mittleren Zahl als Fehler betrachten, so hätte sich diese Masse im ersten Versuche bei einem im Verzweigungswinkel von 45° zwischen den Röhren bc_1 und bc_2 vertheilt, im Verhältniss 1 : 0,719. Es müssten also von 30500 g 17743 durch die Röhre bc_1 und 12757 durch bc_2 abgeflossen sein. Im zweiten obigen Versuche bei einem Verzweigungswinkel von 135° hätte sich der Strom nach dem Verhältniss 1 : 0,573 getheilt und demnach hätte zu den 30500 g die Röhre bc_1 19390 und die Röhre bc_2 bloss 11110 geliefert.

Mit dem vorhin erwähnten Apparate hat Jacobson auch Versuche angestellt über Wasserströme in knieförmig geknickten Röhren. Um eine solche herzustellen, brauchte er ja nur den geradausgehenden Schenkel (bc_1) zu versperren, dann strömte das Wasser in der geknickten Röhre abc_2. In diesen Versuchen wurde allemal die mittlere Geschwindigkeit in der geknickten Bahn verglichen mit der Geschwindigkeit, welche dieselbe Druckhöhe des Speisebehälters in einer gleich langen geraden Bahn hervorbringt. Es hat sich dabei herausgestellt, dass der Unterschied, wie vorauszusehen war, um so grösser ausfällt, je grösser der Winkel ist,

welchen der zweite Röhrenschenkel mit der Verlängerung des ersten bildet. Indessen ist er selbst für sehr grosse Werthe dieses Winkels nicht sehr bedeutend. Es ist also der Verlust an lebendiger Kraft bei der Umknickung des Stromes nicht beträchtlich, besonders wenn die Druckhöhe am Anfange der Röhre bedeutend ist. So fand sich beispielsweise bei einer Druckhöhe von 602 mm im Behälter Folgendes: In derselben Zeit, in welcher das gerade Rohr ($a b c_1$ Fig. 31) 18450 Gewichtseinheiten Wasser lieferte, gab ein wie $a b c_2$ (Fig. 31 III) geknicktes Rohr, wo der Winkel zwischen dem zweiten Schenkel und der Verlängerung des ersten 150^0 betrug, 16 402 Gewichtseinheiten. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten im geraden und im gleich langen geknickten Rohre war also unter diesen Bedingungen 1 : 889, ein Verhältniss, was von der Gleichheit noch nicht sehr bedeutend abweicht.

Zweites Capitel.

Wellenbewegung in elastischen Röhren.

Bewegt sich eine Flüssigkeit in einem ausdehnbaren elastischen Schlauche, so können zwei sehr wesentlich verschiedene Fälle gedacht werden. Einmal nämlich kann die Strömung erhalten werden durch eine am Anfange des Schlauches mit unveränderter Stärke wirkende statische Kraft, dann wird der ganze Strömungshergang sich genau so gestalten, wie in einem starren Rohre. Es wird nämlich über kurz oder lang ein Beharrungszustand eintreten, der an jedem Punkte einen gewissen unveränderlichen Druck mit sich führt; der Schlauch wird sich an jeder Stelle so weit ausdehnen, dass die dadurch in seiner Wandung wach gerufenen elastischen Kräfte gerade dem von innen wirkenden Drucke das Gleichgewicht halten. Von da an wird der Schlauch seine Gestalt nicht mehr verändern können und sich folglich genau ebenso verhalten, wie eine starre Röhre. Wir brauchen also diesem Falle weiter gar keine Aufmerksamkeit zu schenken. Ganz anders gestaltet sich dagegen die Sache, wenn in den Anfang des Schlauches periodisch Flüssigkeitsmassen mit gewisser Geschwindigkeit geworfen werden. Es wird nämlich alsdann in dem ganzen Schlauche keine continuirliche Strömung zu Stande kommen, sondern in jedem Punkte desselben wird die Geschwindigkeit des daselbst befindlichen Theilchens ebenso periodisch beschleunigt und verzögert werden, möglicherweise bis Null, oder sogar eine entgegengesetzte Richtung annehmen. Nicht minder wird der Druck an jedem Punkte periodische Schwankungen erleiden. Man kann sich kurz so ausdrücken: wenn in den Anfang eines elastischen Schlauches (der bereits mit Flüssig-

keit gefüllt gedacht wird) eine neue Flüssigkeitsmasse geworfen wird, so schreitet eine Welle durch den Schlauch fort, d. h. ein gewisser Bewegungsvorgang der kleinsten Theilchen pflanzt sich continuirlich von Theilchen zu Theilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit fort, derart, dass nach Verlauf einer gewissen Zeit um einen gewissen Abstand weiter abwärts gelegene Theilchen in ähnlichen Bewegungszuständen begriffen sind, als vor Ablauf dieser Zeit die zuerst ins Auge gefassten.

Wird der Anfang des Schlauches geschlossen, sobald durch denselben die neue Flüssigkeitsmasse eingetreten ist, so dass durch diesen nichts zurücktreten kann, so unterscheidet sich die entstehende Wellenbewegung ausser durch viele andere Eigenthümlichkeiten von den bekannten Wellenbewegungen des Lichtes und Schalles noch ganz besonders dadurch, dass sie nicht in einer blossen Fortpflanzung eines Bewegungsvorganges besteht, sondern dass gleichzeitig eine Fortschaffung materieller Theilchen damit verbunden ist. Mit anderen Worten: nachdem die Welle den Schlauch durchlaufen hat und das Gleichgewicht wieder hergestellt ist, befinden sich die sämmtlichen Flüssigkeitstheilchen nicht mehr an denselben Stellen wie vor Beginn der Bewegung, sondern sie sind im Sinne der Wellenfortschreitung um eine gewisse Strecke fortgeschoben. Bekanntlich kehren umgekehrt die Theilchen einer Aethermasse, nachdem diese von einem Lichtwellenzuge durchsetzt wurde, genau in ihre alten Gleichgewichtslagen zurück. Ebenso thun die Wassertheilchen einer ruhenden Wassermasse, an deren Oberfläche (etwa durch einen hineingeworfenen Stein, dessen Grösse gegen die gesammte Wassermasse verschwindend klein ist) ein Wellenzug erregt wurde. Eine Welle, die in dem Sinne ihrer Fortpflanzung auch die ganze Masse, welche sie durcheilt, um eine gewisse Strecke weiter fördert, nennt man, nach Weber, eine „Bergwelle". Den entgegengesetzten Vorgang nennt man „Thalwelle". Dieser letztere kann in einem elastischen Schlauche entstehen, wenn man aus dem Anfange des unter gewisser Spannung gefüllten Schlauches etwas Flüssigkeit austreten lässt und dann die Oeffnung wieder verschliesst, offenbar werden successive immer weiter vom Anfange entfernte Flüssigkeitstheilchen in Bewegung gerathen. Die Welle (oder der Bewegungszustand) pflanzt sich also in der Richtung vom Anfange gegen das Ende hin fort. Dahingegen werden alle Theilchen am Schlusse der Bewegung dem Anfange näher liegen als vor Beginn derselben, denn sie müssen in dieser Richtung nachrücken, um die am Anfange durch das Ausfliessenlassen entstandene Lücke wieder zu füllen. In diesem Falle geschah also die Fortschreitung der Masse in entgegengesetztem Sinne wie die Fortschreitung der Welle.

Es ist vielleicht gut, die Bewegung in Bergwellen und Thalwellen zunächst für etwas einfachere Fälle zu studiren und nachher erst auf solche in elastischen Schläuchen genauer einzutreten. Ich schicke deshalb das von der Wellenlehre voraus, was Ernst Heinrich Weber als Einleitung einer Abhandlung über Wellen in elastischen Schläuchen

vorangestellt hat, der ich mich überhaupt in den folgenden Erörterungen genau anschliessen werde.

Der einfachste Fall ist der der Wellenbewegung in einer incompressibelen Flüssigkeit mit freier Oberfläche. Man unterscheidet auch hier eine positive oder Bergwelle von einer negativen oder Thalwelle. Bei einer Bergwelle ist die in Bewegung begriffene Flüssigkeitspartie über dem Niveau erhaben, bei der Thalwelle umgekehrt darunter vertieft. Wenn man bei freier Oberfläche der Flüssigkeit eine einzelne Bergwelle erregt, so entsteht allemal hinter ihr durch das beschleunigte Niedersinken, das vermöge der Trägheit über die Gleichgewichtslage hinaus geht, eine Thalwelle. Es kann dies aber durch Erregen einer neuen Bergwelle verhindert werden. Eine positive Welle wird unter anderen dadurch erregt, dass man eine mit Wasser gefüllte Röhre mit ihrem einen Ende in das Wasser eingetaucht hat, und nun das in ihr befindliche Wasser plötzlich niedersinken lässt, indem man z. B. das obere Ende der Röhre, das vorher geschlossen war, plötzlich öffnet. Eine Thalwelle erregt man, wenn man in einer solchen eingetauchten Röhre das Wasser plötzlich (etwa durch Ansaugen) zum Steigen nöthigt und darin zurückhält.

Man hat bei einer in der Richtung des Pfeiles B, Fig. 32, fortschreitenden Bergwelle den Vordertheil und den Hintertheil des Wellenberges zu unterscheiden. Jener liegt nach der Seite, wohin die Welle fortschreitet, dieser nach der, woher sie kam. Alle Wassertheilchen, die dem Vordertheile angehören, sind im Steigen, alle, welche dem Hintertheile angehören, im Sinken begriffen. Steigen und Sinken geschieht aber nicht in genau senkrechter Richtung, sondern alle Wassertheilchen der ganzen Bergwelle bewegen sich zugleich vorwärts. Jedes Wassertheilchen, durch dessen Ort die Bergwelle geht, beschreibt nämlich eine halbe Ellipse, die einem Halbkreis um so mehr ähnlich wird, je tiefer das Wasser (je entfernter der Boden) ist. Das Wassertheilchen bewegt sich also zuerst vorwärts und aufwärts, dann vorwärts und abwärts.

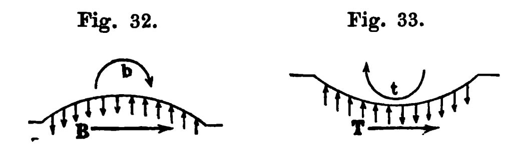
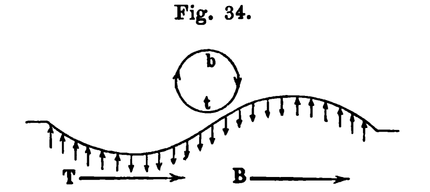


Fig. 32. Fig. 33.

Bei einer in der Richtung des Pfeiles T, Fig. 33, fortschreitenden Thalwelle sind, wie die kleinen Pfeile andeuten, alle zum Vordertheil gehörigen Wassertheilchen im Sinken, alle zum Hintertheil gehörigen im Steigen begriffen. Gleichzeitig aber bewegen sich die einen wie die anderen rückwärts, d. h. in entgegengesetzter Richtung als die Thalwelle fortschreitet. Jedes Theilchen, indem es erst zum Vordertheil, dann zum Hintertheil gehört, beschreibt eine Bahn, wie der gekrümmte Pfeil t andeutet, so dass es zuerst sich rückwärts und abwärts, hernach rückwärts und aufwärts bewegt. Wenn daher, wie in Fig. 34 (a. f. S.), ein Wellenberg und ihm folgend ein gleich grosses Wellenthal durch das Wasser

fortschreitet, so bewegt sich jedes Wassertheilchen in der elliptischen Bahn *bt*, die, wenn das Wasser tief ist, einem Kreise sehr ähnlich wird. Während also ein Wassertheilchen sich in dieser fast kreisförmigen Bahn einmal herumbewegt, schreitet die Welle um ihre Länge, d. h. um die Länge des Wellenberges und des Wellenthales fort, natürlich auch dann, wenn die Welle bei gleicher Höhe 50- oder 100mal länger ist, als die hier gezeichnete; in der Wirklichkeit sind aber die Wellen in

Fig. 34.

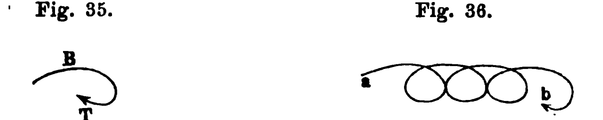


der That im Verhältniss zu ihrer grossen Länge in der Regel sehr niedrig, während sie hier der Raumersparniss wegen hoch und kurz gezeichnet sind.

Wenn eine Reihe gleicher Wellen, worin gleich grosse Berge und Thäler abwechselnd auf einander folgen, ein Wassertheilchen in Bewegung setzen, so vollendet dasselbe immer von Neuem einen Umlauf in derselben Bahn, so oft eine neue Welle den Ort passirt, und kehrt daher immer auf seinen vorigen Ort zurück. Wir wissen bereits, dass diese Bahn eine in verticaler Ebene enthaltene Ellipse ist, die einem Kreise um so ähnlicher wird, je entfernter, um so gestreckter und einer horizontalen Linie ähnlicher aber, je näher dem Boden das betreffende Theilchen liegt. Anders verhält es sich aber, wenn die wellenerregende Ursache von der Art ist, dass eine Reihe von Wellen mit grossen Bergen und kleinen Thälern entsteht.

Fig. 35 zeigt eine Bahn, die ein Wassertheilchen durchläuft, wenn der Wellenberg ungefähr doppelt so gross ist, als das darauf folgende Wellenthal. Unter diesen Umständen bleibt das Wassertheilchen nicht

Fig. 35. Fig. 36.



an seiner Stelle, sondern rückt bei jeder Welle ein Stück vorwärts, so viel nämlich, als in der Fig. 35 die Spitze des gekrümmten Pfeiles von seinem Anfange entfernt ist. Eine Reihe solcher Wellen kann also das Wassertheilchen in eine bedeutende Entfernung von seiner Anfangslage bringen, so führen es vier Wellen von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit von *a* nach *b*, Fig. 36, auf einem Wege, den die Linie der Figur darstellt.

Unter gewissen Umständen kann das Wellenthal äusserst klein sein im Verhältniss zum Wellenberge oder sogar ganz fehlen, z. B. wenn die Wellen am Anfange eines schmalen, mit Wasser erfüllten Grabens dadurch erregt werden, dass periodisch und schnell genug hinter einander gewisse Mengen Wasser hineingepumpt werden. Wenn das Pumpen so schnell geschieht, dass gerade, nachdem der Wellenberg um seine Länge fortgeschritten ist, ein neuer Wellenberg gebildet wird, so entstehen gar keine Wellenthäler (unter dem Niveau vertiefte Wellen), sondern nur eine Reihe von Wellenbergen und dann rücken die Theilchen mit dem Durchgange jedes neuen Wellenberges vorwärts.

Aehnlich verhält es sich nun auch mit den Wellenthälern. Wenn am Anfange eines schmalen, mit Wasser gefüllten Grabens durch eine Saugpumpe periodisch Wasser eingesaugt wird, so entsteht bei jedem Saugen ein Wellenthal, und wenn das zweite Einsaugen nicht schnell genug auf das erste folgt, ein kleinerer Wellenberg. Beide laufen im Graben weiter fort und ein irgendwo darin befindliches Wassertheilchen beschreibt, während eine Welle seinen Ort passirt, die Bahn TB, Fig. 37, geht also zuerst ein grösseres Stück rückwärts, hierauf ein kleineres vorwärts. Auf diese Weise bewegt sich ein Wassertheilchen, das durch eine

Fig. 37. Fig. 38.



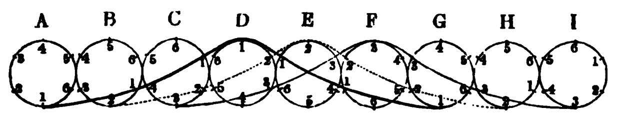
Reihe von Thalwellen ohne dazwischen liegende Bergwellen in Bewegung gesetzt wird, mit jeder neuen Welle ein Stück rückwärts, und nähert sich also dem Orte, von dem aus die Thalwellen erregt werden. Vier auf einander folgende Thalwellen mit sehr kleinen, dazwischen liegenden Bergwellen würden beispielsweise ein Wassertheilchen die in Fig. 38 dargestellte Bahn beschreiben lassen und es von a nach b bringen, wenn sie selbst in der Richtung des Pfeiles T sich fortpflanzen.

Wenn auch in den zuletzt beschriebenen Fällen gleichzeitig mit der Wellenfortpflanzung eine Fortschaffung von Masse geschah, so bleibt erstere doch immer nur das Fortschreiten einer Form, und ist auch hier nicht zu verwechseln mit dem Fortschreiten eines Körpers. Bei Thalwellen liegt dies am klarsten am Tage, weil die Fortschaffung der Masse dabei in entgegengesetzter Richtung geschieht, als das Fortschreiten der Form. Am leichtesten wäre noch der andere Fall, wo blosse Bergwellen die Wassertheilchen in ihrer eigenen Fortpflanzungsrichtung befördern, der Verwechselung mit einem Strömen ausgesetzt. Doch auch hier gewahrt man den Unterschied leicht, wenn man bedenkt, dass, während eine 2 Zoll hohe Bergwelle einen 100 Fuss langen, sehr tiefen Graben durchläuft, ein an der Oberfläche liegendes Wassertheilchen nur 2 Zoll fortgeschoben wird. Folgen nun freilich immer neue Bergwellen

nach, so wird das Wassertheilchen durch jede um neue 2 Zoll weiter geschafft. Wird durch das Abfliessen des Wassers der am Ende des Grabens anlangenden Wellen verhindert, dass die Bergwellen reflectirt werden und den Graben in umgekehrter Richtung durchlaufen, so kann auf diese Weise ein Wassertheilchen durch eine lange Reihe von Bergwellen allmälig und absatzweise vom Anfange des Grabens bis zum Ende fortgeführt werden. Was hier vom Fortrücken der Wassertheilchen durch positive und negative Wellen gesagt wurde, gilt auch von den in einer elastischen ausdehnbaren, mit Wasser erfüllten Röhre entstehenden Wellen, wie bereits weiter oben vorläufig angedeutet wurde.

Will man sich noch eine ganz anschauliche Vorstellung von der Art und Weise machen, wie die Wellenbewegung an einer freien Wasseroberfläche aus der Kreisbewegung der einzelnen Wassertheilchen resultirt, so zergliedere man die folgenden Figuren. Fig. 39 zeigt bildlich, wie eine Welle, bestehend aus einem Berge und zwei halben Thälern, also vom tiefsten Punkte des einen bis zum tiefsten Punkte des folgenden Thales reichend, um $^1/_6$ ihrer Länge fortschreitet, so dass sich ihr Gipfel von D nach E bewegt, und welche Lage sie hierauf annimmt, wenn sie um ein zweites Sechstel fortgeht, so dass ihr Gipfel von E nach F gelangt.

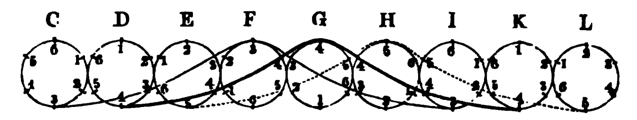
Fig. 39.



Es muss dabei also jedes Theilchen an der Oberfläche erst $^1/_6$ und dann ein zweites Sechstel seiner Kreisbahn durchlaufen. Unter A bis I sind die Kreisbahnen von neun solchen Theilen verzeichnet. An jeder einzelnen sind sechs Punkte bezeichnet, die um $^1/_6$ der Bahn von einander entfernt sind. Im ersten Augenblicke befinden sich die Theilchen an den Punkten ihrer respectiven Bahnen, welche auf der ersten stark ausgezogenen Wellenlinie liegen und die als zusammengehörige erste Lagen alle mit der Ziffer 1 bezeichnet sind. Die zweite Lage der Welle geht daraus hervor, wenn man alle Theilchen in demselben Sinne (wie die Zeiger einer Uhr) um $^1/_6$ ihrer Bahn fortschreiten lässt, sie kommen dann in die mit der Ziffer 2 bezeichneten Punkte, und die Verbindung aller dieser Punkte ergiebt die Oberfläche in der zweiten um $^1/_6$ ihrer Länge fortgeschrittenen Lage der Welle, die in der Figur punktirt gezeichnet ist. Indem von Neuem alle Oberflächentheilchen im Sinne eines Uhrzeigers $^1/_6$ ihrer Bahn durchlaufen, kommen sie in die mit 3 bezeichneten Punkte, deren Verbindung die dritte Lage der Wellenoberfläche (schwach ausgezogene Linie der Figur) ergiebt. In Fig. 40 und 41 ist dann in derselben Weise der weitere Verlauf der Welle gezeichnet, indem jedesmal die Punkte wieder durch Wellenlinien verbunden sind, die die Wassertheilchen nach Verfluss eines neuen Sechstels ihrer ganzen

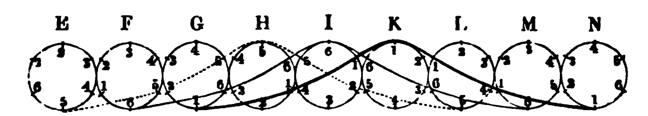
Umlaufszeit einnehmen. Fig. 40 beginnt mit der letzten Lage in der Fig. 39 und ebenso Fig. 41 mit der letzten Lage in Fig. 40. Wollte man also die Vorstellung von dem ganzen Hergange in seiner natürlichen Lage haben, so müsste man die gleichbenannten Kreise der drei Figuren

Fig. 40.



(*E*, *F*, *G*, *H*, *I*) auf einander legen. Bei der letzten Lage hat das Theilchen, dessen Bahn bei *G* gezeichnet ist, wieder den tiefsten Punkt seiner

Fig. 41.



Bahn eingenommen, den es in der ersten Lage hatte, und der Wellengipfel ist um die ganze Länge der Welle nach rechts verschoben.

Eine Wellenbewegung kann durch verschiedene Kräfte unterhalten werden, in den soeben beschriebenen Fällen that es die Schwerkraft. Wellen, die an einem durch ein Gewicht gespannten biegsamen Faden fortschreiten, werden durch die spannende Kraft des Gewichts, also nur mittelbar durch die Schwere unterhalten. Bei den Wellen, welche an einem elastischen, zwischen zwei festen Punkten ausgespannten Faden erregt werden, kommt zu der spannenden Kraft der Wirbel noch die Elasticität des Fadens hinzu. Complicirter ist der Fall, wenn die Wellenbewegung in einer von incompressibeler Flüssigkeit erfüllten biegsamen und dehnbaren elastischen Röhre stattfindet.

Es kann keineswegs dieser Vorgang dadurch erklärt werden, dass man das elastische Rohr ansieht, als aus unzähligen, der Länge nach dicht neben einander aufgespannten Saiten bestehend [1]), und die Wellenfortpflanzungsgesetze in solchen auf die Röhre überträgt, wobei man das darin enthaltene Wasser bloss als angehängte träge Masse wirkend denkt, die wie der Ueberzug einer mit Draht übersponnenen Saite, die Wellen derselben verlangsamt. Es wird vielmehr in unserem gegenwärtigen Falle die Welle dadurch fortgepflanzt, dass die bewegte Flüssigkeit die Röhrenwand in einer gewissen Strecke ausdehnt und spannt, und der gespannte Theil der Wand die Flüssigkeit bewegt, indem er auf sie drückt und dadurch wieder die Ausdehnung und Anspannung der nächsten Abtheilung der Röhre hervorbringt. Ein gespannter Theil der

---

[1]) H. Frey, Versuch einer Theorie der Wellenbewegung des Blutes in den Arterien. Müller's Archiv, 1845, 169.

elastischen Wand wirkt nicht unmittelbar bewegend auf den benachbarten Theil der Wand, sondern nur mittelbar durch die incompressibele Flüssigkeit.

Eine den Verhältnissen entsprechende Vorstellung erhält man, wenn man sich die von der Flüssigkeit erfüllte und ausgedehnte elastische Röhre, Fig. 42, durch unveränderliche Grenzen, die den Querschnitten der Röhre entsprechen, in Abtheilungen (Röhrenelemente) *a, b, c, d, e, f, g, h, i* getheilt denkt. Ein Stempel möge Wasser aus der unausdehnbaren Röhre *k* in die ausdehnbare *ia* mit einer anfangs zunehmenden, hernach abnehmenden Geschwindigkeit hereingedrängt und dadurch die Röhre so erweitert haben, dass das in den verschiedenen Röhrenabschnitten enthaltene Wasser die durch die Zahl der punktirten Pfeile angedeuteten Geschwindigkeiten angenommen hat. In einem einzelnen Röhrenabschnitte wird nun offenbar der durch die Spannung der ringförmigen Wand hervorgebrachte Druck um so höher sein, je mehr die Wand über ihren natürlichen Umfang hinaus ausgedehnt worden ist. Mag der Druck, welcher so in den beiden Abschnitten *e* und *d*, deren ringförmige Wand am meisten ausgedehnt wurde, entsteht, durch die Anzahl der darin ge-

Fig. 42.

zeichneten ausgezogenen Pfeile gemessen sein, sowie auch in jedem der anderen Abschnitte *a, b, c, f, g, h*, deren Wand eine geringere Ausdehnung erlitten hat, welchem Umstande gemäss also auch in *b* weniger ausgezogene Pfeile als in *c* u. s. f. eingezeichnet sind. Man übersieht alsdann leicht, dass die in den Abschnitten von *a* bis *d* enthaltenen Wassertheilchen von rechts her einen stärkeren Druck erfahren als von links, folglich in ihrer bereits erlangten, nach rechts gerichteten Geschwindigkeit verzögert werden. Umgekehrt erfahren die in den Abschnitten von *e* bis *h* (resp. auch *i*) enthaltenen Wassertheilchen von links her einen stärkeren Druck und werden dadurch in ihrer ebenfalls nach rechts gerichteten Geschwindigkeit beschleunigt. Anschaulich ist das Ganze dem Auge dargestellt durch die Richtung der Pfeilspitzen. Beachten wir ferner, dass die Abschnitte *a* bis *d* nach rechts eine grössere Oeffnung kehren als nach links, dass also die in jedem herrschende Geschwindigkeit im nächsten Zeittheilchen mehr Flüssigkeit nach rechts hinausschafft als von links herein; das Umgekehrte gilt von den Abschnitten *e* bis *h*. Es wird also in den Abschnitten *a* bis *d* ausser der Verzögerung auch noch Verminderung des Inhaltes und in den Abschnitten *e* bis *h* ausser der Beschleunigung Vermehrung des Inhaltes stattfinden. Am Ende des

nächsten Zeittheilchens wird also der höchste Anfüllungsgrad von de nach ef fortgeschritten sein. Der Abschnitt a kommt vollständig zur Ruhe und kehrt zum normalen Füllungsgrade zurück, dagegen muss in demselben Zeitmomente in der Abtheilung i, in der bis dahin keine Bewegung des Wassers und keine Ausdehnung des Rohres stattfand, das Wasser in Bewegung gesetzt und die Röhrenwand ausgedehnt werden, und auf diese Weise schreitet die Welle um eine Abtheilung in der Richtung der punktirten Pfeile fort.

Für diejenigen Leser, welchen die Elemente der höheren Analysis geläufig sind, will ich die vorstehende Betrachtung in die Formen der Differentialrechnung kleiden[1]), so dass daraus allgemeine Schlüsse gezogen werden können. In einer cylindrischen Röhre mit elastischer Wand sei eine incompressibele Flüssigkeit von der Dichtigkeit ϱ eingeschlossen (wir nennen sie im Folgenden kurz Wasser). Die elastischen Kräfte der Wand seien so gross, dass eine sehr bedeutende Drucksteigerung eines Abschnittes schon durch eine sehr geringe Erweiterung — Dehnung der Wand — verursacht wird. Ferner nehmen wir an, dass nur solche Bewegungen im Rohre vorkommen, bei welchen alle in einem Querschnitte enthaltenen Wassertheilchen mit merklich gleicher Geschwindigkeit in der Richtung der Röhrenaxe fortschreiten. Es sollen endlich nur solche Bewegungszustände betrachtet werden, bei welchen diese Geschwindigkeit einen geringen Werth hat. Bezeichnen wir den variabelen Röhrenhalbmesser mit r und die Geschwindigkeit der Wassertheilchen mit v, so wird die Wassermasse, welche durch einen bestimmten Querschnitt während eines unendlich kleinen Zeitabschnittes dt geht, durch $\pi \varrho r^2 v dt$ ausgedrückt. Durch einen längs der Röhrenaxe um das unendlich kleine Stückchen dx vom ersteren abstehenden Querschnitt wird demnach während desselben Zeittheilchens die Wassermasse $\pi \varrho (r + dr)^2 \times (v + dv)\, dt$ gehen. Zieht man diese Wassermasse von der ersten ab, so erhält man den Zuwachs, welchen der zwischen den beiden betrachteten Querschnitten enthaltene unendlich kleine Röhrenabschnitt während der Zeit dt an Wasser erhält. Die Differenz ist aber mit Weglassung der Grösse dritter Ordnung

$$-\pi \varrho r^2 dv\, dt - 2\pi \varrho r v\, dr\, dt.$$

Will man sich aber mit einer ersten sehr gröblichen Annäherung begnügen, so kann man auch noch das zweite Glied im Ausdrucke der Differenz unterdrücken, da wir ja nur Bewegungen von kleiner Geschwindigkeit betrachten wollen und da nach der obigen Voraussetzung über die elastischen Kräfte der Wand dr im Verhältniss zu den anderen Differentialen immer klein, um so mehr also das Product $v\,dr$ gegen das im anderen Gliede vorkommende Product $r\,dv$ sehr klein sein wird. Der betrachtete Zuwachs kann also $=$ $-\pi \varrho r^2 dv\, dt$ gesetzt werden. Derselbe Zuwachs lässt sich aber andererseits ausdrücken als Volumzunahme des Abschnittes mal Dichtigkeit des Wassers, also durch

$$2\, \pi \varrho r\, dr\, dx.$$

Wir haben also die Gleichung:

$$-\pi \varrho r^2 dv\, dt = 2\pi \varrho r\, dr\, dx$$

oder

$$-\frac{dv}{dx} = \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

[1]) Ich folge dabei einer Abhandlung von W. Weber (Berichte der sächsischen Gesellschaft 1866) und einer Arbeit von J. v. Kries (Festschrift der 56. Versamml. deutscher Naturforscher zu Freiburg im Breisgau.

Der Druck in einem zwischen zwei Querschnitten enthaltenen Röhrenabschnitte hängt nun offenbar ab von der Spannung des zwischen den Querschnitten enthaltenen ringförmigen Wandstreifens und diese Spannung nach den Gesetzen der Elasticität von der Dehnung, welche der Streif über seine natürliche Länge hinaus erlitten hat, für kleine Aenderungen der betreffenden Grössen ist ihre gegenseitige Abhängigkeit einfach die Proportionalität. Diese Dehnung oder die Vergrösserung der Peripherie des Querschnittes ist aber der Vergrösserung seines Halbmessers proportional und folglich besteht auch Proportionalität zwischen der Spannung resp. dem Drucke und der Vergrösserung des Halbmessers. Wenn also ein bestimmter Druck P einer bestimmten Vergrösserung E des Halbmessers entspricht, so wird das bestimmte Verhältniss $\frac{E}{P} = a$ auch zwischen jeder Vergrösserung des Halbmessers dr und der entsprechenden Vergrösserung des Druckes dp bestehen, d. h. es ist $\frac{dr}{dp}$ constant $= a$ oder $dr = a\,dp$. Nun sei dp der Ueberschuss des Druckes beim zweiten der oben betrachteten beiden Querschnitte über den beim ersten, welche beide Querschnitte um dx von einander abstehen, dann wirkt auf die zwischen beiden Querschnitten eingeschlossene Wassermasse die bewegende Kraft $-\pi r^2 dp$ (Druck $\times$ Oberfläche), das Minuszeichen ist zu setzen, weil der wirkende Drucküberschuss bei positivem dp den wachsenden Abscissen entgegengerichtet ist. Nach dem allgemeinen Bewegungsgesetze ist aber die Bewegungsgrösse, welche diese Kraft in dem Zeittheilchen hervorbringt $= -\pi r^2 dp\,dt$ und andererseits ist diese Bewegungsgrösse auszudrücken als Product aus der Masse $\pi \varrho r^2 dx$, auf welche gewirkt wird, und dem Geschwindigkeitszuwachs dv, welchen sie erhält; man hat also:

$$\pi \varrho r^2 dx\,dv = -\pi r^2 dp\,dt$$

oder

$$\varrho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Wir können nun die Gleichung (1) durch Einsetzen des oben gefundenen Werthes für $dr = a\,dp$ umformen in $-\frac{dv}{dx} = \frac{2a}{r}\frac{dp}{dt}$, nach t differentiirt giebt sie

$$-\frac{dv}{dx\,dt} = \frac{2a}{r}\frac{d^2p}{dt^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

Bei dieser Differentiation lassen wir zufolge der eingangs gemachten Bemerkung r für constant gelten.

Durch Differentiation der Gleichung (2) nach x erhalten wir

$$\frac{d^2v}{dt\,dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d^2p}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

und durch Combination von (1 a) mit (2 a)

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{r}{2\varrho a}\frac{d^2p}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Ebenso erhalten wir durch Differentiation der umgeformten Gleichung (1) nach x und der Gleichung (2) nach t und Combination der beiden entstehenden Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{r}{2a\varrho}\frac{d^2v}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der Gleichung (3) genügt jeder Ausdruck

$$p = \varphi\left(x - \sqrt{\frac{r}{2\varrho a}} \cdot t\right) + \psi\left(x + \sqrt{\frac{r}{2\varrho a}}\, t\right)$$

und der Gleichung (4) ebenso jeder Ausdruck

$$v = \varphi_1\left(x - \sqrt{\frac{r}{2\varrho a}}\, t\right) + \psi_1\left(x + \sqrt{\frac{r}{2\varrho a}}\, t\right),$$

wo φ und ψ ganz beliebige Functionen bedeuten, und wenn wir uns einen einseitig begrenzten Schlauch vorstellen, an dessen Anfang Bewegungen oder Druckschwankungen hervorgebracht werden, so kann man sich auf das erste Glied in beiden Ausdrücken beschränken.

Die als Schlussergebniss aus der mathematischen Entwickelung hervorgehenden Ausdrücke für p und v, namlich $p = \varphi\left(x - \sqrt{\frac{r}{2a\varrho}} \cdot t\right)$ und $v = \varphi_1\left(x - \sqrt{\frac{r}{2a\varrho}} \cdot t\right)$ bedeuten offenbar in Worten Folgendes: Wenn zur Zeit o im Anfangstheile des Schlauches z. B. von $x = o$ bis $x = d$ ein gewisser Bewegungszustand und gewisse Druckunterschiede bestehen, so werden zur Zeit t genau dieselben Druckunterschiede und Geschwindigkeiten vorhanden sein in einem Röhrenabschnitte von der Länge d, dessen Anfang vom Anfange der Röhre absteht um die Entfernung $\sqrt{\frac{r}{2\varrho a}}\, t$, denn die Grösse $x - \sqrt{\frac{r}{2\varrho a}} \cdot t$, von welcher allein Druck und Geschwindigkeit abhängen, hat ja zur Zeit t für irgend einen Punkt jenes Abschnittes genau den Werth, welchen sie zur Zeit o für den entsprechenden Punkt des gleich langen Anfangsabschnittes hatte.

Die mathematische Entwickelung des Problemes in Worten ausgedrückt giebt folgende Sätze: Wenn zu irgend einer Zeit am Anfange des Schlauches Bewegungen und Druckveränderungen (etwa durch Einpressen einer neuen Flüssigkeitsmenge, wie oben angenommen, gesetzt werden, so pflanzen sich diese längs des Schlauches unverändert als „Welle" fort mit constanter Geschwindigkeit $\left(\sqrt{\frac{r}{2a\varrho}}\right)$, welche direct proportional ist der Quadratwurzel aus dem Röhrenhalbmesser r, umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit (ϱ) der Flüssigkeit und der Quadratwurzel aus einer Grösse a, welche von der Elasticität der Röhrenwand abhängt. Man sieht, dass diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit, da in ihrem Ausdrucke Druck und Geschwindigkeit nicht vorkommen, von der Beschaffenheit des fortgepflanzten Bewegungszustandes oder den fortgepflanzten Druckschwankungen unabhängig ist, dass sich also z. B. eine negative Welle, d. h. eine Druckminderung und rückläufige Bewegung, ebenso schnell fortpflanzt wie eine positive, und eine starke Welle ebenso schnell als eine schwache. Auch hat der mittlere Druck im ganzen Schlauche nur in sofern auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Einfluss, als dadurch der Halbmesser r desselben beeinflusst wird. Abhängig zeigt sich dagegen die Geschwindigkeit der Wellenfortpflanzung erstens von der Dichtigkeit der bewegten Flüssigkeit, indem ihr Werth der Quadratwurzel aus derselben umgekehrt proportional erscheint. So würden sich also z. B. in demselben Schlauche,

wenn er mit Quecksilber gefüllt wäre, Wellen etwa 3,7 mal langsamer fortpflanzen als wenn er mit Wasser gefüllt wäre, da die Wurzel aus der Dichtigkeit des Quecksilbers (= 13,5) etwa 3,7 mal grösser ist als die Wurzel aus der Dichtigkeit des Wassers (= 1). Die Grösse $\frac{r}{a}$, deren Quadratwurzel ferner der Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional ist, hängt von der Wandbeschaffenheit des Schlauches und seinem Halbmesser ab und zwar ist $\frac{r}{a}$ derjenige Druck, welcher den Halbmesser (unter Voraussetzung der Proportionalität zwischen Halbmesser und Druck) verdoppeln würde, denn nach der (oben S. 120 gegebenen) Definition der Grösse a ist $\frac{1}{a} = \frac{P}{E}$, d. h. derjenige Druck, welcher eine Vergrösserung des Halbmessers um eine Längeneinheit hervorbringt, also $r \cdot \frac{1}{a}$ derjenige Druck, welcher eine Vergrösserung des Halbmessers um r Längeneinheiten, d. h. eine Verdoppelung des Halbmessers, hervorbringt.

Um die Ergebnisse der Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, stellte E. H. Weber Versuche an mit einem Kautschukschlauche von 16,5 mm Halbmesser. Um die seine Wandbeschaffenheit kennzeichnende Constante a zu bestimmen, wurde seine Erweiterung gemessen, wenn er gefüllt war unter dem Drucke einer Wassersäule von 3500 mm Höhe. Der Druck als bewegende Kraft in unseren Gleichungen muss, wenn Secunde, Millimeter und Milligramm als Einheiten gelten, gleich gesetzt werden der 9811 fachen[1]) Anzahl von Milligrammen, welche auf jedem Quadratmillimeter Oberfläche lasten. Der Druck ist also im vorliegenden Falle $P = 3500 \times 9811 = 34\,338\,500$, die zugehörige Vergrösserung des Schlauchhalbmessers fand sich durch Messung = 2,75 mm, also war $a = \frac{2,75}{34\,338\,500} = \frac{1}{12\,486\,700}$ und da die Dichtigkeit des Wassers = 1 ist, hat man schliesslich

$$\sqrt{\frac{r}{2a\varrho}} = \sqrt{\frac{16,5 \times 12\,486\,700}{.2}} = 10\,033 \text{ mm per Secunde.}$$

Die directe Beobachtung ergab statt dessen eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 11 255 mm per Secunde. Die Abweichung von der berechneten Zahl 10 033 ist so gering, dass man sieht, die entwickelte Theorie stellt trotz den Vereinfachungen die Thatsachen so genau dar, wie man es von einer ersten Annäherung nur erwarten kann. E. H. Weber hat dann auch noch andere Versuche über die Fortpflanzung von Wellen in einem Kautschukschlauche von 27,5 mm lichtem Durchmesser und

[1]) 9811 mm ist die bekannte Beschleunigung durch die Schwere.

4 mm Wandstärke angestellt. Er wurde unter dem Drucke einer Wassersäule (deren Höhe variirt werden kann) mit Wasser gefüllt und dann geschlossen; an einer bestimmten Stelle war die Wand mit einem Fühlhebel verbunden, der durch seinen Ausschlag anzeigte, wann die Aenderung des Lumens, d. h. die Welle an diesem Punkte anlangte. Die Welle selbst konnte an einem Ende der ganzen Röhre in einem bestimmten Augenblicke, etwa einem Chronometerschlage, erregt werden. Eine Bergwelle wurde erregt, indem man die mit Wasser erfüllte Röhre in einer Strecke von gewisser Länge möglichst schnell und immer auf dieselbe Weise zusammendrückte, z. B. indem man mittelst eines Holzkästchens die Röhre auf dem Tische andrückte und die eingeschlossene Flüssigkeit in den nächsten Theil der Röhre auszuweichen nöthigte. Wenn man das niedergedrückte Kästchen plötzlich wieder erhebt, so dass die benachbarte Flüssigkeit in den frei gewordenen Raum hineinstürzt, so erregt man eine Thalwelle, was natürlich auch zu einem ebenso bestimmten Zeitpunkte geschehen kann. Dadurch, dass man bei Erzeugung der Bergwelle die Wände der Röhre nicht bis zu gegenseitiger Berührung, sondern nur bis auf einen gewissen Punkt zusammendrückt, kann man auch noch die lebendige Kraft der Welle variiren. Es kann so die Zeit gemessen werden, welche die Welle braucht, um bis zu der mit dem Fühlhebel versehenen Stelle fortzuschreiten, ferner die Zeit, welche sie braucht, um von da weiter bis zum Ende, von hier reflectirt wieder zurück bis zum Fühlhebel zu kommen, dann die Zeit, welche verstreicht, bis sie von hier auf dem Rückwege bis zum Anfange, von da abermals reflectirt und wieder bis zum Fühlhebel kommt u. s. w. Alle diese Wegstrecken sind aber ebenfalls messbar und dienen, verglichen mit den darauf zugebrachten Zeiten, zur Bestimmung der gesuchten Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Es fand sich aus derartigen Versuchen:

1. Die Spannung des Rohres ist ohne auffallenden Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Der geringe Einfluss der Spannung, welcher noch wahrgenommen wurde, bestand aber darin, dass die Welle um so langsamer fortschreitet, je grösser die Spannung ist. Wurde nämlich die Röhre unter dem Drucke einer Wassersäule von 8 mm Höhe gefüllt und geschlossen, so durchliefen die Bergwellen die Strecke von 9620 mm in 0,752 Secunden. Wurde aber die Röhre unter dem Drucke einer Wassersäule von 3,5 m Höhe gefüllt und geschlossen, war also die Spannung 437 mal grösser als im vorigen Falle, so durchliefen die Bergwellen die Strecke von 9860 mm in 0,864 Secunden, also eine Strecke von 9620 mm in 0,843 Secunden.

2. Positive Wellen (Bergwellen oder Spannungswellen) und negative Wellen (Thalwellen, Erschlaffungswellen) scheinen mit derselben Geschwindigkeit fortzuschreiten.

Bei der Spannung von 8 mm Wasserdruck durchliefen eine Strecke von 9620 mm:

die positiven Wellen in 0,752 Secunden,
die negativen Wellen in 0,892 „

Differenz 0,140 Secunden.

Bei einer Spannung von 3,5 m Wasserdruck durchliefen eine Strecke von 9860 mm:

die positiven Wellen in 0,864 Secunden,
die negativen Wellen in 0,888 „

Differenz 0,024 Secunden.

3. Die Verschiedenheit der lebendigen Kräfte der Welle scheint nicht eine verschiedene Geschwindigkeit ihres Fortschreitens zu bedingen, denn die Welle schritt mit derselben Geschwindigkeit fort, es mochte, um eine Welle zu erregen, eine grosse oder kleine Abtheilung der Röhre zusammengedrückt werden, es mochte die Zusammendrückung geschwind oder langsam, mit grösserer oder kleinerer Kraft geschehen, und es mochte endlich die Röhrenabtheilung ganz zusammengedrückt werden, so dass dieselbe sich ganz entleerte, oder nur halb, so dass die Röhre an dem Orte, wo die Welle erregt wurde, sich nur etwa zur Hälfte entleerte. Hiermit stimmt überein, dass die Wellen nicht langsamer fortschreiten, nachdem sie schon einen grossen Weg zurückgelegt und durch Reibung an lebendiger Kraft verloren haben.

4. Die Röhre aus vulcanisirtem, möglichst elastischem Kautschuk erweiterte sich, während der Wasserdruck von 8 mm bis zu 3,5 m Druckhöhe gesteigert wurde, in ihrem Durchmesser von 35,5 mm bis zu 41 mm, also um 0,154 ihres Durchmessers. Sie verlängerte sich von 9620 bis zu 9860, also um 0,026 ihrer Länge. Die Verlängerung war also verhältnissmässig etwa 6 mal kleiner, als die Erweiterung.

5. Bei starker Spannung der Röhre verschwand die Wellenbewegung schneller, als bei schwacher Spannung.

6. Wenn eine positive Welle (Spannungswelle, Bergwelle) erregt wurde, so entstand nicht ohne besondere neue Ursache hinter derselben eine negative Welle (Thalwelle, Erschlaffungswelle).

Sehr abweichende Erscheinungen werden in Röhren beobachtet, deren sehr biegsame Wände, wie z. B. die der Därme, gefaltet sind und aus geschlängelten Fäden bestehen, wenn die Röhren so mit Flüssigkeit erfüllt werden, dass sie nur schwach gespannt sind. Denn unter diesen Umständen erweitern sich die Röhren zunächst nicht durch eine Ausdehnung der Substanz ihrer Fasern, sondern durch eine Geradlegung und Entfaltung der Fasern und der Falten, und erst nachdem die Ausdehnung der Röhre den Grad erreicht hat, wobei die Geradlegung und Entfaltung erfolgt ist, wird die Elasticität der Substanz der Röhrenwandung wirksam.

Die mittlere und innere Arterienhaut besteht nicht aus jenen wellenförmig geschlängelten Fäden, welche Zellgewebe und Sehnenbündel bilden,

sondern aus concentrischen, gleichartigen, elastischen Lamellen. Man hat sich daher wohl vorzusehen, ehe man die an mässig ausgedehnten Därmen beobachteten Erscheinungen auf die Lehre vom Pulse anwendet. Inzwischen sind die Versuche an Därmen doch sehr lehrreich, weil sie erlauben, die Wellen unmittelbar mit dem Auge zu verfolgen und die verschiedenen Erscheinungen direct zu beobachten. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nämlich über 10 mal kleiner, als an der Kautschukröhre, die zu den oben beschriebenen Versuchen diente. Man unterscheidet hier mit dem blossen Auge Bergwellen und Thalwellen, sieht ihre Reflexion am geschlossenen Ende, man sieht das ungestörte Durcheinanderhindurchgehen zweier Bergwellen und Thalwellen, oder auch die Interferenz, die entsteht, wenn eine Thalwelle einer gleich grossen Bergwelle begegnet, und sieht, wie nachher beide ihren Lauf ungestört fortsetzen.

Ersetzt man ein Stückchen des Darmes durch eine gleichweite Glasröhre, so kann man an suspendirten Staubtheilchen die Bewegung der die Welle bildenden Wassertheilchen studiren. Sie bewegen sich, während eine Bergwelle vorübergeht, ein Stück vorwärts, in derselben Richtung, in welcher die Welle fortschreitet; wenn aber eine Thalwelle vorbeigeht, ein Stück in entgegengesetzter Richtung. Man nimmt auf diese Weise wahr, dass einer erregten Bergwelle eine kleine Thalwelle nachfolgt, wenn auch die Erregung so geschieht, dass dadurch unmittelbar keine Thalwelle entstehen kann, z. B. durch die plötzliche Zusammendrückung eines Stückes von Darm, die dauernd erhalten wird. Eine solche nachfolgende Thalwelle ist etwa $1/5$ so gross, als die vorangehende Bergwelle. Natürlich misst man diese Grössen durch die von den sichtbaren Theilchen vorwärts und rückwärts beschriebenen Bahnen.

Im Folgenden sind noch die Gesetze für die Wellen in einem Darme zusammengestellt, insbesondere sofern sie von den oben für die Kautschukröhre gegebenen abweichen.

1. Die Verschiedenheit der Spannung der im Darm enthaltenen Flüssigkeit oder, was dasselbe ist, der Röhrenwände, hat einen sehr bedeutenden Einfluss auf die Geschwindigkeit der Wellen, und zwar bei positiven und negativen in gleichem Grade.

2. Positive Wellen (Bergwellen, Spannungswellen), die in derselben Weise erregt wurden, wie an der Kautschukröhre, schreiten beträchtlich schneller fort als negative (Thalwellen, Erschlaffungswellen), auch dann, wenn zum Behufe der Erregung einer Thalwelle ein nur halb durch Druck entleertes Anfangsstück des Darmes plötzlich von dem drückenden Körper befreit wurde. Die Geschwindigkeit der positiven verhält sich zu der der negativen Wellen in den Versuchen von E. H. und Th. Weber $= 11:7$.

3. Die Welle schreitet um so schneller fort, je mehr lebendige Kraft sie besitzt, also um so schneller, ein je grösseres Stück des Darmes comprimirt wird, um eine positive Welle zu erregen, ferner um so schneller, mit je grösserer Kraft und folglich Geschwindigkeit die Zusammendrückung

zu demselben Zwecke geschah. Die Welle schreitet daher auch anfangs schneller fort, als wenn sie schon eine bedeutende Wegstrecke durchlaufen und daher einen Theil ihrer lebendigen Kraft eingebüsst hat.

4. Die Wellen in dem schwach gespannten Darme nehmen, während sie sich fortbewegen, an Länge zu. Man beobachtete die Zeit, welche ein im Wasser schwebendes Körperchen brauchte, um seine Bahn zu durchlaufen. Diese betrug für eine negative Welle am Anfange des 1700 mm langen Darmes 1,3 Zeittheile (Intervalle zweier Chronometerschläge), am Ende etwas mehr als das Doppelte, 2,7 bis 2,8. Nun schreitet eine Welle genau in derselben Zeit um ihre Länge fort, in welcher ein durch sie in Bewegung gesetztes Wassertheilchen seine Bahn durchläuft. Würde nun nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie unter 3. bemerkt wurde, selbst beim Fortschreiten etwas vermindert, so würde man die Zunahme der Länge der negativen Welle während ihres Fortschreitens aus den gegebenen Daten genau berechnen können.

Aus der oben mitgetheilten Theorie, welche allerdings vielen einflussreichen Momenten, wie wir sahen, nicht Rechnung trägt, kann noch die bemerkenswerthe Folgerung gezogen werden, dass der Druck an jeder Stelle des Schlauches zu jeder Zeit der zur selben Zeit ebenda herrschenden Geschwindigkeit proportional sein muss, dass also insbesondere überall die Maxima und Minima des Druckes mit den Maxima und Minima der Geschwindigkeit zugleich stattfinden. J. v. Kries, der auf diese Folgerung aufmerksam macht, hat sie auch in Versuchen an Kautschukschläuchen bestätigt gefunden.

Man kann, um sich den wirklichen Verhältnissen noch etwas anzunähern, in den Differentialgleichungen auch noch die Reibung berücksichtigen. Um ihr Rechnung zu tragen, muss man in der obigen Gleichung (2) den Ausdruck für die Beschleunigung noch um ein Glied vermindern, welches von der vorhandenen Geschwindigkeit abhängt, da ja die jeder Beschleunigung widerstrebende Reibung ohne Zweifel mit wachsender Geschwindigkeit wächst, in erster Annäherung genügt ein der Geschwindigkeit einfach proportionales Glied ηv, wodurch die Gleichung (2) übergeht in

$$\varrho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} - \eta v$$

und wenn man mit dieser Gleichung und Gleichung (1) wie oben verfährt, erhält man

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{r}{2a\varrho} \frac{d^2 v}{dx^2} - \eta \frac{dv}{dt}.$$

Dieser Gleichung genügt ein Ausdruck von der Form

$$v = e^{-\varepsilon x} A \cos q (x - \alpha t)$$

oder eine Summe von beliebig vielen solchen Ausdrücken, durch welche man bekanntlich eine willkürliche periodische Function darstellen kann. Ebenso genügt der Gleichung auch eine Summe von Ausdrücken

$$v = e^{\varepsilon x} A \cos q (x + \alpha t).$$

Man sieht hieraus, dass, wenn an der Stelle $x = o$ ein periodischer Wechsel der Geschwindigkeiten $v_0 = A \cos q . (\pm \alpha t)$ unterhalten wird, so pflanzt sich

auch bei Reibungswiderstand dieser Wechsel nach beiden Seiten ohne Veränderung der Form und mit gleicher Geschwindigkeit wellenartig fort, aber jetzt wird wegen des Factors $e^{-\varepsilon x}$ auf Seite der positiven und $e^{\varepsilon x}$ auf Seite der negativen x die periodische Aenderung der Geschwindigkeiten an einem Punkte des Schlauches um so kleiner, je weiter der Punkt von dem zum Ausgangspunkte genommenen Nullpunkte nach der positiven oder negativen Seite absteht. Kurz gesprochen, die Welle wird nach beiden Seiten bei der Fortpflanzung an Stärke verlieren. Wo es sich um einen am Anfang begrenzten Schlauch handelt, in dem sich von hier aus nur nach einer Seite Wellen fortpflanzen, braucht man natürlich nur die eine Function

$$v = e^{-\varepsilon x} A \cos q\,(x - \alpha t)$$

zu betrachten. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit α der Wellen ist, wenn der Reibungscoefficient η nicht gross ist, von der durch q bestimmten Wellenlänge unabhängig und merklich ebenso gross wie ohne Reibung.

Die Druckschwankungen gehen nun aber nicht mehr, wie dies ohne Berücksichtigung der Reibung der Fall war, den Geschwindigkeitsänderungen ganz parallel. Setzen wir nämlich

$$v = e^{-\varepsilon x} A \cos q\,(x - \alpha t),$$

so ist

$$-\frac{dv}{dx} = \varepsilon e^{-\varepsilon x} A \cos q\,(x - \alpha t) + q e^{-\varepsilon x} A \sin q\,(x - \alpha t),$$

folglich nach der umgeformten Gleichung (1) (S. 120), welche auch unter Berücksichtigung des Widerstandes Geltung hat:

$$(3)\ \frac{dp}{dt} = \frac{r}{2a}\,\varepsilon e^{-\varepsilon x} A \cos q\,(x - \alpha t) + \frac{r}{2a}\cdot q e^{-\varepsilon x} A \sin q\,(x - \alpha t).$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$p = e^{-\varepsilon x}\left[\frac{r}{2a}\cdot\frac{1}{\alpha} A \cos q\,(x - \alpha t) - \frac{r}{2a}\cdot\frac{\varepsilon}{q\alpha} A \sin q\,(x - \alpha t)\right]$$

oder wenn man beachtet, dass $\frac{r}{2a} = \alpha^2 \varrho$ ist (siehe S. 121), so hat man

$$p = e^{-\varepsilon x}\left[\varrho\alpha A \cos q\,(x - \alpha t) - \frac{\varepsilon\varrho\alpha}{q} A \sin q\,(x - \alpha t)\right].$$

Der Druck setzt sich also aus zwei Summanden zusammen, von denen der eine sich der Geschwindigkeit proportional ändert, der andere geht zwar denselben Gang, ist aber gegen den ersten um eine viertel Phase verschoben, indem

$$\sin\left[q\,(x - \alpha t)\right] = \cos\left[\frac{1}{2}\pi - q\,(x - \alpha t)\right] \text{ ist.}$$

Zur ungefähren Beurtheilung des Ganges der Druckschwankungen zunächst im Anfange des Rohres für ganz beliebige (auch sprungweise) Geschwindigkeitsänderungen, welche sich dann auch im übrigen Rohre nur immer kleiner werdend fortpflanzen, kann man schon die obige Gleichung (3) verwenden. Es ist nämlich danach für $x = o$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{r}{2a}\cdot q A \sin q\cdot(-\alpha t) + \frac{r}{2a}\cdot\varepsilon A \cos q\,(-\alpha t).$$

Es ist aber ebenfalls für $x = o$

$$v = A \cos q\cdot(-\alpha t) \text{ und } \frac{dv}{dt} = q\alpha A \sin q\,(-\alpha t),$$

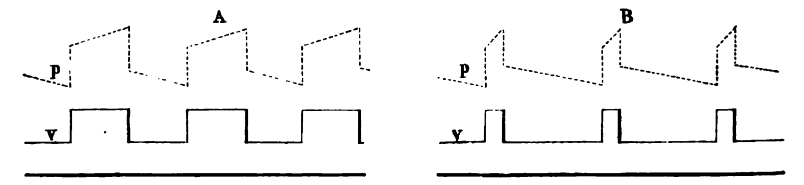
also

$$(4)\ \frac{dp}{dt} = \varrho\alpha\frac{dv}{dt} + \varrho\varepsilon\alpha^2 v.$$

Nehmen wir nun den Fall, der am Aortenanfange des Säugethiergefässsystemes annähernd verwirklicht ist, es finde ein periodisches stossweises Einströmen neuer Flüssigkeitsmengen statt. Die wirkliche Geschwindigkeit schwankt dann am Anfange des Schlauches zwischen einem bestimmten endlichen Werthe c und Null in regelmässigen Perioden sprungweise. Man kann sich den Fall aber auch so vorstellen, als schwanke die Geschwindigkeit v periodisch zwischen einem positiven Werthe $(1 - n)c$ und einem negativen $(- nc)$, gleichzeitig bestehe aber ein constanter Strom von der Geschwindigkeit nc, wo n einen echten Bruch bedeutet, so dass nc ein zwischen c und o liegender Werth ist, der dem Verhältniss zwischen Stromzeit und Ruhezeit innerhalb der Periode entsprechend zu wählen ist. Es ist nämlich leicht zu zeigen, dass die vorhin entwickelten Gleichungen mit kleinen Abänderungen der Constanten für den Druck und für den periodischen Theil der Geschwindigkeiten bei dieser Betrachtungsweise ihre Geltung behalten. Man sieht dann aus der Gleichung (4), dass der Druck erstens den positiven Sprung $\frac{dv}{dt}$ mitmachen muss, hierauf folgt eine Zeit, wo v den positiven Werth $(1 - n)c$ hat und $\frac{dv}{dt} = o$ ist. Während dieser Zeit ist also $\frac{dp}{dt}$ positiv, der Druck wächst also noch etwas. Dann folgt der negative Sprung in $\frac{dv}{dt}$, den p ebenfalls mitmacht, und dann folgt eine Zeit, während welcher wieder $\frac{dv}{dt} = o$, aber v selbst negativ $= - nc$ ist. Während dieser Zeit ist also $\frac{dp}{dt}$ negativ, d. h. der Druck sinkt noch weiter. Dann beginnt dasselbe Spiel mit dem positiven Sprung in $\frac{dv}{dt}$ von Neuem.

Aus der mathematischen Zergliederung des Vorganges hat sich ergeben: Wenn in ein elastisches Rohr, in welchem der Widerstand nicht ganz zu vernachlässigen ist, stossweise periodisch Flüssigkeit einströmt, so wird in der Nähe des Anfanges jedesfalls zwischen den Schwankungen des Druckes und den Aenderungen der Geschwindigkeit eine Beziehung statthaben, wie sie sich in den Curven Fig. 43 darstellt. Die

Fig. 43.



untere Curve stellt den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeitsänderung dar, gemäss der Annahme, dass sie während eines Theiles der Periode einen constanten endlichen Werth hat, während des übrigen Theiles derselben aber gleich Null ist, und dass das Ansteigen von Null zu dem endlichen Werthe und das Abfallen von ihm auf Null ganz plötzlich erfolgen. Die obere punktirte Curve stellt die Druckschwankungen vor.

Sie erfolgen ebenfalls sprungweise in den Augenblicken der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen, aber in dem Theile der Periode, wo eine endliche Geschwindigkeit herrscht, steigt der Druck noch weiter in dem Theile, wo die Geschwindigkeit Null ist, sinkt er noch weiter. *A* in Fig. 43 stellt den Fall dar, wo die Periode in zwei gleiche Hälften zerfällt, unter *B* ist angenommen, dass die Zeiten der Ruhe länger sind, als die Zeiten des Strömens.

Es verdient beachtet zu werden, dass die mit dem Cardiographen aufgenommene Druckcurve in der Carotis des Menschen von den gefolgerten Eigenthümlichkeiten oft deutliche Spuren sehen lässt. Fig. 44

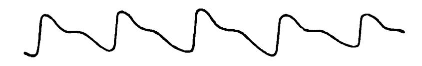
Fig. 44.



stellt eine solche Curve in getreuer Copie dar. Man sieht bei *a* plötzliches, dann von *a* bis *b* noch weiteres allmäliges Steigen des Druckes, bei *b* plötzliches Sinken und von *c* bis *d* noch weiteres allmäliges Sinken. Diese Formeigenthümlichkeit der Pulscurve in der Carotis könnte demnach darauf bezogen werden, dass in dieser Arterie der Widerstand schon sehr merklich einwirkt.

Es wäre wohl hier am Platze, die anderen Eigenthümlichkeiten der Pulscurve in verschiedenen Arterien rein mechanisch zu erörtern. Der hervorstechendste Charakterzug in der Form der Pulscurve in allen sphygmographischer Beobachtung zugänglichen Arterien des Menschen besteht bekanntlich in dem sogenannten Dikrotismus oder Doppelschlage, d. h. der Druck der rasch zum Maximum emporgestiegen ist, sinkt anfangs bis zu einer gewissen Tiefe, steigt hierauf noch einmal zu einem zweiten niedrigeren Maximum an, um dann erst zu seinem ursprünglichen Werthe zurückzukehren. Diese Formeigenthümlichkeit ist in dem obigen Beispiele von der Carotis deutlich ausgesprochen, noch stärker tritt sie aber meist am Radialpulse hervor, wovon Fig. 45 ein Beispiel

Fig. 45.



giebt. Oefters zeigen sich auch zwei Absätze im absteigenden Theile der Pulscurve

Es ist viel über die Verursachung der dikroten Pulsform geschrieben und die Hauptstreitfrage ist die, ob der Dikrotismus begründet ist in der Form des ursprünglichen Impulses vom Herzen aus, oder ob er seine Entstehung Reflexionen der Welle in der Peripherie des arteriellen Systems verdankt. Offenbar würden die vorstehend entwickelten hydrodynamischen Lehrsätze Anhaltspunkte zur endgültigen Entscheidung geben, wenn es gelänge für denselben Punkt einer Arterie gleichzeitig

die Geschwindigkeitsänderungen und die Druckänderungen zu ermitteln. In der That hat sich gezeigt, dass, wenn nur eine Welle in einem Schlauche nach einer Richtung fortschreitet, so muss der zeitliche Verlauf der Druckschwankungen im Allgemeinen dem der Geschwindigkeitsänderungen genau parallel gehen, mag der Widerstand merklich oder unmerklich sein. Jedesfalls müssen die Druckmaxima mit den Geschwindigkeitsmaximis und die Druckminima mit den Geschwindigkeitsminimis zeitlich sehr annähernd zusammenfallen, wofern nicht der Widerstand sehr gross und die Wellen sehr kurz sind.

Ganz anders stellt sich die Sache, wenn sich zwei Wellen gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung durch den Schlauch fortpflanzen, wie dies der Fall ist, wenn jede Welle an irgend einer Stelle des Schlauches entweder ganz oder theilweise ohne Umkehrung ihres Zeichens, also die positive Welle positiv reflectirt wird.

Nach dem allgemeinen Principe der ungestörten Coexistenz kleiner Bewegungen ist der Fall von gleichzeitiger Fortpflanzung verschiedener kleiner Wellen in einem elastischen Schlauche ebenso zu behandeln, wie die gleichzeitige Fortpflanzung mehrerer Schallwellen in einem Luftraume. Um also für einen gewissen Augenblick an einer bestimmten Stelle des Schlauches den resultirenden Geschwindigkeitswerth zu haben, braucht man nur die beiden Werthe der Geschwindigkeit, welche die beiden Wellen, jede für sich betrachtet, in dem Augenblicke hervorbringen würden, algebraisch zu summiren, und ebenso ist bezüglich der Druckwerthe zu verfahren.

Es fallen nun in den reflectirten Wellen ebenso wie in den hingehenden die Druckmaxima mit den Geschwindigkeitsmaximis zusammen, aber die Geschwindigkeiten sind entgegengesetzt gerichtet wie in den hingehenden Wellen, wenn wir also auch für die reflectirten Wellen die Abscissen im Sinne der hingehenden Wellen wachsend annehmen, so wären die Geschwindigkeiten negativ in Rechnung zu bringen und es könnten also in der resultirenden Wellenbewegung mit Druckmaximis relative Geschwindigkeitsminima zusammenfallen. Wir könnten also auch umgekehrt schliessen: wenn mit Druckmaximis relative Geschwindigkeitsminima zusammenfallen, so müssen nothwendig rückläufige, d. h. reflectirte positive Wellen im Spiele sein.

Man sieht hieraus, dass es von ganz ausserordentlichem Interesse sein würde, wenn man die Curve der Geschwindigkeitsänderung in einer Arterie verzeichnen könnte, deren Druckcurve bekannt ist. Es giebt nun in der That Hülfsmittel, durch welche am lebenden Menschen die Curve der Geschwindigkeitsänderungen verzeichnet werden kann [1]). Ihre Einrichtung gründet sich auf folgenden Gedankengang: In der Vene resp.

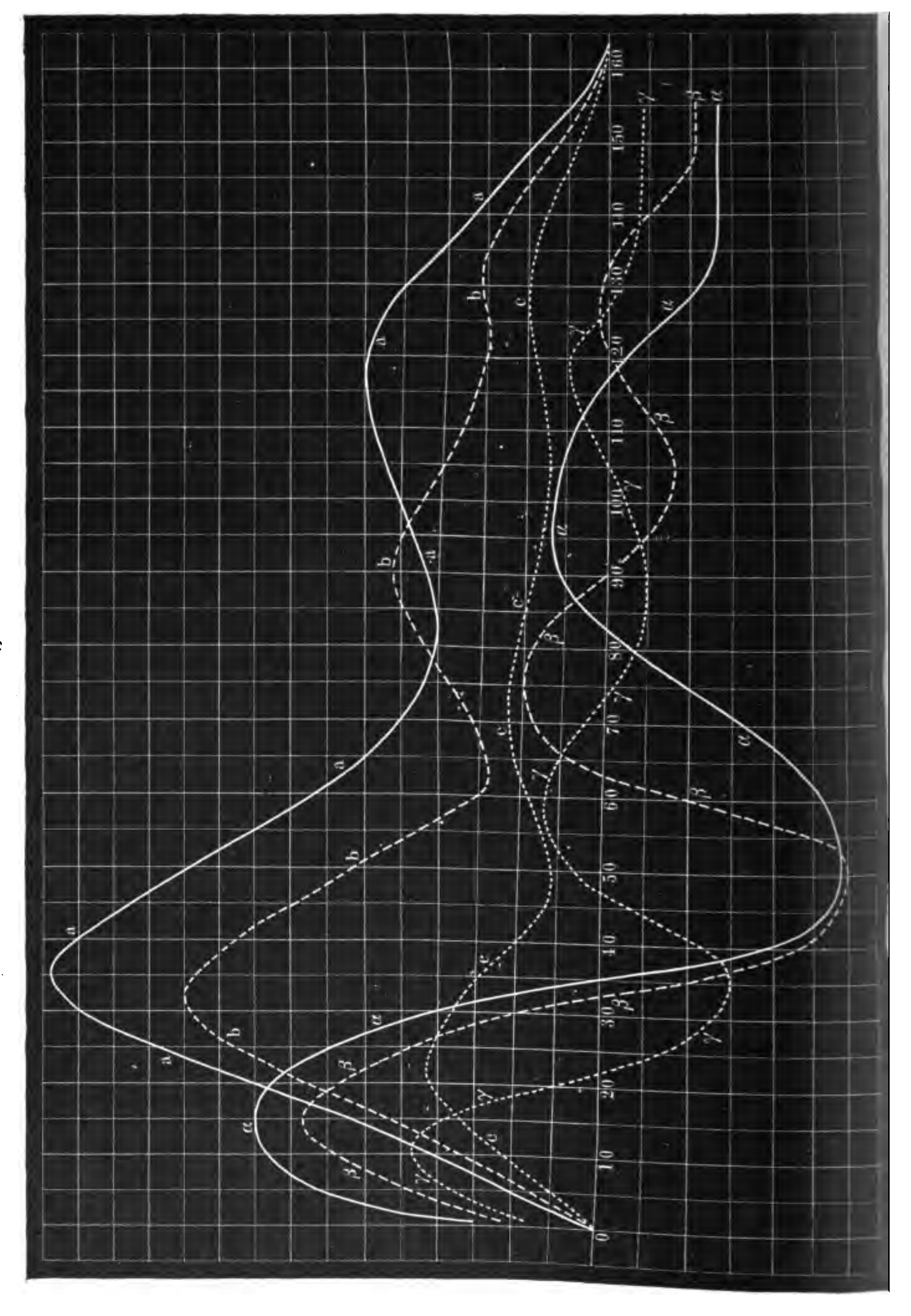
[1]) Fick, Die Geschwindigkeitscurve in der Arterie des lebenden Menschen. Untersuchungen aus dem Laboratorium der Züricher Hochschule. Wien 1869.

den Venen, welche das Blut aus einem Gliede des menschlichen Körpers, z. B. aus der Hand oder aus dem ganzen Arme, zurückführen, herrscht jedesfalls eine während längerer Zeiten constante Geschwindigkeit, wenigstens ist in ihnen sicher keine dem Pulse entsprechende Periodicität der Geschwindigkeitsänderung zu finden, wohl aber besteht eine solche in den entsprechenden zuführenden Arterien. Es wird daher das betreffende Glied eine dem Pulse parallel gehende periodische Volumänderung erleiden müssen. In den Abschnitten der Pulsperiode, wo die Geschwindigkeit, oder besser gesagt die Stromstärke, in der Arterie die in den Venen an der betreffenden Stelle übertrifft, wird das Volum des Gliedes zunehmen, in den Abschnitten aber, wo die Stromstärke in der Arterie geringer ist, wird das Volum abnehmen.

Die Volumschwankungen eines Gliedes vom lebenden Menschen, wenigstens einer Hand oder eines ganzen Armes, lassen sich nun äusserst leicht graphisch darstellen. Man braucht nur das Glied in eine mit Wasser gefüllte Blechhülse einzuschliessen, aus welcher ein U-förmiges, zuletzt senkrecht nach oben aufgebogenes und am Ende offenes Glasrohr hervorgeht. Natürlich muss an der Stelle, wo das Glied in die Blechkapsel eintritt, der wasserdichte Verschluss durch eine Kautschukkappe hergestellt sein. Sowie das Volum des Gliedes wächst, wird ein Theil des Wassers aus der Kapsel in die U-förmige Röhre verdrängt und sowie es abnimmt, wird Wasser aus dem Rohre in die Kapsel zurücktreten. Das freie Wasserniveau des Rohres wird also auf und ab schwanken, genau nach Maassgabe der Volumzu- und Abnahme. Diese Niveauschwankungen lassen sich aber mittelst eines aufgesetzten Schwimmers aufs Genaueste graphisch verzeichnen. Kennt man den Querschnitt des Rohres, so dass man das Volum berechnen kann, welches jedem Millimeter Niveaudifferenz entspricht, so kann man die Volumänderungen des Gliedes aus der Curve in absolutem Maasse ohne Weiteres ablesen.

Aus der Volumcurve lässt sich die Geschwindigkeits- oder richtiger die Stromstärkencurve in der Arterie an der Stelle, wo sie in die Kapsel eintritt, sofort ableiten. Man errichte nämlich auf der Abscissenaxe der Volumcurve in gleichen kleinen Abständen, die etwa $^1/_{20}$ Secunde oder einem noch kleineren Zeitintervalle entsprechen, Ordinaten. Zieht man nun von einer solchen Ordinate die vorhergehende ab, so ergiebt die Differenz, wie viel Cubikmillimeter während des betreffenden Zeitintervalles durch die Arterie mehr als durch die Vene geströmt sind. Dies Volum dividirt durch die Grösse des Zeitintervalles giebt also den Ueberschuss der Stromstärke in der Arterie über den in der Vene, welcher durchschnittlich während des Zeitintervalles stattfand. Diesen Werth kann man also als Ordinate der Stromstärkencurve im Mittelpunkte des dem Zeitintervalle entsprechenden Abscissenstückes auftragen. Man erhält so ebenso viele Punkte der Stromstärkencurve, als man Zeitintervalle angenommen und kann sie durch einen stetigen Curvenzug vereinigen. Die berechneten Ordinatenwerthe fallen natürlich überall da

Fig. 46.



negativ aus, wo die folgende Ordinate der Volumcurve kleiner ist als die vorhergehende, wo mit anderen Worten eine Volumabnahme stattfindet, also die Stromstärke in der Arterie kleiner ist als in der Vene. Als Nulllinie der Stromstärkecurve der Arterie erscheint somit diejenige der Abscissenaxe parallele Gerade, welche die constante Stromstärke in der Vene graphisch darstellt. Wo die wahre Nulllinie liegt, lässt sich aus dieser Betrachtung nicht folgern, aber die gefundene Curve ist darum nicht minder die getreue Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Aenderungen der Stromstärke in der Arterie. Ein Beispiel wird am besten den soeben entwickelten Gedankengang erläutern. Die ausgezogene Curve *aaa* ... in Fig. 46 stellt eine Volumcurve des ganzen Armes in zehnfach vergrössertem Maassstabe dar, 1 mm Abscissenlänge entspricht 0,0061 Secunde. Da das den Schwimmer enthaltende Rohr 105,6 qmm Querschnitt hatte, so bedeutete in der Originalcurve 1 mm Ordinatenhöhe 105,6 cmm in der vorliegenden zehnfach vergrösserten, also 10,56 cmm. In der vorhin angedeuteten Weise ist nun aus der Volumcurve die Stromstärkecurve der Arterie gefolgert. Es ist die ausgezogene Curve *αα* ... der Fig. 46. Der Maassstab ist so gewählt, dass 1 mm Ordinatenhöhe eine Stromstärke bedeutet, welche, wenn sie constant bliebe, jede Secunde 100 cmm durch den Querschnitt des Gefässes fördern würde. Das erste absolute Maximum entspricht also beispielsweise einer Stromstärke, welche per Secunde 4500 cmm fördern würde.

Die beiden gestrichelten Curven *bbb* und *βββ* sind die ebenso dargestellte Volum- und Stromstärkecurve für den Vorderarm und die punktirten Curven *ccc* und *γγγ* beziehen sich auf die Hand. Wäre gleichzeitig mit der Volumcurve der Hand eine Druckcurve der Radialis sphygmographisch aufgenommen, so liesse sich die oben geforderte Vergleichung der Lage der Maxima und Minima von Druck und Geschwindigkeit ausführen. Wenn dies leider auch nicht möglich ist, so lässt sich doch mit grosser Wahrscheinlichkeit sagen, dass in der Geschwindigkeitscurve der Art. radialis das Maximum dem Anfange der Periode näher liegt als in ihrer (sphygmographischen) Druckcurve, was die Vermuthung nahe legt, der Dikrotismus verdanke seine Entstehung einer Wellenreflexion in der Peripherie des arteriellen Systems. Noch mehr spricht für diese Vermuthung der Umstand, dass in der Geschwindigkeitscurve das erste Minimum sich um so weiter nach dem Anfange der Periode zurückzieht, je peripherischer der Arterienquerschnitt liegt, auf den sich die Curve bezieht, denn es müsste eben in der That um so früher die reflectirte Welle eintreffen.

Drittes Capitel.

Theorie eines in sich zurückkehrenden Flüssigkeitsstromes.

Von den wichtigsten Erscheinungen des ganzen Blutkreislaufes kann man sich eine deutliche Vorstellung verschaffen, wenn man einen elastischen Schlauch (entweder aus Kautschuk oder einem Darm) in sich selbst zurückleitet und den so entstehenden Kreis an einer Stelle mit einem Pumpwerke und zwei Ventilen versieht, so dass nur in einer Richtung Flüssigkeit das System durchströmen kann. Die von Weber angewandte Einrichtung ist näher folgende. Ein Stück Dünndarm h (Fig. 47) vertritt die Stelle des Herzventrikels. An beiden Enden desselben sind „Röhrenventile" angebracht, die einen Strom in ein und derselben Richtung zulassen. Sie sind folgendergestalt hergerichtet: Auf eine kurze Holzröhre ist ein kurzes Stückchen Dünndarm b aufgebunden. Das Ganze ragt in eine Glasröhre d hinein, deren Anfang durch die Holzröhre selbst verstöpselt wird, drei Fäden — durch zwei punktirte Linien in der Figur angedeutet — am anderen Ende der Glasröhre angeknüpft, verhindern, dass das Darmstück in die Holzröhre zurückgestülpt wird. Dieselbe Einrichtung ist bei g und i zu sehen. Durch die Wand der Glasröhre hindurch kann natürlich das Spiel des Ventils gesehen werden, und es ist namentlich interessant, zu bemerken, wie dasselbe sich schliesst, wenn in der Richtung hbv ein Wellenberg dagegen anrückt, sich umgekehrt öffnet, wenn in dieser Richtung ein Wellenthal kommt. Durch den Trichter l wird der ganze Apparat mit Wasser gefüllt und geschlossen, man ahmt dann die Wirkungen des Herzens nach, indem man periodisch zuerst allemal die Stelle v (die Dienste der Vorkammer versehend), hernach das Darmstück h (Herzkammer) comprimirt. b spielt dann die Rolle der Atrioventricularklappe, g die der Arterienklappe. Bei der Zusammendrückung von v weicht ein Theil der Flüssigkeit in der Richtung vv' zurück, ein anderer Theil kommt ins Pumpwerk h, das so allemal gleichmässig angefüllt wird.

Wir stellen uns jetzt vor, das Darmstück h wird zusammengedrückt, dabei schliesst sich zuerst das Ventil b und die ganze Flüssigkeit muss nach a ausweichen. Wäre aa' eine unausdehnbare Röhre, so könnte nur die ganze Flüssigkeitssäule $aa'v'v$ gleichzeitig bewegt werden, und die Zusammendrückung von h hätte somit eine Strömung zur Folge.

Da nun aber $aa'v'v$ eine ausdehnbare Röhre ist, so geschieht die Verschiebung des Wassers successiv, die von h ausgetriebene Menge findet zunächst in dem sich ausdehnenden Theile von a Platz und erzeugt daselbst eine positive Welle (Bergwelle), welche mit einer gewissen Geschwindigkeit nach $a'v'v$ fortschreitet. Wäre bei g kein Ventil und hörte die Zusammendrückung von h nach Austreibung des Wassers sofort auf, so würde die gespannte Röhre a sogleich einen Theil des Wassers

nöthigen, rückwärts nach h auszuweichen, und hierdurch würde in a eine negative Welle (Thalwelle) entstehen und der Bergwelle nach $a'v'v$ folgen. Bei gänzlich mangelnden Ventilen würden die Wassertheilchen in $a'v'v$, während diese negative Welle hindurchginge, um ein ebenso grosses Stück rückwärts sich bewegen, als sie sich vermittelst der voraufgehenden positiven Welle vorwärts bewegt hatten, so dass sie alle am Ende wieder an demselben Orte wären, den sie zu Anfang einnahmen. Das Ventil g verhindert aber das Zurückweichen nach h. Es folgt daher der Bergwelle keine Thalwelle. Die periodischen Zusammendrückungen von h bringen nur positive Wellen hervor. Jede solche bewegt alle Wassertheilchen, ein Stückchen im Sinne des Pfeils bei a nach a' und v' zu, und hilft so die Flüssigkeit im Kreise herumbewegen, ohne dass sie durch Strömen fortfliesst.

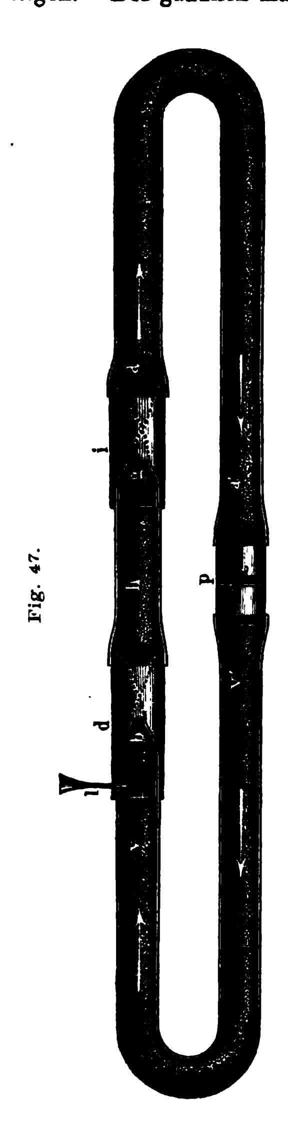


Fig. 47.

Es muss noch der Erfolg der Erschlaffung von h in Betracht gezogen werden, welche jeder Zusammendrückung folgt; wir sahen bereits, dass bei der Erschlaffung von h wegen des Ventils g von a her keine Flüssigkeit in den frei gewordenen Raum eindringen kann, wohl aber kann dies von v her geschehen, da das Ventil b in der Richtung des Pfeiles v offen steht. Es schreitet daher in der Richtung von v nach v' (dem Pfeil bei v entgegen) eine negative Welle in dem Schlauche fort. Sie bringt jedes Wassertheilchen ein Stückchen von seinem ursprünglichen Orte weg in der ihrer Fortpflanzungsrichtung entgegengesetzten, also in derselben Richtung, wie die von a nach a' fortschreitende Bergwelle. Somit unterstützen sich bei der gedachten Einrichtung der Ventile die beiden Wellen (Bergwelle und Thalwelle), welche bei jeder Zusammendrückung und nachfolgenden Erschlaffung von h entstehen und in entgegengesetzter Richtung (die Bergwelle von a nach a', die Thalwelle von v nach v') die ganze geschlossene Bahn durchlaufen, bezüglich ihrer Wirkung auf die Fortschaffung der Wassertheilchen. Wären aber die Ventile nicht vorhanden, so würden von h nach jeder Seite Bergwellen und Thalwellen fortschrei-

ten, von denen die eine die Verschiebung der Wassertheilchen wieder aufhöbe, welche die andere hervorgebracht hat, so dass im Ganzen jedes Theilchen am Ende wieder dieselbe Stelle einnähme, die es anfangs hatte.

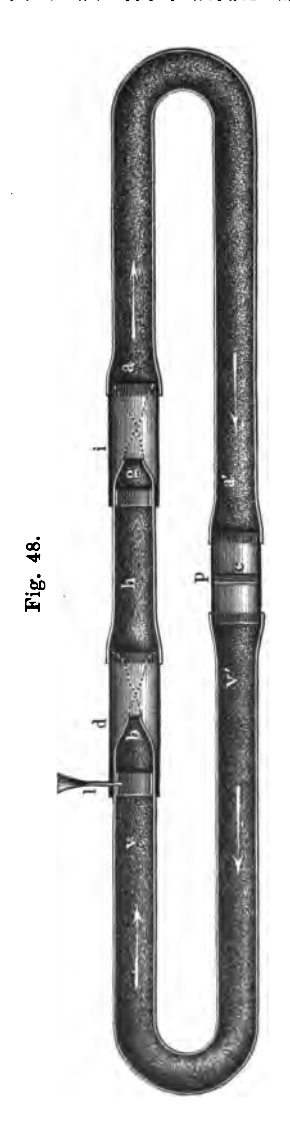


Fig. 48.

Ist der Röhrenzirkel $h\,a\,a'\,v'\,v$ nirgend beengt, so durchläuft ihn jede positive Welle mit grosser Geschwindigkeit ganz, und es ist, schon ehe die neue Contraction von h eintritt, überall wieder der Druck im Röhrenzirkel ausgeglichen. Anders verhält es sich, wenn man irgendwo ein namhaftes Hemmniss anbringt. Z. B. wenn man in die Glasröhre p einen Badeschwamm oder ein Sieb von mehrfach genommenem feinmaschigem Tüll einfügt. Die Flüssigkeit kann hier wegen des Reibungswiderstandes nicht so schnell durchdringen, als zur Fortpflanzung der ganzen positiven Welle erforderlich ist. Die Wellenbewegung wird daher durch den Schwamm reflectirt und unmerklich gemacht (im lebenden Thiere durch die Capillargefässe). Wiederholt sich nun die periodische Zusammendrückung von h rasch genug, so entsteht in $a\,a'$ eine Anhäufung der Flüssigkeit, denn mit jeder Zusammendrückung von h wird eine neue Quantität Wasser nach $a\,a'$ eingetrieben, während nicht soviel in derselben Zeit durch den Schwamm c nach v' hinüber dringen kann. In $v\,v'$ entsteht aber mit jeder Erschlaffung von h eine noch grössere Verminderung der Flüssigkeit, weil aus v mehr Wasser nach h eindringt, als gleichzeitig durch c von a' her in v' eindringt. Die Zunahme des Druckes in $a\,a'$ und die Abnahme in $v\,v'$ dauert so lange, bis der dadurch hervorgebrachte Unterschied des Druckes, den die Flüssigkeit in $a\,a'$ und $v'\,v$ erleidet, so gross ist, dass er, abgesehen von der Wellenbewegung, einen Strom bedingt, hinlänglich stark, um zwischen zwei auf einander folgenden Zusammendrückungen von h so viel Flüssigkeit durch den Schwamm zu befördern, als mit jeder Zusammendrückung von h nach a entleert wird. Von da an bleibt alsdann der Zustand bei fortgesetzter Thätigkeit des Pumpwerkes beharrlich. Wie gross die Druckdifferenz

sein müsse, damit sich ein beharrlicher Zustand herstellt, hängt von der Grösse des Widerstandes ab, welchen der Schwamm der Bewegung der Flüssigkeit bietet, und dieses hängt, wie wir aus den früheren Betrachtungen bereits wissen, ceteris paribus (d. h. wenn die Klebrigkeit der Flüssigkeit und andere derartige Umstände dieselben sind) wieder davon ab, wie eng, wie lang die engen Wege und wie zahlreich diese Wege sind. Die Engigkeit jener Wege sowie ihre Länge vermehren, die grössere Zahl der Wege vermindern den Widerstand.

Die von der Wellenbewegung wohl zu unterscheidende Strombewegung, die wir soeben in Betracht gezogen haben, dauert natürlich auch dann noch einige Zeit fort, wenn das periodische Zusammendrücken von *h* aufhört, nämlich gerade so lange, bis die Druckdifferenz zwischen $a\,a'$ und $v v'$ wieder ausgeglichen ist.

Bei dem beschriebenen Verfahren wird allemal, wenn die zusammendrückende Kraft bei *h* nachlässt, wie schon gesagt, eine negative Welle von *b* aus in den Abschnitt $v v'$ fortschreiten in einer dem Pfeile bei *v* entgegengesetzten Richtung, denn es wird sich plötzlich der *h* benachbarte Abschnitt von *v* nach *h* entleeren, wo momentan der Druck gleich Null ist. Uebertragen wir dies auf den Blutkreislauf, so hätten wir zu erwarten, dass allemal im Augenblicke der Ventrikeldiastole eine negative Welle anfangen müsste, sich in die Venenstämme hinein fortzupflanzen. Von diesen Wellen zeigt sich nun in Versuchen am lebenden Thiere keine Spur. Es muss also Einrichtungen geben, welche ihr Zustandekommen hindern. Es scheint mir, dass dies die eigentliche Aufgabe der Vorhofscontractionen ist. In der That fällt ja die Vorhofscontraction in die Zeit der Ventrikeldiastole. Die elastische Spannung der das Blut einschliessenden Wände wird daher dicht hinter den sich öffnenden Atrioventricularklappen fortwährend bei gleich hohem Werthe gehalten, obgleich durch das Ausweichen der Flüssigkeit nach *h* der Binnenraum des in Rede stehenden Abschnittes kleiner wird. Somit bleibt auch der Druck im Innern der grossen Hohlvenensäcke bei der Kammerdiastole auf der alten Höhe, und es kommt keine rückwärts schreitende negative Welle zu Stande. Ziehen sich hernach die Ventrikel zusammen und werden damit die Atrioventrikularklappen wieder geschlossen, so würde sich das von den Venen her andrängende Blut aufstauen. Nun aber giebt die erschaffende Wand der Vorhöfe wieder nach und das andrängende Venenblut findet hier Raum, so dass der venöse Blutstrom keiner Stockung ausgesetzt wird. Der Zweck des Muskelspieles der Vorhöfe wäre demnach zu bewirken, dass der Blutstrom in den grossen Venenstämmen weder durch die Kammersystole verzögert, noch durch die Kammerdiastole beschleunigt wird.

Es ist nicht ohne Interesse, aus dem Vorigen noch einmal herauszuheben, welche Folgen das in Bewegung gesetzte mit Ventilen versehene Pumpwerk für den Druck in verschiedenen Abschnitten des Röhrenzirkels hat. Geht man von einem Zustande der Ruhe, der mit überall glei-

chem Drucke verbunden ist, aus, so ergiebt sich vor Allem, dass eine Bewegung des Pumpwerkes, welche die im Röhrenzirkel enthaltene Flüssigkeit in eine ringförmig geschlossene Strömung versetzt, zunächst eine veränderte Vertheilung des Druckes hervorbringt. Während sie nämlich in dem einen Abschnitte aa' (der dem arteriellen Systeme entspricht) den Druck vermehrt, vermindert sie denselben nothwendig in dem anderen (dem venösen Systeme entsprechenden) Abschnitte vv'. Aber es wird daneben auch in der Regel eine Veränderung des Gesammtdruckes, den die ganzen Wände des Röhrenzirkels zusammen erleiden, durch die Bewegung des Pumpwerkes hervorgebracht werden. Anders ausgedrückt: der mittlere Druck wird ein anderer sein in dem Röhrenzirkel, wenn sich die darin enthaltene Flüssigkeit durch das Pumpen bewegt, als wenn sie ruht. Unter dem mittleren Drucke ist dabei ein bestimmter Druckwerth zu verstehen, der auf jedem Oberflächenelemente lasten müsste, wenn die ganze Oberfläche dieselbe Summe von Drücken erleiden sollte, welche sie factisch bei einer ungleichen Vertheilung der Drücke erleidet. Man sieht namentlich ohne eingehendere mathematische Betrachtung leicht ein, dass unter den besonderen anatomischen Bedingungen des Blutkreislaufes die als mittlerer Druck des ganzen Systemes definirte Grösse einen bedeutend höheren Werth haben muss, wenn die Pumpe im Gange und die Flüssigkeit in Bewegung ist, als wenn sie in Ruhe ist. In der That sind ja im Blutkreislauf die dem Abschnitte aa' unseres obigen Schemas entsprechenden Theile, d. h. die arteriellen Theile, mit elastischeren Wandungen versehen und zu gleicher Zeit weniger geräumig als die venösen Theile, welche dem Abschnitte vv' des Schemas entsprechen. Nun wird aber durch die Arbeit des Herzens der Inhalt der arteriellen Systeme um genau ebenso viel vermehrt, als der Inhalt der venösen Systeme vermindert wird, und es ist klar, dass die Volumvermehrung eines Behälters den Druck darin in viel höherem Maasse steigern muss, als die gleiche Volumverminderung den Druck in einem zweiten Behälter mindert, wenn der Behälter, welcher die Volumvermehrung erfährt, schwerer ausdehnbare Wände hat und obendrein weniger geräumig ist, als der Behälter, welcher die Volumverminderung erfährt. Der letztere Umstand insbesondere bedingt ja, dass die Volumvermehrung einen viel grösseren Bruchtheil des Gesammtvolums ausmacht, als die an absolutem Werthe gleiche Volumverminderung.

Ausserdem hängt in erster Linie der mittlere Druck in einem Röhrencirkel von seiner ursprünglichen Anfüllung ab. Ihr entspricht im Blutgefässsystem derjenige Anfüllungsgrad, bei welchem unter den jeweiligen Bedingungen die Excretion der Resorption gerade die Wage halten kann. Die mittlere Spannung muss steigen, wenn die Resorptionsbedingungen günstiger werden, denn es kann alsdann erst bei einer stärkeren Gesammtanfüllung des Gefässsystems wieder ebenso viel excernirt als resorbirt werden, was doch für einen stationären Zustand erforderlich ist.

Die vielfache partielle Reflexion der Pulswellen und das Aufstauen an den Haargefässen bedingt nun im ganzen arteriellen Systeme einen ziemlich gleichen Druck des Blutes. Die Möglichkeit einer solchen Gleichmässigkeit des Druckes in diesem Systeme wird insbesondere noch hergestellt durch den geringen Antheil, den die Arterienwände an der Erzeugung des gesammten, der Blutbewegung entgegenstehenden Widerstandes nehmen. In der That haben wir bereits aus unseren obigen allgemeinen Betrachtungen über Strombewegung in Röhren ersehen, wie ausserordentlich viel grösser der Widerstand in engen Röhren ist als in weiten, und es wird hiernach schon wahrscheinlich, dass der grösste Theil des Widerstandes für die Blutbewegung in den engen Capillargefässen erzeugt wird, besonders auf der venösen Seite der Capillaren, wo die Gesammtstrombahn anfängt sich wieder zu verengern, so dass die Geschwindigkeit wieder wachsen muss. Aus den Untersuchungen von Young geht namentlich hervor, dass, wenn Wasser in unseren Adern circulirte, der Widerstand, den dasselbe von der Aorta an bis in die Arterien von einem Durchmesser von $^1/_{172}$ englischen Zoll erleiden würde, so gering wäre, dass es in einer senkrechten Glasröhre, die man in die Wand einer Arterie von $^1/_{172}$ Zoll Durchmesser einsetzte, nur um 2 Zoll weniger hoch steigen würde, als in einer Röhre, die man in die Wand der Aorta einsetzte. Wenn also in letzterer das Wasser 7 Fuss 6 Zoll hoch stiege, so würde es in einer den Haargefässen näheren Arterie von $^1/_{172}$ Zoll Durchmesser den Druck einer Säule von 7 Fuss 4 Zoll tragen. Nach einigen Versuchen von Hales vermuthet nun Young, dass die Reibung des Blutes ungefähr viermal grösser ist als die des Wassers. Die Druckdifferenz zwischen der Aorta und einer Arterie von $^1/_{172}$ Zoll Durchmesser fiele demnach viermal grösser, also $=$ 8 Zoll, aus. Diese Resultate sind auch durch mehrere Versuche am lebenden Thiere (namentlich durch die von Poiseuille) bestätigt; andere scheinen ihnen freilich zu widersprechen.

Insofern hiernach in allen Theilen des arteriellen Systems nahezu derselbe Druck anzunehmen ist, vergleicht es Weber seiner Function nach sehr geschickt mit der Windlade einer Orgel, welche auch dazu bestimmt ist, dass die von den Bälgen in sie hineingepumpte Luft in ihr sich anhäufe, unter einem hohen und gleichen Druck stehe und von da aus in alle mit derselben in Verbindung stehende Pfeifen mit gleicher Kraft einströme, möge die einzelne Pfeife dem Orte, wo die Luft in die Windlade eintritt, nahe oder entfernt sein. So soll auch das Blut aus dem arteriellen Systeme, in welchem sich der Druck der Blutwellen angehäuft und ausgeglichen hat, in alle Partien des Haargefässsystems unter gleichem Drucke einströmen, gleichgültig, ob sie dem Herzen nahe oder entfernt liegen. Für die Function des Haargefässsystems ist diese Veranstaltung begreiflicherweise von der grössten Wichtigkeit.

Zum Schlusse unserer Betrachtungen über Flüssigkeitsströme wollen wir noch einen mechanischen Begriff entwickeln, der für die Physiologie

von der allerhöchsten Bedeutung ist, nämlich den Begriff der bei Erhaltung eines Flüssigkeitsstromes von bestimmter Stärke unter bestimmten Bedingungen zu leistenden Arbeit. Dieser Begriff — zuerst von J. R. Mayer in Heilbronn klar definirt — scheint noch immer bei Physiologen und Aerzten vielfach missverstanden zu werden, wie aus den vielfach missverständlichen Versuchen hervorgeht, das auszuwerthen, was man öfters als Herzkraft bezeichnet, was man aber besser mit dem Worte Herzarbeit bezeichnen würde. Es dürfte daher eine möglichst anschauliche, zunächst rein physikalische Erörterung dieses Gegenstandes erwünscht sein.

Dass sich ein Flüssigkeitsstrom in einer ringförmig in sich zurückkehrenden Bahn nicht von selbst erhalten kann, ist nach den vorigen Auseinandersetzungen klar, dass vielmehr die Flüssigkeit in einer solchen Bahn sehr bald zur Ruhe kommen würde, wenn sie in Bewegung gebracht und sich selbst überlassen würde. Die Ursache davon ist eben die innere Reibung der Flüssigkeit, deren Wirkung überall schliesslich darauf hinausläuft, die vorhandene Bewegung zu verzögern. Die so scheinbar verschwundene lebendige Kraft kann natürlich nicht in Wahrheit verschwinden, sie muss vielmehr in irgend eine andere Form übergeführt oder auf andere Körper übertragen werden. Es ist nun auch bekannt, dass die lebendige Kraft oder kinetische Energie der Strömung unter Vermittelung der Reibung in Wärme umgesetzt wird. Wir haben uns also vorzustellen, dass die Moleküle, indem sie sich schichtenweise an einander vorüberschieben, in ihrem Innern erschüttert werden, und diese Bewegung, die wir Wärme nennen, kann eben nur auf Kosten der strömenden Bewegung zu Stande gebracht werden. Mehr ins Einzelne lässt sich freilich diese Vorstellung noch nicht verfolgen.

Soll demnach eine Flüssigkeitsmasse auf einer in sich zurückkehrenden Bahn in Bewegung bleiben, so genügt nicht ein einmaliger Anstoss, sondern es muss fortwährend eine fremde Kraft auf die Flüssigkeit wirken, welche derselben während der Zeiteinheit ebenso viel lebendige Kraft in Form von strömender Bewegung wieder mittheilt, als unter Vermittelung der Reibung in Wärme umgesetzt wird. Es muss also fortwährend Arbeit auf die Flüssigkeit verwandt werden, und die Frage ist, wie viel Arbeit in der Zeiteinheit zur Erhaltung eines Flüssigkeitsstromes von bestimmter Stärke unter gegebenen Bedingungen erforderlich ist. Der obigen Bemerkung zufolge könnte man diese Frage dadurch lösen, dass man ermittelte, wie viel Wärme der Strom in der Zeiteinheit erzeugt, das Arbeitsäquivalent dieser Wärmemenge wäre dann offenbar die zur Erhaltung desselben erforderliche Arbeit. Es leuchtet aber ein, dass dieser Weg, die Frage zu beantworten, ein beschwerlicher Umweg wäre. Glücklicherweise kann man die zu leistende Arbeit auf anderem Wege sehr leicht finden. Man braucht nur eine bestimmte Stelle des in sich zurückkehrenden Stromes ins Auge zu fassen. In der That braucht nur an einer Stelle die fremde Kraft auf die Flüssigkeit zu wirken, während

nothwendig überall Energie verloren geht (d. h. in Wärme umgesetzt wird). Die Stelle, wo die fremde Kraft einwirken muss, ist leicht zu finden. Gehen wir nämlich die Bahn eines Stromes in seiner Richtung entlang, so kommen wir im Allgemeinen nach den vorigen Auseinandersetzungen von Stellen höheres zu Stellen niederes Druckes. Soll aber der Strom in sich selbst zurücklaufen, so kann der Druck nicht überall abnehmen, denn sonst käme man ja bei vollendetem Umgange zur Ausgangsstelle mit kleinerem Drucke, als man davon ausgegangen ist, was der Annahme eines stationären Stromes widerspricht, der für jeden Punkt einen in der Zeit constanten Druck voraussetzt. In einem stationären Kreislaufe muss also mindestens eine Stelle existiren, wo der Druck in der Richtung des Stromes nicht ab-, sondern zunimmt. Hier muss dann eben die fremde Kraft auf die Flüssigkeit einwirken, da dieselbe nicht von selbst von einem Punkte niederes zu einem Punkte höheres Druckes weitergehen kann.

Wenden wir diese Betrachtung zunächst auf einen jener einfachen Fälle an, wo Wasser aus einem Behälter durch eine einfache Röhre ins Freie ausströmt. Um den Strom in einen Kreislauf zu verwandeln, nehmen wir an, die Strombahn böge irgendwie um, so dass die Ausflussöffnung wieder dicht am Behälter läge. Ueberdies wollen wir uns die Ausflussöffnung nach oben gerichtet denken. Das Wasser wird alsdann aus derselben in einem Strahl senkrecht aufspringen zu einer Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$, wenn v die Ausflussgeschwindigkeit und g die Intensität der Schwere (= 9,81 m . . .) bedeutet. Die zur Erhaltung des Stromes erforderliche Druckhöhe im Behälter sei H, welche nothwendig $> h$ sein muss. Der Strom wird alsdann in sich zurücklaufend im Gange erhalten werden, wenn man das von selbst zur Höhe h gestiegene Wasser durch eine fremde Kraft noch zur Höhe H erhebt, so dass das ausgeflossene Wasser immer wieder auf das Niveau im Behälter kommt und den Abfluss selbst wieder ersetzt. Die zur Erhaltung des Stromes in der Zeiteinheit erforderliche Arbeit wäre also, das in der Zeiteinheit ausfliessende Wasser um den Betrag von $H - h$ zu erheben. Liefert in der Zeiteinheit der Strom m Kilogramm, so hätten wir eine Arbeit von $m(H - h)$ Kilogrammmetern nöthig, wenn H und h in Metern ausgedrückt ist. Sei beispielsweise die mittlere Geschwindigkeit beim Ausfliessen = 0,3 m, dann würde der Strahl zur Höhe von 4,5 mm emporsteigen. Sei ferner die Ausflussöffnung so weit, dass sie bei einer Geschwindigkeit von 0,3 m in der Minute 6 kgm liefert. Nehmen wir endlich an, für diesen Strom wäre eine Druckhöhe von 0,5045 m im Behälter erforderlich, so wäre, um den Strom im Gange zu erhalten, jede Minute eine Arbeit von 6 . (0,5045 — 0,0045) kgm, d. h. von 3 kgm aufzuwenden.

Es ist gut, zu bemerken, dass die so berechnete Arbeitsquantität unabhängig ist von der Art, wie man das Wasser in den Behälter zurückschafft. In der That stellen wir uns vor, das zur Höhe h emporgestiegene

Wasser würde nicht weiter zur Niveauhöhe H gehoben, sondern es sollte gleich auf der Höhe h in den Behälter hineingeschafft werden. An sich wäre dies ja ausführbar, der Behälter brauchte nur in dieser Höhe ein durch eine sich bloss nach innen öffnende Klappe verschlossenes Loch zu haben. Von selbst ginge aber auch jetzt das Wasser nicht hinein, da es unter gar keinem Drucke steht, während im Innern des Behälters hier der Druck $H - h$ herrscht. Es muss also durch einen fremden Kraftaufwand hineingedrückt werden, und es ist leicht zu berechnen, welche Arbeit dabei während der Zeiteinheit zu leisten ist. Der Flächeninhalt des Querschnittes vom cylindrischen Behälter betrage Q Quadratdecimeter, dann füllen die m Kilogramm (Cubikdecimeter) Wasser, welche während einer Minute in den Behälter hineinzudrücken sind, ein Stück desselben, dessen Höhe $= \frac{m}{Q}$ Decimeter oder $\frac{1}{10} \cdot \frac{m}{Q}$ Meter beträgt. Auf diese Höhe muss aber die ganze über der Eintrittsstelle im Behälter befindliche Wassermasse durch das Einpressen gehoben werden. Diese Wassermasse füllt unter den gemachten Voraussetzungen einen cylindrischen Raum, dessen Grundfläche Q Quadratdecimeter, dessen Höhe $H - h$ Meter oder $10 . (H - h)$ Decimeter beträgt. Sie wiegt also $10 \times Q (H - h)$ Kilogramme. Diese Masse auf die Höhe von $\frac{m}{10 \cdot Q}$ Meter zu erheben, kostet $m (H - h)$ Kilogrammmeter Arbeit. Die aufzuwendende Arbeit berechnet sich also genau so, als wenn man das ausgeflossene Wasser wieder oben aufgiesst.

Gehen wir jetzt dem Blutkreislauf entlang im Sinne der Fortbewegung, so kommen wir zweimal an Stellen, wo das Blut von einem Punkte niederes Druckes zu einem Punkte höheres Druckes durch eine fremde Kraft gepresst wird. Diese beiden Stellen sind das rechte und das linke Herz. Dort wird nämlich das Blut von den Körpervenen nach der Lungenarterie, hier wird es von den Lungenvenen nach der Aorta geschafft. Da aber bekanntlich in der Lungenarterie ein bedeutend höherer Druck herrscht als in den Körpervenen, und ebenso in der Aorta der Druck bedeutend höher ist als in den Lungenvenen, so kann diese Fortschaffung nur durch eine fremde Kraft geschehen, und diese ist offenbar die Muskelkraft des Herzens. Wie diese Fortschaffung des Blutes im Einzelnen stossweise bewirkt wird, hat die Physiologie aus einander zu setzen, hier ist nur im Allgemeinen der Begriff des Maasses der Herzarbeit zu entwickeln und auszuführen, wie der Werth dieser Grösse unter gegebenen Bedingungen zu berechnen wäre, d. h. wie viel Arbeit das Herz im gegebenen Falle während der Zeiteinheit zu leisten hat, um den Blutkreislauf im Gange zu erhalten.

Im Unterschiede von dem zuerst betrachteten einfacheren Falle tritt uns hier eine Schwierigkeit entgegen. In der Aorta und Lungenarterie nämlich herrscht kein constanter Druck, derselbe variirt vielmehr periodisch, er ist vor Beginn einer Kammersystole am niedrigsten, und am

Ende der Kammersystole am höchsten. Diese Schwierigkeit lässt sich aber leicht umgehen durch Einführung des Begriffs eines „mittleren" Druckwerthes an diesen Stellen. Er ist einfach zu definiren als derjenige Druckwerth, der constant erhalten die Röhrenwände an den betreffenden Stellen während der Zeiteinheit ebenso viel Druck im Ganzen erleiden lassen würde, wie sie beim variabelen Druck in Wirklichkeit erleiden. Es ist klar, dass wir uns für die Auswerthung der Arbeit denken können, es herrsche am Anfange der Aorta und Lungenarterie fortwährend constant der mittlere Druck. Es kostet nämlich offenbar mehr Arbeit, die Flüssigkeit in die Arterien zu treiben, so lange der Druck den mittleren übersteigt. Dafür kostet es aber ebenso viel weniger Arbeit, die Flüssigkeit einzutreiben, so lange der wirkliche Druck kleiner ist als der mittlere. Im Ganzen ist also die Arbeit dieselbe, mag der Druck periodisch veriabel sein, oder mag constant der mittlere Druck herrschen. Beiläufig kann bemerkt werden, dass die Druckschwankungen in den grossen Arterienstämmen wohl meist verhältnissmässig klein sind gegen den gesammten hier herrschenden Druck.

Es soll jetzt zunächst ermittelt werden, welche Arbeit bei einer einzelnen Systole ein Herzventrikel zu leisten hat. Wir denken uns den Ventrikel im Augenblicke vor der Systole mit ruhendem Blute gefüllt, dessen Quantität in Kilogrammen ausgedrückt $= q$ sein mag. Der mittlere Druck im Aortenanfange sei h ausgedrückt in Metern (also $100\ h$ in Centimetern) als Höhe einer Säule von der Blutflüssigkeit selbst. Es ist daraus leicht zu berechnen, welche Kraft ausgedrückt in der gewöhnlichen Kraft- (d. h. Gewichts-)einheit dem aus dem Herzventrikel hervorgepressten Blute entgegenwirkt. Man braucht nur zu berechnen, wie viel eine Blutsäule wiegt von der Höhe h und einer dem Aortenquerschnitte gleichen Grundfläche. Nennen wir diesen Querschnitt in Quadratcentimetern ausgedrückt f, wählen wir das Gramm als Gewichts-, d. h. als Krafteinheit, so hat die fragliche Blutsäule ein Volum von $100\,hf$ Cubikcentimetern und wiegt $100\ hfs$ Gramm, wenn wir das specifische Gewicht des Blutes mit s bezeichnen. Die Kraft, welche dem Eintritte von Blut in die Aorta entgegenwirkt, ist also $100\,hfs$ oder, wenn wir nun als Krafteinheit wieder das Kilogramm einführen, $\frac{100\,hfs}{1000}$. Wir können uns als Angriffspunkt dieser Kraft eine in der Aorta ohne Reibung verschiebbare Querscheidewand denken. Diese müsste also das aus dem Ventrikel hervorgepresste Blut verschieben, und es fragt sich wie weit? Um diese Grösse zunächst in Centimetern zu erhalten, braucht man nur zu berechnen, ein wie langes Stück die q Kilogramme Blut, welche der Ventrikel halten kann, in der Aorta einnehmen würden. q Kilogramme Blut nehmen aber $\frac{1000\,q}{s}$ Cubikcentimeter ein, bilden folglich eine Säule von $\frac{1000\,q}{sf}$ Centimeter Länge auf der Grundfläche von f Quadratcentimeter.

Das durch die Systole in die Aorta eingetriebene Blut muss also entgegen dem Drucke von $\frac{100\,hfs}{1000}$ Kilogramm das schon dort vorhandene Blut resp. die eingebildete Querscheidewand um $\frac{1000\,p}{sf}$ Centimeter oder $\frac{1000\,q}{100\,sf}$ Meter vorschieben, d. h. es wird bei der Systole des Ventrikels der Angriffspunkt einer Kraft von $\frac{100\,hfs}{1000}$ Kilogramm um $\frac{1000\,q}{100\,sf}$ Meter der Richtung jener Kraft entgegen verschoben. Das ist genau dieselbe Arbeit, als ob eine Last von $\frac{100\,hfs}{1000}$ Kilogramm auf die Höhe von $\frac{1000\,q}{100\,sf}$ Meter gehoben (eben der Richtung der Schwere entgegen verschoben) würde, d. h. eine Arbeit von $\frac{100\,hfs}{1000} \cdot \frac{1000\,q}{100\,sf} = h\,q$ Kilogrammmeter, d. h. dieselbe Arbeit, als ob q Kilogramm auf die Höhe h gehoben würden.

Dies ist aber noch nicht die ganze Arbeit des Herzventrikels, derselbe drängt nämlich nicht bloss das Blut gegen den arteriellen Druck vor, sondern ertheilt ihm auch noch die in den arteriellen Bahnen herrschende Geschwindigkeit, nennen wir diese v, so repräsentirt die Ertheilung dieser Geschwindigkeit an q Kilogramm eine Arbeit von $q\,\frac{v^2}{2g}$ Kilogrammeter, denn die q Kilogramm würden von der Höhe $\frac{v^2}{2g}$ herabfallend die Geschwindigkeit v erlangen. Die gesammte Arbeit einer Ventrikelsystole wäre also unter den gemachten Voraussetzungen $= p\left(h + \frac{v^2}{2g}\right)$ Kilogrammeter.

Der Ventrikel und resp. der Vorhof braucht nicht die ganze so berechnete Arbeit durch seine active (vitale) Zusammenziehung zu leisten, ein Theil derselben wird vielmehr durch die rein physikalische Elasticität der ruhenden Muskelsubstanz geliefert. In der That strömt ja das Blut unter einem gewissen Drucke und mit einer gewissen Geschwindigkeit aus den Venen in den Herzventrikel ein und wenn dabei das Quantum q zur Ruhe kommt, so muss es die Wände des Ventrikels gedehnt, an ihren elastischen Kräften eine Arbeit verrichtet haben. Wir können sie nach ähnlichen Principien zu $q\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right)$ Kilogrammeter schätzen, wenn h_1 den Druck und v_1 die Geschwindigkeit in den grossen Venenstämmen bedeutet. Diese Arbeit könnte also der Herzventrikel auch ohne Erregung wiedergeben durch rein elastische Zusammenziehung seiner gedehnten Wand. D. h. er könnte die Blutmenge q mit der Geschwindig-

keit v_1 unter dem Drucke h_1 durch eine geeignete Oeffnung wieder hervortreiben. Der activen Anstrengung der Muskelsubstanz fällt also nur der Ueberschuss jener Arbeit über diese zur Last, d. h. eine Arbeit von $q\left[(h-h_1)+\left(\frac{v^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}\right)\right]$ Kilogrammeter zur Last. Dieser Werth dürfte in Wirklichkeit nicht sehr verschieden sein von qh, da einerseits der Druck h_1 in den grossen Venenstämmen von Null nicht weit abweicht, und da andererseits auch die beiden Geschwindigkeitshöhen $\frac{v^2}{2g}$ und $\frac{v_1^2}{2g}$ nur kleine Werthe haben, und um so mehr ihre Differenz klein ist. Wenn also jetzt n Systolen in der Minute geschehen, so hat ein Herzventrikel in der Minute ungefähr die Arbeit von nqh Kilogrammeter zu leisten.

Die Grösse q hat für beide Ventrikel denselben Werth, da selbstverständlich bei jeder Systole der eine Ventrikel genau so viel Blut auswerfen muss als der andere. Die Grösse h ist für den linken Ventrikel der Blutdruck in der Aorta, für den rechten der Blutdruck in der Arteria pulmonalis. Nimmt man beispielsweise den Blutdruck in der Aorta $=$ einer Blutsäule von 2,5 m Höhe, nimmt man ferner an, dass jede Systole 80 g Blut auswirft und setzt man endlich die Anzahl der Systolen in einer Minute $= 70$, so muss der linke Ventrikel jede Minute eine Arbeit leisten von $70 \times 0{,}08 \times 2{,}5 = 14$ Kilogrammeter.

Viertes Capitel.

Wellenzeichner.

Um die Erscheinungen des Blutdruckes in ihrem zeitlichen Verlaufe zu studiren, hat man verschiedene Instrumente ersonnen, welche die eine oder andere Veränderung graphisch registriren. Die Leistungen aller dieser Instrumente sind bis zu einem gewissen Punkte nach denselben allgemeinen mechanischen Principien[1]) zu beurtheilen, mag der Zweck sein, die Veränderungen des hydrostatischen Druckes im Innern eines Blutgefässes oder die Veränderungen des Arteriendurchmessers aufzuzeichnen. Immer ist der Zweck des Instrumentes allgemein ausgedrückt folgender: Ein Punkt soll hin- und hergehende Bewegungen ausführen, so dass seine Entfernung von einer bestimmt zu wählenden Lage in jedem Augenblicke genau proportional ist dem in diesem Augenblicke

---

[1]) Siehe Ernst Mach, Sitzungsbericht der Wiener Akademie. 3. April 1862, 8. Januar 1863 und 11. December 1862.

geltenden Werthe der zu messenden veränderlichen Grösse. Führt man nun an dem bewegten Punkte in einer zu seiner Bewegungsbahn senkrechten Richtung eine Fläche vorüber, auf welcher er seine jeweilige Lage verzeichnen kann, so zeichnet er darauf eine Wellenlinie, deren Abscissen die Zeit messen und deren Ordinaten die zu den betreffenden Zeiten geltenden Werthe derjenigen Grösse angeben, deren Veränderungen mit der Zeit bestimmt werden sollen. Beim Ludwig'schen Kymographion z. B. schwankt ein schreibender Stift senkrecht auf und ab in annähernd gleichem Rhythmus, wie der Blutdruck in der mit dem Instrumente verbundenen Arterie schwankt. An diesem Stift geht in wagerechter Richtung mit constanter Geschwindigkeit die Oberfläche eines rotirenden Cylinders vorüber, auf welchen der Stift eine Wellenlinie zeichnet. Wickelt man hernach die Cylinderfläche in eine Ebene ab, so kann man sehen, in welcher Höhe sich in jedem Augenblicke die Zeichenspitze befunden hat.

Es ist klar, dass der vorgesetzte Zweck überall nicht wohl vollkommen erreicht werden kann, der zeichnende Punkt muss doch immerhin an eine mehr oder weniger grosse träge Masse geknüpft sein. Diese muss durch Kräfte in Bewegung versetzt werden, welche irgendwie durch die zu messenden Veränderungen erzeugt werden, sei es durch die Aenderungen des Blutdruckes, sei es durch die abwechselnden Ausdehnungen und Zusammenziehungen der Arterienhaut also mittelbar auch durch den Blutdruck. Endlich müssen auch noch fremde Kräfte die den zeichnenden Punkt tragende Masse in einer festen Gleichgewichtslage erhalten, denn sonst würde sie von der zu bestimmenden Kraft einmal in einem Sinne fortgetrieben, gar nicht mehr, wenn diese Kraft nachlässt, zurückkehren und einem neuen Anstoss der Kraft gar nicht wieder ausgesetzt sein, endlich ist die Bewegung der fraglichen Masse stets der Natur der Sache nach gewissen Widerständen (Reibung etc.) ausgesetzt, welche unter allen Umständen die vorhandene Geschwindigkeit verzögern. In die Bewegungen eines Wellenzeichners greifen daher stets mehrere Ursachen ein und sie können also unmöglich die zeitlichen Veränderungen der einen Ursache, die damit studirt werden soll, vollkommen getreu wiedergeben. Das einfachste abstracte Schema eines solchen Instrumentes wäre folgendes: Eine träge Masse M kann sich ausschliesslich so bewegen, dass einer ihrer Punkte auf der geradlinigen Bahn $b\,c$, siehe Fig. 49, hin- und hergeht, sich selbst überlassen, nimmt er darauf die stabile Gleichgewichtslage a ein. Sowie er daraus entfernt wird, entsteht eine Kraft, welche ihn nach a zurückzuführen strebt und die der Entfernung von a proportional ist. Die Masse würde demnach wie ein Pendel um a oscilliren, wenn sie durch einen einmaligen Anstoss aus a entfernt würde. Diesen Schwingungen kommt eine ein- für allemal bestimmte Dauer zu, sie würden aber wegen des Widerstandes allmälig schwächer werden und

Fig. 49.

b

a

c

zuletzt ganz aufhören. Nun wirke auf die Masse *M* eine periodisch variabele Kraft wechselweise in der Richtung *b c* und *c b*.

Um diese allgemeine Betrachtung der Anschauung näher zu bringen, wollen wir ein besonderes Beispiel etwas näher ins Auge fassen. Die bewegliche Masse *M* sei eine Quecksilbermasse, eingeschlossen in einem Uförmigen, beiderseits oben offenen Glasrohre, dessen beide Schenkel vertical stehen. Die Kuppe im einen Schenkel oder ein darauf gesetzter Schwimmer sei der Punkt *a* (Fig. 49). Offenbar kann er nur in der verticalen Bahn *b c* — eben dem Schenkel des Glasrohres entlang — auf- und abgehen. Die Gleichgewichtslage *a* hat offenbar der Bedingung zu genügen, dass, wenn sich in ihr unsere Quecksilberkuppe befindet, die Kuppe des anderen Schenkels in demselben Niveau liegt; denn in diesem Falle wirken auf jeden Punkt unserer Masse gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, was ohne Weiteres ersichtlich ist. Setzen wir nun beispielsweise an das offene Ende unseres Röhrenschenkels den Mund und steigern darin durch eine Exspirationsanstrengung den Luftdruck über eine Atmosphäre, dann wird die Quecksilberkuppe im anderen Schenkel steigen und in unserem Schenkel sinken, etwa von *a* nach *c*. Ueberlassen wir dann den Apparat wieder sich selbst, indem wir den Röhrenschenkel wieder frei lassen, so geräth die Quecksilbermasse in Bewegung und zwar so, dass sich die Quecksilberkuppe mit dem Schwimmer von *c* gegen *a* erhebt, denn vom andern Schenkel her wirkt ein Ueberschuss über den Atmosphärendruck. Die Kuppe kann aber nun nicht in ihrer Gleichgewichtslage *a* zur Ruhe kommen, da inzwischen die ganze Quecksilbermasse eine gewisse Geschwindigkeit erlangt hat, so dass sie vermöge der Trägheit über die Gleichgewichtslage hinaus geht. Nun wird aber ein Drucküberschuss im Schenkel mit der Kuppe *a* wirksam, der die Bewegung verzögert. Nach bekannten mechanischen Grundsätzen würde die Geschwindigkeit erst dann vollständig aufgezehrt sein, wenn die Kuppe ebenso hoch über die Gleichgewichtslage (bis *b*) gestiegen ist, als sie anfangs unter dieselbe herabgedrückt war, wofern die Bewegung keinen Widerstand fände. Von dem Punkte *b* würde alsdann die Quecksilberkuppe mit dem Schwimmer wieder herabsinken bis *a* mit beschleunigter, von da bis *c* mit verzögerter Geschwindigkeit. Hier mit der Geschwindigkeit Null angekommen, würde sie wieder steigen bis *b* und so fort in infinitum. Die Quecksilberkuppe mit dem Schwimmer würde also oscilliren zwischen den äussersten Lagen *b* und *c* und zwar im Rhythmus der einfachen Pendelschwingung. Die Dauer der einzelnen Oscillationen hängt wesentlich ab von der Masse der an der Bewegung betheiligten Flüssigkeit, nicht aber von der Grösse der Schwingung, d. h. nicht davon, wie weit die beiden äussersten Lagen der Quecksilberkuppe (*b* und *c*) von einander entfernt sind.

Führt man einen derartigen Versuch wirklich aus, so sieht man in der That die Quecksilberkuppe eine Zeitlang hin- und hergehen, allein es ist doch jede folgende Schwingung zwischen engeren Grenzen ein-

geschlossen, als die vorhergehende, und nach einiger Zeit kommt die Quecksilbermasse zur Ruhe, je kleiner sie ist, desto früher. Dies rührt von den Reibungswiderständen her.

Denken wir uns nun den anderen Schenkel des Uförmigen Rohres durch einen Schlauch mit einer Arterie eines lebenden Thieres verbunden. Der Rest des Röhrenschenkels und der Verbindungsschlauch müssen natürlich mit irgend einer geeigneten Flüssigkeit gefüllt sein. Dann wirkt auf die Quecksilberkuppe dieses Schenkels nicht mehr der Atmosphärendruck, sondern der Blutdruck der betreffenden Arterie. Dieser ist aber mit der Zeit variabel und er kann sich mit dem vom anderen Schenkel her wirkenden Atmosphärendrucke keinesfalls mehr in dauerndes Gleichgewicht setzen. Die Quecksilbermasse muss also jetzt fortwährend in Bewegung sein. Aber es kann auch nicht die vorhin betrachtete Oscillation zu Stande kommen, denn diese setzt ja voraus, dass ausser der eigenen Schwere und dem Atmosphärendrucke beiderseits keine fremde Kraft wirkt. Der Blutdruck in der Arterie ist aber nicht nur so ganz im Allgemeinen eine mit der Zeit sich ändernde Kraft, sondern er ist periodisch veränderlich, d. h. er schwankt regelmässig periodisch zwischen bestimmten äussersten Grenzwerthen.

Wir hätten also durch die gedachte Anordnung die Bedingung unserer allgemeinen Betrachtung realisirt, dass nämlich auf die bewegliche Masse *M*, welche für sich um eine Gleichgewichtslage zu oscilliren fähig ist, eine periodisch sich ändernde Kraft einwirkt. Die Mathematik lehrt, dass alsdann die Masse *M* in einen Schwingungszustand geräth, welcher abhängt 1) von der Periodicität der veränderlich einwirkenden Kraft, d. h. von der besonderen Art, wie diese Kraft im Laufe der Zeit zu- und abnimmt; 2) von den Kräften, welche *M* stets in die Gleichgewichtslage zurückzuführen streben; 3) von der Grösse der Widerstände; 4) von der Grösse der Masse *M*.

Die Mathematik zeigt ferner, dass die Schwingungsdauer der Masse *M* mit der Periodendauer der veränderlichen Kraft nach kurzer Zeit der Einwirkung übereinstimmend wird, sowie ein irgend merklicher Widerstand der Bewegung entgegenwirkt, was selbstverständlich in allen Fällen stattfindet. Die Schwankungen der Quecksilbersäule im obigen Beispiele werden also jedesfalls alsbald isochron mit den Schwankungen des Blutdruckes. Was die Dauer der Periode betrifft, kann man sich also auf die Angaben jedes Wellenzeichners verlassen. Anders ist es dagegen mit dem Rhythmus der Kraftänderung innerhalb der einzelnen Periode, d. h. mit der Art und Weise wie die Aenderung innerhalb einer Periode vor sich geht, ob z. B. die Kraft rasch zu- und langsam abnimmt oder umgekehrt u. s. w. Dieser Rhythmus kann von keinem Wellenzeichner ganz treu wiedergegeben werden, auch der Betrag der Kraftänderung, d. h. die Höhe der Wellen oder zwischen welchen Maximis und Minimis der Werth der Kraft schwankt, kann nur unter besonderen Umständen vom Wellenzeichner vollkommen treu registrirt

werden. Es lässt sich aber angeben, welche Bedingungen der Treue des Instrumentes günstig sind. Vor Allem ist das eine auch schon ohne mathematische Deduction ersichtlich, dass die selbständigen Schwingungen der Masse M um so mehr in den Hintergrund treten werden; je kleiner diese Masse ist, um so schneller nämlich werden die selbständigen Schwingungen durch die nie fehlenden Widerstände zum Verschwinden gebracht.

Es scheint von demselben Gesichtspunkte aus vortheilhaft, die Widerstände gegen die Bewegungen der schwingenden Masse verhältnissmässig gross zu machen. Diese Betrachtung entspricht aber nicht den Resultaten der Rechnung, welche Mach durchgeführt hat. Diese Rechnung zeigt, dass bei kleinem Widerstande allerdings im Anfange die vom Wellenzeichner gelieferte Curve weit abweichen kann von der wahren Curve der einwirkenden Druckschwankung, dass aber diese Entstellung durch die Eigenschwingungen des Instrumentes auch bei den kleinsten Widerständen mit der Zeit verschwindend klein wird, während eine andere Entstellung, welche nicht mit der Zeit abnimmt, um so grösser ist, je grösser die Widerstände sind. Es ist also jedesfalls nicht vortheilhaft, besondere Widerstände in einem Wellenzeichner wirken zu lassen.

Es ist ferner für die Treue des Wellenzeichners günstig, wenn die schwingende Masse M überall nur kleine Geschwindigkeiten annimmt, denn alsdann wird sie niemals vermöge ihrer Trägheit selbständig viel über die Lage hinausgehen, welche ihr durch die jeweilige Wirkung der zu untersuchenden variabelen Kraft ertheilt wird. So misstraut z. B. Niemand den Angaben des Barometers in dem Sinne, dass etwa die Quecksilbersäule unter dem Einflusse des veränderlichen Luftdruckes selbständige Schwingungen ausführte, und beim Steigen des Druckes über den Punkt hinausschösse, welchen ihr der jeweilige Werth dieses Druckes anweist. Dies rührt eben daher, dass die Quecksilbersäule des Barometers nie grosse Geschwindigkeiten erlangt.

Um bei einem Wellenzeichner zu bewirken, dass die Masse M nur kleine Geschwindigkeiten annimmt, muss man die Kräfte, welche sie in ihrer Gleichgewichtslage erhalten, recht gross machen, denn alsdann geräth sie eben stets nur in Schwingungen von kleiner Amplitude.

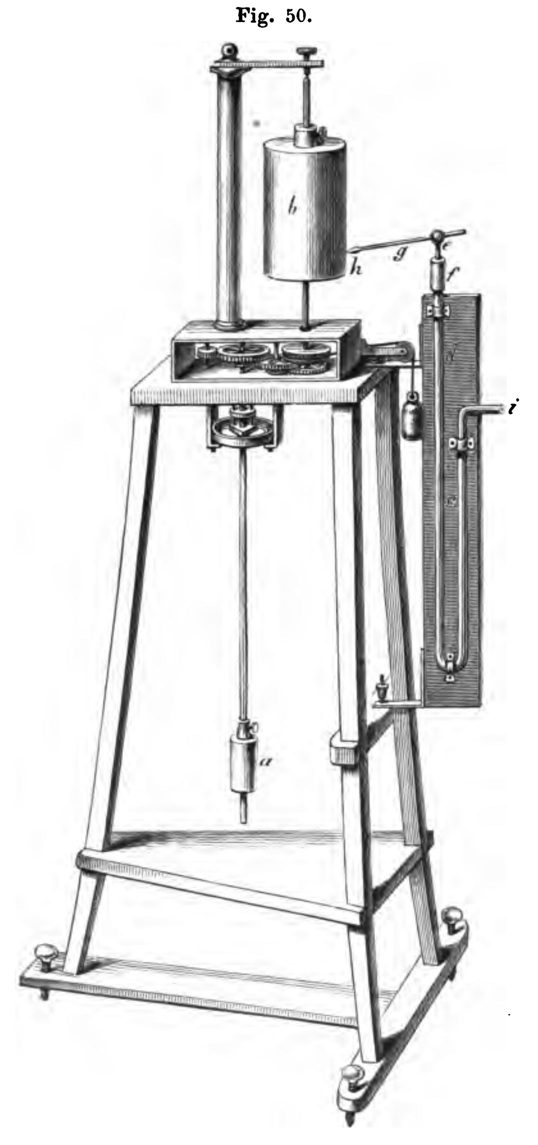
Wir gehen jetzt zur Beschreibung der einzelnen gebräuchlichen Wellenzeichner über.

I. Das Ludwig'sche Kymographion.

Fig. 50 (a. f. S.) stellt das Instrument in der ihm ursprünglich von Ludwig gegebenen Einrichtung dar, doch wird es leicht sein, sich an dieser Zeichnung auch die neueren Modificationen anschaulich zu machen. b ist der rotirende Cylinder, auf den die Curve gezeichnet wird; er wird mittelst eines in der Figur sichtbaren Uhrwerkes durch ein sinkendes

Gewicht in Bewegung gesetzt. Das Uhrwerk ist in dem hier dargestellten Instrumente durch das Kugelpendel *a* regulirt. An neueren Instrumenten geschieht die Regulirung meist durch Windflügel. *i*, *c*, *d* ist eine U förmige Glasröhre, zum Theil mit Quecksilber gefüllt, welche als Manometer dient. Auf dem Quecksilberspiegel im Schenkel *d* liegt ein kleiner Schwimmer von Elfenbein, der sich leicht ohne Reibung im Röhrenschenkel auf- und abbewegen kann. Im Schwimmer steckt ein möglichst dünner, aber recht steifer Stahldraht der bei *f* durch ein rundes Loch im Deckel des Röhrenschenkels *d* hindurchgeht und in diesem Loche leicht auf- und abgleiten kann. An der Spitze bei *e* trägt dieser Schwimmer den Zeichenstift *g*. Da sich aber der Draht in dem Loche bei *f* nebst dem Schwimmer drehen kann, so muss noch besonders dafür gesorgt sein, dass die Spitze *h* des Zeichenstiftes stets am Cylinder anliegt und sich nicht davon wegdrehen kann. Zu diesem Zwecke hat Ludwig später einen sehr praktischen Kunstgriff angegeben. Er hängt nämlich neben den Zeichenstift ein kleines Pendelchen, bestehend aus einem kleinen Gewicht an einem Seidenfaden oder noch besser an einem Menschenhaar. Es ist oben befestigt an einem wagerechten Arm, der von der Schraube ausgeht, welche die

Fig. 50.



Spitze für die Cylinderaxe trägt. Um diese kann der Arm mit dem Aufhängepunkt im Kreise herumgeführt werden, so dass man die seidene Schnur gerade so an den Zeichenstift anlehnen kann, dass dessen Spitze ganz leise an den Cylinder angedrückt wird.

Was die Zeichnung selbst betrifft, so wird sie am schönsten ausgeführt durch eine feine Stahlspitze auf berusstes Papier, womit die Trommel überzogen wird.

Der Schenkel *i* des Manometers wird, soweit er nicht Quecksilber enthält, mit einer Lösung von kohlensaurem Natron gefüllt und durch geeignete Zwischenglieder, welche dieselbe Lösung enthalten, mit der Arterie verbunden, worin der Blutdruck gemessen werden soll. Die Zwischenstücke dürfen natürlich niemals lange elastische Schläuche sein, weil sich in diesen selbständige Wellen bilden würden.

Die schwingende Masse ist im Kymographion die Quecksilbersäule des Manometers. Die Kraft, welche sie in ihre Gleichgewichtslage zurückführt, ist ihre eigene Schwere und die variabele Kraft, welche sie in Schwingungen versetzt, ist der hydrostatische Druck in einer Arterie, resp. in einem anderen Gefässe. Die Masse des Quecksilbers ist allerdings eine bedeutende und die Widerstände sind verhältnissmässig gering, auch kommen bei einigermaassen bedeutenden und raschen Druckschwankungen namhafte Geschwindigkeiten in Betracht. Die selbständigen Schwingungen der Quecksilbermasse sind daher bei diesem Instrumente sehr eingreifend. Man sieht auch leicht, dass das Quecksilber durch einen einmaligen Anstoss getrieben und nachher sich selbst überlassen, nicht sofort zur Ruhe kommt, sondern eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Schwingungen ausführt, selbst dann, wenn der Schreibstift sich an der Trommel reibt.

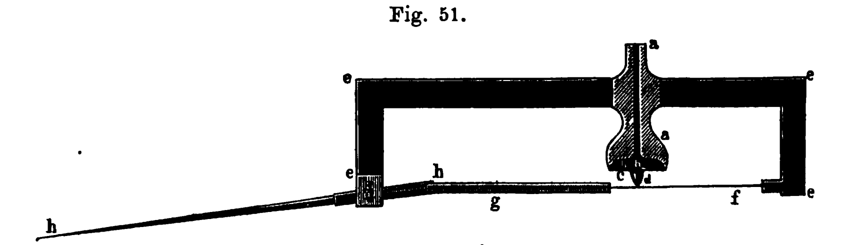
Man kann nach diesen Erwägungen vom Kymographion in Betreff des zeitlichen Verlaufs der Blutdruckschwankungen innerhalb einer Pulswelle keine getreuen Aussagen erwarten. Wenn beispielsweise eine Wellenlinie an der Trommel entstanden ist, in welcher das Ansteigen und Absinken gleiche Zeiträume einnimmt, so kann man nicht schliessen, dass in der Arterie Ansteigen und Absinken des Blutdruckes in gleichen Zeiträumen erfolgt sei. Noch viel weniger werden feinere Einzelheiten des Gesetzes der Blutdruckschwankung durch Kymographioncurven zu ermitteln sein.

Gleichwohl ist das Kymographion ein unschätzbares Werkzeug der physiologischen Forschung, denn es kann uns wenigstens den absoluten Werth des mittleren Druckes in den Gefässen ziemlich genau kennen lehren. Wir können namentlich mit diesem Instrumente die langsameren Aenderungen des mittleren Blutdruckes in den Arterien studiren. So z. B. das Sinken des Blutdruckes bei Vagusreizung, das Steigen desselben bei Sympathicusreizung etc., wovon in den Arbeiten Ludwig's, Bezold's und anderer Forscher zahlreiche Beispiele vorkommen.

II. Das Federkymographion.

Es ist mir neuerdings gelungen, einen Blutwellenzeichner zu construiren, welcher den in der obigen theoretischen Erörterung aufgestellten Forderungen in hohem Maasse entspricht. Es gelingt daher mit diesem Instrumente sehr rapide Druckschwankungen mit grosser Treue graphisch darzustellen. Dem schwankenden Drucke des Blutes wirkt hier nicht die Schwere einer Flüssigkeitssäule entgegen, sondern die Elasticität eines Stahlstreifens, der so stark federt, dass er bei den grössten vorkommenden Druckschwankungen nur sehr wenig gebogen wird. Seine kleinen, kaum sichtbaren Bewegungen werden dann durch einen Fühlhebel von sehr geringer Masse vergrössert. Eine Hauptverbesserung besteht aber noch darin, dass auch die träge Masse der wässerigen Flüssigkeit ver-

Fig. 51.



mieden ist, welche sonst bei den Wellenzeichnern die unerlässlichen Verbindungsröhren zwischen der manometrischen Vorrichtung und der Arterie erfüllt. Diese Verbindungsröhre ist in dem neuen Apparate mit Luft gefüllt. Sie muss deshalb natürlich sehr eng sein, damit die Zusammendrückbarkeit der Luft keinen grossen Fehler einführt. Fig. 51 giebt eine Vorstellung von der Einrichtung.

aa ist ein Metallstück von einem engen Canal (etwa 1 mm Durchmesser) durchbohrt, welcher sich unten zu einem offenen, sehr flachen, tellerförmigen Grübchen *b* erweitert. Die Oeffnung desselben ist mit einer dünnen Kautschuklamelle *c* überbunden. Auf die Mitte derselben ist ein Elfenbeinknöpfchen *d* aufgeleimt. Die abgerundete Kuppe drückt auf einen federharten starken Stahlstreif *f*, der an demselben zweimal rechtwinkelig geknickten Messingstück *eeee* befestigt ist, welches auch das Stück *aa* trägt. Man sieht also, dass, wenn in dem Raume *b* der Druck schwankt, die Kautschuklamelle sich vorwölbt und wieder einsinkt und dass dementsprechend die Feder *f* niedergebogen wird und wieder aufschnellt. Da aber die Grundfläche des Elfenbeinknopfes, auf welche der Druck in *b* einwirkt, sehr klein, noch lange kein Quadratcentimeter ist, so werden sehr bedeutenden Druckschwankungen nur sehr kleine kaum mit dem Auge sichtbare Bewegungen der Feder *f* entsprechen, worin der Hauptvorzug des Instrumentes besteht. Um nun die Bewegungen des

Federendes zu vergrössern, ist eine gewöhnliche Hebelübertragung angebracht. Zunächst nämlich ist die Feder durch einen Schilfstreif *g* verlängert, welcher an einem Ende ein Gäbelchen trägt, durch das ein feines Stahlstiftchen gesteckt ist. Dies geht ausserdem durch einen feinen Schlitz im hinteren Arme des Zeichenhebels *h h*. Die Axe desselben läuft in Spitzen in einer Gabel, die das untere Ende des Vorderstückes von *e* bildet (siehe bei *k*). Indem sich dies Vorderstück durch einen in der Figur nicht gezeichneten einfachen Schraubenmechanismus etwas vor- oder zurückstellen lässt, kann der hintere Arm des Zeichenhebels vergrössert und verkleinert und dadurch der Maassstab, in welchem die Zeichenspitze die Bewegungen der Feder wiedergiebt, verändert werden. Es ist natürlich im Allgemeinen nur anzurathen, dass man diesen Maassstab recht klein wählt. Die feinsten Details gehen dadurch nicht verloren, wenn man dafür sorgt, dass die Spitze einen recht feinen Strich macht, was man durch Anwendung einer etwas gebogenen Spitze aus sehr dünnem Aluminiumblech leicht erreicht. Ein kleiner Maassstab der Zeichnung hat aber überdies wesentliche Vortheile. Einmal erlangt die zwar geringe aber doch nicht ganz verschwindende Masse des grösstentheils aus Schilf gefertigten Zeichenhebels eine um so kleinere Geschwindigkeit, je kleiner der Maassstab der Zeichnung ist, und andererseits ist es auch bequem, kleine Zeichnungen zu haben, von denen man mehrere Reihen mit Nulllinie auf einer Trommel des Kymographion über einander unterbringen kann.

Zum Gebrauch wird nun bloss das tellerförmige Grübchen *b* mit ein paar Tropfen Wasser angefüllt, um die Dichtung des Kautschukverschlusses am Rande leichter zu sichern. Der Canal bleibt mit Luft gefüllt. Mit dem Stücke *a* wird ein in geeigneter Weise gebogenes Glasrohr von sehr engem Lumen etwa 1 qmm Querschnitt durch ein Kautschukrohr von recht dicker und deshalb nicht leicht dehnbarer Wand verbunden, so dass der Canal in *a* mit dem Lumen des Glasrohres communicirt. An der Verbindungsstelle muss das Glasrohr dicht an das Metallrohr grenzen, ohne dass vom dehnbareren Kautschukrohr eine merkliche Länge frei bleibt. An das andere Ende des Glasrohres wird durch eine ebenso knappe Kautschukverbindung die Canüle angefügt, welche in das Blutgefäss eingesetzt ist. Dies ganze System von Verbindungsstücken ist bloss mit Luft gefüllt.

Der so zusammengesetzte Apparat stellt eine direct registrirende manometrische Vorrichtung dar, in welcher ausser der ganz leichten Zeichenspitze bei den grössten Druckschwankungen keine träge Masse in irgendwie nennenswerthen Schwung kommt. Die Vermehrung des Volums bei *b* nämlich zusammen mit der Zusammendrückung des überaus kleinen Luftvolums in den Verbindungsröhren macht so wenig aus, dass bei den grössten Drucksteigerungen die Blutsäule in der Canüle nur sehr wenig vorzurücken braucht.

Um dem Leser ein Urtheil über die Leistungsfähigkeit der be-



Fig. 52

schriebenen Vorrichtung zu ermöglichen, gebe ich eine damit ausgeführte graphische Darstellung der Druckschwankungen im linken Herzventrikel eines nicht gar grossen Hundes. Jeder wird zugeben, dass man keine grössere Anforderung an ein registrirendes Manometer stellen kann als die, den ungeheuer rapiden, umfangreichen Schwankungen des Druckes im linken Herzventrikel zu folgen. Es war zu diesem Zwecke an das oben erwähnte Verbindungsglasrohr in der beschriebenen Weise ein gerades neusilbernes Röhrchen angefügt. Dies Röhrchen, das an einem Ende eine schliessende Kuppe und ein paar Seitenöffnungen hat, war mit Sodalösung innen befeuchtet und mit Luft gefüllt, am anderen Ende durch ein zugequetschtes Kautschukröhrenstück vorläufig geschlossen und sodann eingeölt durch einen Schlitz in der linken Carotis in den Herzventrikel eingeführt. An den Klappen ohne Verletzung vorüberzukommen gelingt durch Hin- und Herschieben meist ganz leicht. Erst nachdem es richtig liegt wird es mit dem Manometer verbunden.

Die mit v bezeichnete Curve in Fig. 52 giebt nun eine Reihe von Herzschlägen auf diese Weise dargestellt. Die mit aa etc. bezeichnete Curve ist unmittelbar danach gezeichnet, als das Ende des Neusilberrohres in die Aorta zurückgezogen war. Ich habe absichtlich diese Curve beim zweiten Trommelumlauf in die Herzdruckcurve hineinzeichnen lassen, damit man ihr Lageverhältniss unmittelbar übersieht. Dass die Gipfel der Aortenwellen nicht mit den Druckmaximis der Ventrikelcurve zusammenfallen können versteht sich, da sie ja anderen Herzschlägen entsprechen. Auch eine Verschiebung der einen Curve könnte sie daher nicht alle zur Deckung bringen, und ich habe es vorgezogen, die Lage des Originals beizubehalten. Um die absoluten Werthe der Druckschwankungen aus den Angaben des Instrumentes ablesen zu können, muss es vor dem Versuche mit einem Quecksilbermanomoter empirisch graduirt werden. Eine solche Graduirung hatte im vorliegenden Falle ergeben, dass in der Curve Fig. 52 1 mm Ordi-

natenhöhe 7,1 mm Quecksilberhöhe entspricht. Was die Messung der Zeiten betrifft, so entspricht 1 cm Abscissenlänge ungefähr der Dauer von 0,2 Secunden.

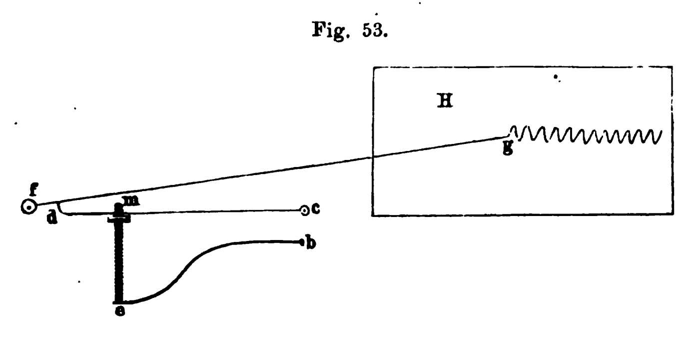
Man sieht hiernach, dass der Druck im Ventrikel etwa zwischen Null und 160 mm, in der Aorta zwischen 80 und 160 mm Quecksilber schwankt. Dass der beschriebene Apparat Druckschwankungen von 160 mm in weniger als 0,1 Secunde folgt ohne zurück zu bleiben oder weit über das Ziel hinaus zu schiessen, ist wohl eine Leistung, die gar nichts zu wünschen übrig lässt.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass die hier vorgelegte Herzdruckcurve bis in manche kleinste Details übereinstimmt mit den durch indirecte Methoden von Marey und Chauveau am Pferde gewonnenen, die in der „Physiologie médicalede la circulation du sang“ reproducirt sind.

IV. Marey's Sphygmograph.

Den zeitlichen Verlauf der Druckschwankungen in einer Arterie kann man, auch ohne eine manometrische Vorrichtung mit dem Innern der Arterie zu verbinden, graphisch darstellen. Wo nämlich eine grössere Arterie oberflächlich verläuft, sieht man durch die Haut hindurch ihr An- und Abschwellen mit zu- und abnehmendem Drucke, und es steht nichts im Wege, diese Durchmesseränderungen durch geeignete Fühlhebelvorrichtungen in vergrössertem Maassstabe graphisch darzustellen. Die erste Vorrichtung dieser Art ist von Vierordt ausgeführt worden. Da aber bei ihr sehr grosse träge Massen in Bewegung kommen, so entstellt sie das Bild des zeitlichen Verlaufes der Druckschwankungen sehr bedeutend. Der Vierordt'sche „Sphygmograph“ hat daher nur noch ein historisches Interesse. Später hat Marey eine vollkommenere Vorrichtung zu diesem Zwecke construirt, die gegenwärtig allgemein im Gebrauch ist.

Fig. 53.



Ein Schema von Marey's Sphygmographen ist in Fig. 53 dargestellt. Am festen Gestelle des Apparates ist bei *b* eine starke Feder *eb* befestigt,

die, wenn das Ganze in geeigneter Weise an den Arm z. B. angeschnallt ist, mit ihrem freien Ende *e* auf die Radialarterie drückt. Sie wird also durch die pulsirende Arterie in Schwingungen versetzt. Die eigenen selbständigen Schwingungen der Feder können aber hier keine grosse Rolle spielen, da erstens ihre träge Masse klein ist. Zweitens aber sind die elastischen Kräfte der Feder sehr stark, so dass sie nur sehr kleine Oscillationen machen wird, und daher wird ihre Masse immer nur unbedeutende Geschwindigkeiten erlangen. Die Reibungswiderstände sind unbedeutend, aber doch nicht gleich Null, was nach S. 149 für die Treue eines Wellenzeichners vortheilhaft ist. Die Bewegungen des Federendes *e*, welche somit den Bewegungen des unterliegenden Arterienpunktes ziemlich genau folgen werden, übertragen sich auf ein sehr wenig massenhaftes Hebelwerk, zunächst nämlich durch die (bloss auf *e* aufgestützte) Stellschraube *ee* an den Hebel *cd*, der in *c* seinen festen Punkt hat, und von da auf den Hebel *fg*, der auf dem Hebelende *d* ebenfalls nur aufliegt. Der Punkt *g* macht daher die Bewegungen von *e* in vergrössertem Maassstabe mit und registrirt sie an der durch ein Uhrwerk vorübergeführten berussten Glasplatte *h*.

Wie aus der Beschreibung ersichtlich, ist Marey's Sphygmograph mit einem kleinen Uebelstande behaftet, von welchem nur das Quecksilberkymographion frei ist. Der zeichnende Punkt *g* nämlich bewegt sich in einem Kreisbogen auf und ab, statt in einer geraden Linie. Die Curve würde natürlich, wenn es auf genaue Messungen ankäme, schwer zu deuten sein, wo es aber bloss auf den allgemeinsten Charakter ankommt, ist derselbe doch leicht herauszulesen, und man kann diese Eigenheit, die auch das soeben beschriebene Federkymographion hat, kaum als einen wesentlichen Uebelstand bezeichnen.

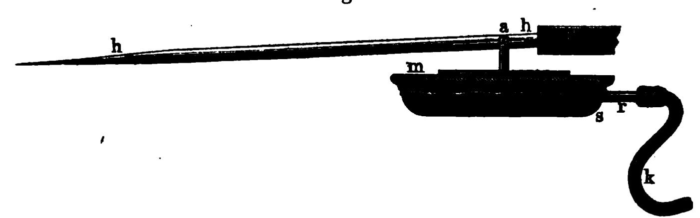
Mach hat Marey's Sphygmographen dadurch experimentell geprüft, dass er ihn von vorn herein bekannte Oscillationen eines elastischen Schlauches registriren liess, und gefunden, dass er dies mit grosser Treue thut. Ich kann Mach schliesslich in folgender Bemerkung über den Sphygmographen nur Recht geben. Er findet den Uebertragungshebel *cd* ganz überflüssig und schlägt vor, das Federende direct auf den Schreibhebel *fg* wirken zu lassen, und zwar schlägt er vor, die Uebertragung der Bewegung zu vermitteln durch ein Stäbchen, was an *a* sowohl als am Schreibhebel durch Gelenke befestigt ist, dadurch wird die Möglichkeit des freien Aufwerfens des Schreibhebels beseitigt.

Marey's Cardiograph.

Marey hat noch ein anderes Instrument construirt, mittelst dessen man die Druckschwankungen in oberflächlich gelegenen Arterien des lebenden Menschen graphisch darstellen hann. Da es namentlich auch zur graphischen Darstellung des Herzstosses zu gebrauchen ist, so wird es Cardiograph genannt.

Eine flache Schale S (Fig. 54) aus Messingblech von etwa 4 cm Durchmesser ist mit einer Kautschukmembran m luftdicht überbunden. In das Innere führt eine mit der Schale fest verbundene Röhre. Sie dient einmal zur Befestigung der Schale am Stativ und dann dazu, mittelst eines Kautschukschlauches kk einen beliebigen anderen Hohlraum mit dem Hohlraum der Schale in Verbindung zu setzen. Auf der Membran m ist ein Aluminiumblatt aufgeleimt, welches ein kleines Stäbchen von demselben Metalle trägt. Durch eine Gabel an seinem oberen


Fig. 54.



Ende ist bei a eine feine Nadel als Axe (senkrecht zur Ebene unserer Zeichnung) gesteckt. Diese Axe geht durch einen Schlitz in einem sehr leichten Hebel hh, welcher nahe bei a um eine am Stative des Apparates feste Axe drehbar ist.

Man sieht leicht, wenn zu der in der Schale enthaltenen Luft eine neue Luftmenge eingepresst wird, so muss sich die Membran ein wenig aufblähen und den Hebel hh erheben. Die das freie Ende desselben bildende Zeichenspitze wird also die Aufblähung der Membran in sehr vergrössertem Maassstabe wiedergegeben.

Soll mit Hülfe dieser Vorrichtung z. B. der zeitliche Verlauf der Druckschwankungen in der Carotis eines Menschen graphisch dargestellt werden, so wird an das andere Ende des Schlauches k ein kleiner Trichter gesteckt und seine Oeffnung am Halse da fest aufgesetzt, wo die Arterie am oberflächlichsten liegt. Das ganze Luftvolum in Trichter, Schlauch und Schale des Cardiographen ist also jetzt vollkommen abgeschlossen, und wenn nun die Blutwelle der Arterie die Haut ein wenig in den aufgesetzten Trichter hineinwölbt, so wird Luft aus diesem in die Schale S verdrängt und der Hebel gehoben. Sinkt die Arterie wieder zusammen, so wird der Hebel sich entsprechend senken. Lehnt die Zeichenspitze des Hebels also an einer berussten rotirenden Trommel, so zeichnet sie den zeitlichen Verlauf der Druckschwankungen resp. Anschwellungen der Arterie mit grosser Treue.

Setzt man die Oeffnung des Trichters an der Stelle auf die Brust eines Individuums mit ausgeprägtem Herzspitzenstoss, wo sich die Herzspitze periodisch vordrängt, so zeichnet der Apparat die Herzstosscurve.

Man kann die Marey'sche Luftkapsel sehr vortheilhaft noch zu graphischen Darstellungen vieler anderen kleinen periodischen Bewegun-

gen verwenden. In der That, um von dem Hin- und Hergehen eines festen Körpers mit kleinen Excursionen ein Abbild zu geben, braucht man nur an das andere Ende des Schlauches *k* eine zweite geschlossene Luftkapsel anzustecken und den hin- und hergehenden festen Körper, sei es mittelst eines Hebels, sei es direct auf die Membran der Luftkapsel drücken zu lassen. Der Hebel der ersten Kapsel wird alsdann an eine rotirende Trommel ein getreues Bild vom zeitlichen Verlaufe der Hin- und Herbewegung des festen Körpers geben.

So kann die Marey'sche Luftkapsel auch statt eines zeichnenden Schwimmers dienen, kleine Schwingungen eines Quecksilbermanometers zu registriren, man braucht nur das Ende des Schlauches *k* auf der sonst offenen und den Schwimmer führenden Schenkel des Manometers luftdicht aufzustecken. Das Steigen der Flüssigkeit wird jetzt, statt den Schwimmer zu heben, Luft in die Kapsel drängen und ihren Zeichenhebel steigen machen.

Es ist klar, dass dieser Apparat den grossen Vorzug hat, zu gestatten, dass die Zeichnung an einer ganz anderen Stelle gemacht wird, als wo sich der bewegte Körper befindet, indem der beliebig lange und leicht bewegliche Kautschukschlauch volle Freiheit giebt, die zeichnende Kapsel ganz beliebig nach Bequemlichkeit aufzustellen.

VIERTER ABSCHNITT.

VOM SCHALLE.

Erstes Capitel.

Zerlegung der Schwingungen.

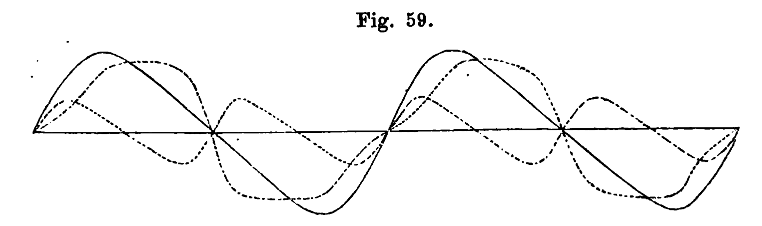
Die Gegenstände dieses und des nachfolgenden Capitels sind zwar in jedem Lehrbuche der Physik, insbesondere auch in Pfaundler's Neubearbeitung des Müller-Pouillet'schen dargestellt, jedoch nicht mit der Ausführlichkeit, wie es zum Verständnisse der Lehre vom Hören erforderlich ist. Es soll daher hier eine solche eingehende Darstellung gegeben werden, bei welcher natürlich Wiederholung des in den physikalischen Lehrbüchern schon Gegebenen nicht ganz vermieden werden kann.

Eine Schallschwingung ist vollständig bestimmt, wenn man drei Stücke kennt, nämlich 1. die Amplitude, d. h. die Grösse des Weges, welchen die schwingenden Theilchen hin- und hergehend zurücklegen, dieses Stück bestimmt die Intensität des Schalles; 2. die Dauer der Schwingung, d. h. die Zeit, welche zu jedem Hin- und Hergange gebraucht wird, resp. die Zahl, welche angiebt, wie viele Male die schwingenden Theilchen in der Zeiteinheit hin- und hergehen, diese Grösse bestimmt die „Höhe" des Klanges; 3. die Form der Schwingung, sie bestimmt das Timbre oder die Farbe des Klanges.

Man versteht unter Form der Schwingung das Gesetz, nach welchem die schwingenden Theilchen sich im Verlaufe eines Hin- und Herganges bewegen. Die Schallschwingungen sind viel zu rasch, als dass man den zeitlichen Verlauf einer einzelnen durch den Gesichtssinn auffassen könnte. Aber selbst, wenn Schwingungen ganz langsam sind, so dass

von beiden Componirenden gleich. Anders ausgedrückt: die Schwingungszahl der resultirenden Bewegung ist gleich der Schwingungszahl der einen Einzelbewegung, wenn die Schwingungszahl der anderen ein Vielfaches derselben ist. So sieht man z. B. in Fig. 59 eine periodische Bewegung resultiren, deren Periode gleich ist der einen Componente (der gestrichelt

Fig. 59.

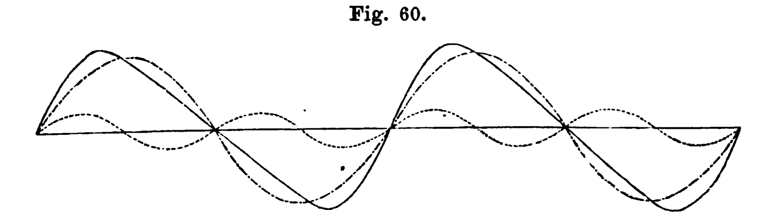


dargestellten), weil die Periode der anderen Componente (der punktirten) gerade die Hälfte der ersten ist.

Wenn sich zwei Klänge zusammensetzen lassen, so lassen sich nach derselben Regel auch drei Klänge zusammensetzen, denn man könnte ja erst zwei davon vereinigen und den resultirenden wieder als einfache Componente ansehen. Ebenso verhält es sich dann mit vieren und überhaupt mit beliebig vielen. Es behält selbstverständlich auch hier das Gesetz Geltung, dass die resultirende Bewegung nur dann eine regelmässig periodische ist, wenn die Perioden aller Theilbewegungen commensurabel sind, oder, was dasselbe sagt, wenn die Schwingungszahlen der Componenten sämmtlich Vielfache derselben Zahl sind. Diese Zahl ist alsdann die Schwingungszahl der resultirenden Bewegung.

Die Zusammensetzung der Schwingungen lässt sich nun umkehren in eine Zerlegung. In der That es sei ein Klang gegeben, der beispielsweise an einem materiellen Punkte eine Bewegung hervorruft, wie sie durch die ausgezogene Curve, Fig. 60, dargestellt ist. Den

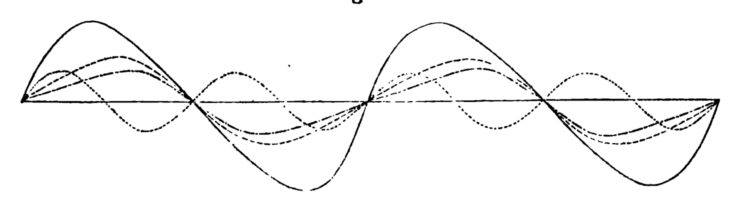
Fig. 60.



soeben entwickelten Grundsätzen gemäss lässt sich dann behaupten: der betrachtete Punkt würde genau dieselbe Bewegung machen, wenn zu ihm statt des einen gegebenen Klanges zwei Klänge gleichzeitig fortgepflanzt würden, die sich durch die punktirte und gestrichelte Curve in der Figur darstellen, denn diese beiden Curven sind so gezeichnet, dass sie, nach dem obigen Principe zusammengesetzt, die ausgezogene Curve geben.

Mit demselben Rechte, womit man den gegebenen Klang in die zwei obigen Componenten zerlegte, hätte man ihn aber auch in gewisse andere Componenten zerlegen können, z. B. in die drei Fig. 61 gezeichneten.

Fig. 61.



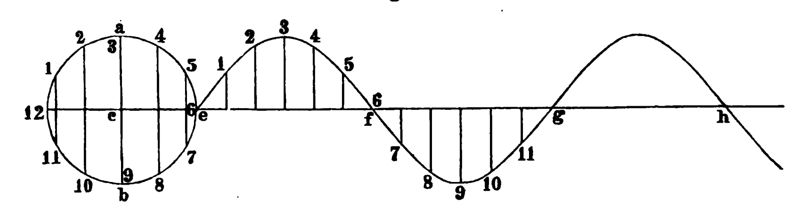
Die Ordinaten der punktirten, der gestrichelten und der so —·—·— gezogenen Curven geben nämlich summirt die Ordinaten der ausgezogenen Curve.

Während also das Problem der Zusammensetzung mehrerer gegebener Klänge stets nur eine bestimmte Lösung hat, lässt sich das Problem der Zerlegung eines gegebenen Klanges in verschiedene Componenten immer auf unendlich viele verschiedene Arten lösen. In der Natur der Sache liegt nur die eine Bestimmung, dass die Perioden aller Componenten aliquote Theile von der Periode der gegebenen Bewegung sind. Es ist ausserdem wohl zu beachten, dass die Zerlegung eines Klanges zunächst eine mathematische Fiction ist; die Zerlegung bedeutet eben nichts Anderes, als dass sich stets statt einer Ursache mehrere Ursachen denken lassen, welche zusammenwirkend dieselbe Bewegung hervorbringen würden, welche durch die eine Ursache in Wirklichkeit hervorgebracht wird.

Durch Einführung von Nebenbedingungen kann man auch das Problem der Zerlegung eines Klanges in Componenten zu einem bestimmten machen. Besonders bedeutungsvoll wird die Zerlegung, wenn man als Nebenbedingung die stellt, dass alle Componenten eine und dieselbe bestimmte Form haben sollen und zwar diejenige, welche wir mit Helmholtz als die Form des „einfach pendelartigen“ Schwingens bezeichnen wollen. Diese Form nimmt in der That unter allen den unzähligen möglichen Schwingungsformen eine ausgezeichnete Stelle ein. Das Gesetz, nach welchem sich irgend ein Punkt eines Pendels (bei kleinen Excursionen) hin- und herbewegt, ist nämlich vom Gesichtspunkte seiner physischen Ursachen, sowie vom Gesichtspunkte der mathematischen Darstellung das einfachste Gesetz einer periodischen Bewegung. Nach diesem Gezetze geschehen auch die Oscillationen mancher tönender Körper, z. B. der Stimmgabeln u. s. w. Die mathematische Darstellung dieses Gesetzes ist $x = a \sin(bt + c)$, wenn t die laufende Zeit, x die jeweilige Abweichung des schwingenden Theilchens von der Gleichgewichtslage, a, b und c constante Grössen bedeuten. Eine Anschauung vom pendelartigen Hin- und Herschwingen erhält man leicht, wenn man einen sicht-

baren Punkt auf einer Kreislinie mit constanter Geschwindigkeit umlaufen lässt und ihn dann von einem in der Ebene der Kreisbahn selbst gelegenen Standpunkte aus betrachtet. Der Punkt scheint alsdann auf einer dem Durchmesser des Kreises gleichen Geraden bloss hin- und herzugehen, und zwar nach dem Gesetze des pendelartigen Schwingens. Eine das Gesetz des pendelartigen Schwingens darstellende Wellenlinie erhält man hiernach auf folgende Weise: Man zeichne, Fig. 62, einen Kreis, dessen Durchmesser die Amplitude der darzustellenden Schwingung misst. Seinen Umfang theilt man in eine gewisse gerade Anzahl von gleichen Theilen, z. B. in 12, wie in der Figur. Nun ziehe man durch zwei diametral gegenüberliegende Theilpunkte einen Durchmesser. Seine Verlängerung soll als Abscissenlinie dienen. Darauf schneidet man zunächst ein Stück ab, welches die Dauer der darzustellenden Schwingung repräsentirt, und dies theilt man in ebenso viele gleiche Theile wie den Kreisumfang, und errichtet auf den Theilpunkten Perpendikel von derselben Länge wie die Perpendikel von den entsprechenden Theilpunkten des

Fig. 62.



Kreisumfanges auf den Durchmesser. Verbindet man die Endpunkte dieser Perpendikel durch einen stetigen Zug, so hat man die graphische Darstellung einer pendelartigen Schwingung.

Es braucht kaum besonders bemerkt zu werden, dass alle möglichen pendelartigen Schwingungen nur noch Unterschiede bezüglich der Intensität und Schwingungszahl zulassen. Dem entspricht, beiläufig bemerkt, die physiologische Thatsache, dass alle durch pendelartige Schwingungen hervorgerufene Schallempfindungen bezüglich des Timbres übereinstimmen. Sie machen einen ähnlichen Eindruck wie der Vocal U. Man zeichnet die Empfindung, welche eine pendelartige Schwingung hervorruft, vor anderen Klangempfindungen durch die Benennung Ton aus, und wir können diese Bezeichnung der Bequemlichkeit wegen auch auf den entsprechenden physikalischen Vorgang übertragen.

Unter Anwendung dieser Bezeichnungsweise können wir das Resultat unserer Betrachtungen so ausdrücken: Jeder Klang, seine Schwingungsform mag sein, welche sie will, lässt sich auffassen als eine Summe von einfachen Tönen, und zwar nur auf eine bestimmte Art. Es lässt sich allemal eine bestimmte Reihe von Tönen (pendelartigen Oscillationen) von bestimmter Höhe (Schwingungszahl) und bestimmter Intensität (Schwingungsamplitude) angeben, welche gleichzeitig zu einem Punkte

fortgepflanzt hier dieselbe Bewegung hervorbringen würden, die daselbst ein gegebener Klang (Oscillation von verwickelterer Periodicität) wirklich hervorbringt. So zerlegt sich beispielsweise der oben schon willkürlich auf zwei Arten zerlegte Klang (siehe die Fig. 60 u. 61), wenn die Componenten einfache Töne (pendelartige Schwingungen) sein sollen, nur in der ganz bestimmten, durch Fig. 60 dargestellten Weise, wo die punktirte und die gestrichelte Curve die Componenten sind. Die gestrichelte Curve stellt einen Ton von der Schwingungszahl des gegebenen Klanges dar, die punktirte einen Ton von doppelter Schwingungszahl.

Die Töne, deren Summe einem gegebenen Klange äquivalent ist, nennt man seine Partialtöne. Es ist klar, dass die Schwingungszahlen der Partialtöne sämmtlich Vielfache der Schwingungszahl des gegebenen Klanges sind. Nennen wir also diese n, so sind die Schwingungszahlen der Partialtöne der Reihe nach $1 \times n$, $2 \times n$, $3 \times n$ etc.; den ersten Partialton, dessen Schwingungszahl $= 1 \times n$ ist, nennt man den Grundton des Klanges, die anderen seine Obertöne. Jedem dieser Partialtöne kommt im gegebenen Falle eine bestimmte Intensität zu, deren Werth auch möglicherweise $= 0$ sein kann.

Es lässt sich mathematisch zeigen, dass im Allgemeinen ein gegebener Klang vollkommen genau nur durch eine unendliche Reihe von Partialtönen dargestellt werden kann. Es lässt sich aber ferner zeigen, dass die Werthe der ferneren Glieder dieser Reihe von einem im einzelnen Falle angebbaren an so klein werden, dass sie auf die Summe keinen merklichen Einfluss üben. Mit beliebigem Grade der Annäherung lässt sich daher jeder gegebene Klang dennoch durch eine begrenzte Anzahl von Partialtönen darstellen.

Diese bestimmte Art der Zerlegung einer Schwingung von beliebiger Form in pendelartige Componenten, oder die Zerlegung eines Klanges in einfache Töne ist nicht mehr eine blosse mathematische Fiction, vielmehr können die Partialtöne unter Umständen zu reeller Wirksamkeit kommen. Dies geschieht z. B. im menschlichen Ohre. In welcher Weise das physikalisch möglich ist, soll im folgenden Capitel gezeigt werden.

Zweites Capitel.

Vom Mittönen.

Das Problem des Mittönens ist eigentlich im Wesen dasselbe wie das, welches wir oben bei Gelegenheit der Wellenzeichner vor uns hatten. Da wir aber die mechanischen Probleme hier nicht in ihrer allgemein-

sten Fassung mathematisch behandeln können, so müssen wir an dieser Stelle von besonderen neuen Betrachtungen ausgehen.

Es ist eine bekannte Erscheinung, dass irgend ein selbständiges Schwingens fähiger Körper in solches dadurch versetzt werden kann, dass sich zu ihm ein Klang fortpflanzt. Man kennt schon aus dem gewöhnlichen Leben zahlreiche Beispiele derart, dass z. B. Fensterscheiben bei gewissen Klängen klirren. Man weiss, dass Sand auf eine gespannte Membran gestreut, aufhüpft, wenn in der Nähe gewisse Klänge angegeben werden. Aus einem Clavier ertönt bei aufgehobenen Dämpfern ein lauter dauernder Nachhall, wenn man hineinsingt. Selbst Stimmgabeln, auf geeigneten Resonanzkästen befestigt, gerathen unter Umständen in Schwingungen, wenn ein gewisser Klang in der Nachbarschaft erregt wird.

Es fragt sich, wie es möglich ist, dass durch die leisen Anstösse der Luft in einem Schallwellenzuge, die das leichteste Federchen nicht merklich in Bewegung versetzen, schwere Massen, wie z. B. die Zinken einer Stimmgabel, zu ausgiebigen Schwingungen gebracht werden können. Um die Möglichkeit der Anschauung näher zu bringen und zugleich auch einen ersten Einblick in die Bedingungen zu thun, unter denen der fragliche Vorgang statthat, wollen wir einen analogen Vorgang erörtern, den Helmholtz sehr zweckmässig in seiner Akustik zur Erläuterung des Mittönens gebraucht.

Es gelte eine schwere Kirchenglocke in weite hin- und hergehende Schwingungen zu versetzen. Selbst der stärkste Mann wird sie durch einen einmaligen Anzug am Strange zu keiner namhaften Excursion bringen. Nun ist aber die Glocke so befestigt, dass sie, einmal angestossen, ohne weitere Wirkung einer fremden Kraft viele Schwingungen hin und her ausführt, weil eben die durch den ersten Anstoss ihr ertheilte lebendige Kraft nur sehr langsam vom Luftwiderstande und der Axenreibung aufgezehrt wird. Jede folgende Schwingung steht hinter der vorhergehenden fast gar nicht an Amplitude zurück. Ein erster, wenn auch schwacher Anzug am Strange setzt die Glocke immerhin in eine wirkliche Bewegung, wenn dieselbe auch kaum mit Augen wahrnehmbar wäre. Die Glocke würde daher sich selbst überlassen eine Reihe sehr kleiner kaum merkbarer Pendelschwingungen ausführen, und sie wird sich insbesondere nach Verlauf einer gewissen Zeit, vom ersten Anzuge aus gerechnet, welche Zeit eben die Schwingungsdauer der Glocke ist, von selbst schon wieder in demselben Sinne bewegen, in welchem sie durch den ersten Anzug bewegt wurde. Der Strang wird also in diesem Zeitpunkte von selbst schon wieder herabsinken, freilich nur um ausserordentlich wenig. Geschieht nun in dieser Zeit ein neuer Anzug so stark wie der erste, so muss er die Bewegung der Glocke beschleunigen und sie wird also beim zweiten Hingange weiter kommen als beim ersten. Ueberlässt man dann abermals die Glocke sich selbst, bis sie wieder eine Schwingung vollendet hat, d. h. bis wieder der Strang von selbst schon

zu sinken anfängt, und zieht jetzt von Neuem, so kommt sie beim dritten Hinschwung noch weiter u. s. f. So kann ein Knabe durch wiederholte Anzüge eine schwere Kirchenglocke in weite Schwingungen versetzen, wenn er nur allemal die Züge am Strange in solchen Zeitabschnitten macht, in welchen die Glocke von selbst schon in der Richtung geht, in welcher sie der Zug zu bewegen strebt, d. h. eben durch jeden Zug die Bewegung der Glocke beschleunigt. Am vollkommensten geschieht dies, wie aus der Beschreibung erhellt, wenn die Züge am Strange in genau demselben Tempo erfolgen, wie die selbständigen Schwingungen der Glocke, d. h. wenn die Zahl der Züge in der Zeiteinheit der Schwingungszahl [1]) der Glocke genau gleich ist. Absolut nöthig ist dies jedoch nicht, man könnte auch allemal eine Schwingung der Glocke überschlagen. Man könnte nach dem ersten Anzuge warten, bis die Glocke hin- und her-, wieder hin- und wieder hergegangen wäre, und wenn sie jetzt zum dritten Male wieder hinginge, beschleunigte man sie durch den zweiten Zug. Dann liesse man sie wieder hin-, her-, hin-, hergehen, und wenn sie zum fünften Male hinginge, zöge man erst wieder u. s. w. Ebenso könnte man auch je zwei ganze Schwingungen zwischen zwei Zügen vorübergehen lassen. Wir können somit allgemein sagen: Wollen wir eine schwere Glocke durch regelmässig auf einander folgende kleine Züge in grosse Schwingungen versetzen, so muss die Zeit zwischen je zwei Zügen der Schwingungsdauer der Glocke gleich oder ein Vielfaches davon sein, mit anderen Worten, die Zahl von Zügen in der Zeiteinheit muss der Schwingungszahl der Glocke gleich oder ein aliquoter Theil davon sein. Folgen sich die Züge in einem anderen Tempo, so wird es durchschnittlich ebenso oft vorkommen, dass der Zug die Bewegung der Glocke verzögert, als dass er sie beschleunigt, und es wird zu keiner ausgiebigen Bewegung kommen. Dies wird namentlich dann immer stattfinden, wenn die Zeit zwischen je zwei Zügen kleiner als die Schwingungsdauer der Glocke ist.

Ein anderes Beispiel derart kann man sich auf jedem Zimmerplatze leicht zur Anschauung bringen. Wenn ein liegender schlanker Tannenstamm etwas weit über seine Unterlage vorragt, so führt dieser Theil, einmal angestossen, regelmässige Schwingungen aus. Man kann ihn nun in solche von grosser Amplitude versetzen durch ganz leise Schläge mit einem leichten Stöckchen, wenn diese Schläge mit den eigenen Schwingungen des Balkens gleiches Tempo halten, oder die Zwischenzeit zwischen je zwei Schlägen ein Vielfaches der Schwingungsdauer des Balkens ist, während weit stärkere Schläge in anderem Tempo fast unwirksam sind.

Bis zu einem gewissen Punkte lassen sich die Ergebnisse dieser

---

[1]) Für die Schwingungszahl einer grossen Glocke würde man natürlich nicht die Secunde, sondern etwa die Minute als Zeiteinheit wählen.

Betrachtungen geradezu auf das Mittönen elastischer Körper übertragen. Wir haben es dabei natürlich mit viel rascheren Schwingungen zu thun, und der ganze Vorgang lässt sich nicht mehr mit dem Auge verfolgen. Indessen ist es doch klar, dass bei Fortpflanzung eines Klanges die Luft vor dem elastischen Körper abwechselnd dichter und dünner ist und dass dies in ähnlicher Weise bewegend wirken muss, wie die wiederholten Züge am Glockenstrang. Der erste Stoss wird den Körper in eine unmerkliche Bewegung setzen. Ist nun aber derselbe so beschaffen, dass er (der Glocke analog), einmal angestossen, seine Bewegung lange Zeit fortsetzt, dann würde er ohne fernere Stösse eine Reihe unmerklich kleiner Schwingungen ausführen, deren zweite der ersten an Grösse kaum nachsteht. Stimmt jetzt der erregende Klang an Höhe mit dem Eigenklang des betrachteten elastischen Körpers genau überein, dann wird ihn der zweite Luftstoss wieder in derselben Richtung schon von selbst bewegt antreffen, in welcher ihn der erste Stoss bewegte und in welcher ihn folglich der zweite auch zu bewegen strebt. Es wird demnach in diesem Falle eine Summirung der einzelnen Anstösse stattfinden, deren Resultat ein sehr merkliches Mittönen ist.

Es mag beiläufig bemerkt werden, dass, wenn der mittönende Körper selbst der Luft nur eine kleine Oberfläche bietet, wie z. B. eine gespannte Saite, dass dann in der Regel die Anregung zum Mittönen keine directe ist, die Luft setzt vielmehr zunächst den Resonanzboden in Bewegung, dieser den Befestigungspunkt, und dadurch kommt die Saite in ähnlicher Weise in Schwingungen, wie ein an einem Faden in der Hand gehaltenes Gewicht in grosse Pendelschwünge geräth, wenn man mit der Hand ganz *kleine* den Pendelschwüngen isochrone Bewegungen ausführt.

Jeder neue Luftstoss wird nun den mitschwingungsfähigen Körper auch dann immer beschleunigen können, wenn die Periode des erregenden Klanges ein Vielfaches ist von der Dauer der Eigenschwingungen jenes Körpers. Zahlreiche Beispiele lassen sich zur Bestätigung dieser Folgerungen beibringen. Wenn man auf einer Geige eine Saite stark anstreicht, so klingt die vollkommen gleich gestimmte Saite auf einer nahe befindlichen anderen Geige mit. Man hebe von der auf $\bar{c}$ gestimmten Saite eines Claviers den Dämpfer ab, und schlage nun das c kräftig aber nur momentan an, so wird man den Klang $\bar{c}$ deutlich nachklingen hören, weil die darauf gestimmte Saite durch den Klang von doppelter Schwingungsdauer in merkliches Mitschwingen versetzt wurde. Ebenso klingt auf dem Clavier die $\bar{g}$-Saite deutlich auf den Klang c mit, wenn der Dämpfer von ihr gehoben ist, weil die Schwingungsdauer des Klanges c das Dreifache von der des Klanges $\bar{g}$ ist u. s. w.

Nach dem Gesagten scheint der Satz allgemein richtig: Ein des Klingens fähiger Körper wird unter sonst geeigneten Bedingungen *allemal* zum Mittönen kommen, wenn zu ihm ein Klang fortgepflanzt wird, dessen Schwingungsdauer ein Vielfaches von der Dauer seiner Eigen-

schwingungen ist, oder, was dasselbe sagt, wenn ein Klang zu ihm fortgepflanzt wird mit einer Schwingungszahl, von welcher die Schwingungszahl des Eigenklanges des Körpers ein Vielfaches ist, gleichgültig, welche Schwingungs*form* der erregende Klang hat. Dieser Satz ist aber nicht in voller Allgemeinheit richtig. Die analytische Mechanik zeigt vielmehr, dass eine auf die Schwingungsform bezügliche Beschränkung nöthig ist. Das lässt sich freilich nicht mehr mit der Anschauung verfolgen und durch Beispiele wie die obigen erläutern, wir müssen daher den streng richtigen Grundsatz der Theorie des Mittönens hier einfach auf Autorität annehmen, da sein Beweis eben nur durch den höheren Calcül geliefert werden kann. Wir beschränken uns übrigens dabei zunächst auf solche mitschwingungsfähige Körper, welche bloss in einer Weise nach dem Pendelgesetze schwingen können, die also nach dem oben festgestellten Sprachgebrauche stets nur einen *einfachen* Ton geben. Solche Körper sind alle die als Ganzes — nicht aber durch Knotenflächen in Abtheilungen getheilt — unter dem Einfluss elastischer Kräfte hin- und hergehen, wie beispielsweise die Zinken einer Stimmgabel. In Bezug auf einen solchen Körper können wir nun den in Rede stehenden überaus wichtigen Grundsatz folgendermaassen aussprechen: *Der Körper tönt mit einem Klang, von dessen Schwingungszahl die Schwingungszahl seines Eigentones ein Vielfaches ist, jedoch nur dann, wenn die Schwingungs*form* des Klanges so beschaffen ist, dass unter seinen Componenten oder Partialtönen der Eigenton des betrachteten Körpers in merklicher Stärke vorkommt.* Man sieht, dass dieser Satz, der sich durch Versuche vollkommen bestätigen lässt, der Zerlegung der Klänge in Partialtöne eine objective Bedeutung giebt, indem diese Partialtöne besondere mechanische Wirkungen hervorbringen.

Einige Beispiele mögen den Satz noch erläutern. Eine auf $\bar{c}$ gestimmte Stimmgabel wird man niemals durch eine auf c abgestimmte Gabel zum starken Mittönen bringen können. Das c macht zwar gerade halb so viele Schwingungen als $\bar{c}$, aber die Gabel und die von ihr in Bewegung gesetzte Luft schwingt in einer Weise, dass die Zerlegung in pendelartige Componenten für die Componente $\bar{c}$ (sowie für alle Obertöne) den Werth Null verlangt. Dagegen liesse sich die auf $\bar{c}$ abgestimmte Gabel ganz wohl zum Mittönen bringen durch eine auf c gestimmte gestrichene Geigensaite. Diese schwingt nämlich halb so oft als dem Tone $\bar{c}$ entspricht in einer Form, deren Zerlegung der Componente $\bar{c}$ eine grosse Stärke zuschreibt. Erregt man dagegen eine gespannte auf c gestimmte Saite nicht durch Streichen in der Nähe des Steges, sondern durch Zupfen genau in der Mitte, so ist ihre Schwingungsform, wie sich mathematisch zeigen lässt, derart, dass zwar höhere Obertöne im Klange enthalten sind, nicht aber der Ton $\bar{c}$. Durch die auf diese Art angeregte Saite würde man also gleichfalls die auf $\bar{c}$ gestimmte Gabel nicht zum

Mittönen bringen können. Nun ist zwar wohl der Klang einer gezupften Saite überhaupt zu schwach, um eine Stimmgabel in merkliches Mitschwingen zu versetzen, und ein negatives Resultat des beschriebenen Versuches würde daher noch nichts beweisen. Es giebt aber andere Prüfungsmittel, die auch in dem vorliegenden Falle unsern Satz aufs Entschiedenste bestätigen. Z. B. die Luftmasse in einer Hohlkugel mit einer Oeffnung geräth leicht in pendelartige Schwingungen von bestimmter Dauer, d. h. sie kann einen einfachen Ton von bestimmter Höhe angeben. Solche Kugeln, auf verschiedene Töne abgestimmt und der Oeffnung gegenüber mit einem offenen flaschenhalsförmigen Ansatz versehen, bilden die von Helmholtz in die Akustik eingeführten Resonatoren. Setzt man den Ansatz eines solchen Resonators in das eine Ohr und verstopft das andere, so schmettert allemal der Eigenton des Resonators mit bedeutender Stärke ins Ohr, sowie ein Klang in der Nähe erzeugt wird, welcher jenen Eigenton als Partialton in einiger Stärke enthält. Wäre also beispielsweise der Resonator auf $\bar{c}$ abgestimmt und striche man eine c gebende Saite in der Nähe des Steges mit dem Bogen, so würde man $\bar{c}$ laut hören. Zupfte man dagegen die Saite genau in der Mitte, so würde die Luftmasse des Resonators in Ruhe bleiben und man würde $\bar{c}$ nicht hören, weil in diesem Falle der Klang c den Partialton $\bar{c}$ nicht enthält. Die Resonatoren sind daher sehr geeignete Mittel, die Klangfarben verschiedener Instrumente zu analysiren.

Stellen wir uns eine ganze Reihe von elastischen Körpern vor, die nur pendelartiger Schwingungen fähig sind und deren Eigentöne die ganze in der Musik gebräuchliche Scala von etwa sieben Octaven darstellen. In der Nähe dieses Apparates werde jetzt ein Klang erzeugt, dessen Höhe dem c entspricht und dessen Schwingungsform so beschaffen ist, dass er die fünf ersten Partialtöne in namhafter, jedoch mit wachsender Höhe abnehmender Stärke enthält. Dann werden nur die auf $\bar{c}$, $\bar{c}$, $\bar{\bar{g}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, $\bar{\bar{\bar{e}}}$, $\bar{\bar{\bar{f}}}$ gestimmten Körper mittönen, und zwar je höher ihre Stimmung, desto schwächer. Wäre der erregende Klang c so beschaffen gewesen, dass gewisse Componenten darin fehlten, z. B. $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$, so würden auch die entsprechenden Körper unserer Reihe schweigen. Kurz die aus dem mittönenden Apparate kommende Gesammtbewegung wird eine resultirende Schwingung geben, von derselben Form, wie die erregende war, da sie sich aus denselben Componenten in ähnlichem Verhältnisse zusammensetzt. Ein Ohr, das den Nachhall aus unserem Apparat vernimmt, hat daher nicht bloss den Eindruck von derselben Höhe, sondern auch den Eindruck von derselben Klangfarbe wie vom erregenden Klang.

Einen Apparat, wie den soeben bloss gedachten, haben wir annäherungsweise in jedem Claviere wirklich vor uns. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, dass die Saiten eines Claviers nicht ausschliesslich in pendelartige Schwingungen gerathen können. Dieser Unterschied ändert jedoch nicht viel am Erfolge. In der That können wir

den soeben ausgedachten Versuch an einem Clavier leicht ausführen. Man hebe die Dämpfer von den Saiten ab und singe gegen den Resonanzboden kräftig einen deutlich articulirten Vocal in einer Höhe, welche der Stimmung einer Saite des Claviers möglichst genau entspricht. Der aus dem Clavier herauskommende Nachhall zeigt alsdann aufs Frappanteste die Klangfarbe des hineingesungenen Vocales. Der Charakter eines bestimmten Vocales besteht eben nur in der Schwingungs f o r m, oder, was dasselbe sagt, in der Zusammensetzungsweise des Klanges aus seinen Partialtönen. Das Clavier zerlegt diesen Klang durch Mittönen wirklich, und der Nachhall besteht aus denselben Componenten in demselben Verhältniss der Stärke, wie sie im erregenden Klange vorhanden waren. Der Nachhall hat also im vorliegenden Falle, wo das Timbre durch den Vocal bezeichnet wird, denselben Vocalcharakter wie der erregende Ton.

Beiläufig sei bemerkt, dass höchst wahrscheinlich das C o r t i'sche Organ der Schnecke ähnlich wirkt wie in dem soeben beschriebenen Versuche das Clavier, doch ist die weitere Ausführung dieser Hypothese Sache der Physiologie.

Schon das allgemeine Princip der Stetigkeit lässt vermuthen, dass der oben aufgestellte Grundsatz der Lehre vom Mittönen nicht a b s o l u t richtig ist. In der That, wenn ein Körper sehr stark mittönt mit einem Klange, unter dessen Componenten der Eigenton des Körpers ist, sollte er gleich gänzlich schweigen bei einem Klange, unter dessen Componenten eine dem Eigentone des Körpers wenigstens unendlich nahe liegt? Diese Annahme in aller Schärfe würde der allgemeinen Erfahrung widersprechen, dass überall in der Natur einem unendlich kleinen Unterschied der Ursachen auch nur ein unendlich kleiner Unterschied der Wirkungen entspricht. So ist es denn auch hier in Wirklichkeit. Wenn der Partialton des erregenden Klanges nur sehr wenig vom Eigenton des mitschwingungsfähigen Körpers verschieden ist, so findet auch noch Erregung statt. Soll derselbe gänzlich schweigen, so muss der betreffende Partialton um ein gewisses e n d l i c h e s Intervall von seinem Eigenton differiren. Dies Intervall ist aber äusserst klein, wenn der fragliche Körper schwer in Bewegung zu setzen ist und, einmal in Bewegung gesetzt, lange nachtönt. Bei Stimmgabeln genügt z. B. schon eine vom feinsten Ohre kaum auffassbare Differenz. Hat man zwei solche von genau gleicher Stimmung, die sich gegenseitig in Mittönen versetzen können, so hört die Möglichkeit schon auf, wenn man die eine durch ein kleines angeklebtes Wachsklümpchen verstimmt um einen Betrag, dass sie kaum eine Schwingung in der Secunde weniger macht.

Bei anderen elastischen Körpern, die leichter in Bewegung zu setzen sind, ist das Intervall, um welches ein Partialton des erregenden Klanges vom Eigenton des Körpers differiren darf, grösser. So z. B. ist eine gespannte Membran sehr leicht zum merklichen Mittönen zu bringen auch durch Klänge, die einen Partialton enthalten, welcher dem Tone

der Membran nur einigermaassen nahe kommt. Körper, die leicht Bewegung von der Luft aufnehmen, geben die Bewegung auch leicht wieder an die Luft ab, und es sind daher solche, die, durch einen einmaligen Anstoss in Bewegung gesetzt, schnell wieder zur Ruhe kommen.

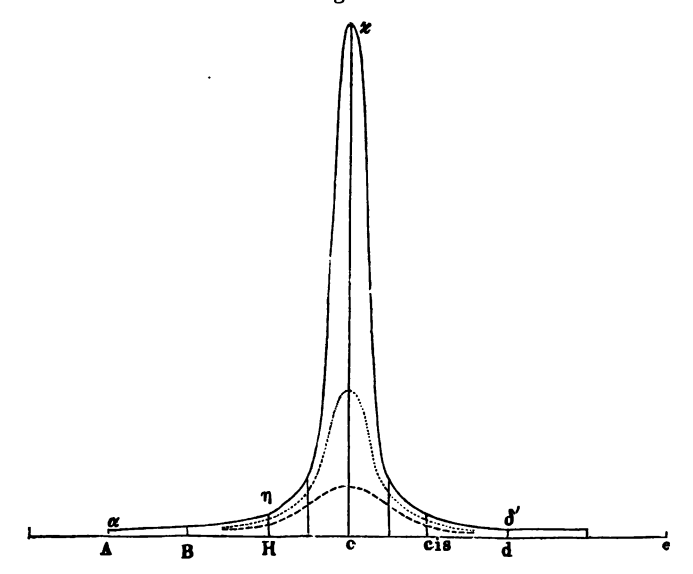
Ein des Tönens fähiger Körper kann aber, durch einmaligen Anstoss erregt, rasch verklingen auch aus einem andern Grunde, als weil er seine lebendige Kraft leicht an die umgebende Luft in Form von Schallschwingungen abgiebt. Der Grund des raschen Verklingens kann nämlich in der reichlichen Abgabe der lebendigen Kraft in anderer Form und an andere Körper als gerade die Luft bestehen. Denken wir uns beispielsweise eine Stimmgabel, die frei für sich sehr lange nachtönt, und stellen wir uns ferner mit einer Zinke derselben ein ziemlich masseloses Metallblättchen verbunden vor, das ihre Schwingungen nicht beträchtlich verzögerte, und nehmen wir endlich an dies sei in Oel oder eine noch klebrigere Flüssigkeit eingetaucht, so wird offenbar der Reibungswiderstand beim Hin- und Hergehen des Blättchens bald die lebendige Kraft der schwingenden Gabel aufzehren, und diese wird nicht mehr so lange nachtönen wie bei voller Freiheit. Die verlorene lebendige Kraft kommt hier nicht als Schall in der Luft zum Vorschein, sondern wohl als Wärme in dem Oel. Dem entsprechend ist die so gehemmte Gabel auch keineswegs geeigneter, lebendige Kraft von der Luft überhaupt aufzunehmen, aber der Unterschied ihrer Mitschwingungen mit ihrem Eigenton und mit benachbarten Tönen ist nicht mehr so enorm. Dieser mathematisch erweisbare Satz ist für die Physiologie des Hörens in mehrfacher Beziehung von der fundamentalsten Wichtigkeit. Wir wollen ihn daher durch einige anschauliche Betrachtungen noch näher erläutern.

Der mittönende Körper sei beispielsweise eine gespannte Membran. Eine solche nimmt bei ihrer grossen Oberfläche und kleinen Masse, wie schon oben bemerkt, leicht Schwingungen auf. Absolut in Ruhe wird eine Membran bei gar keinem Klange bleiben, wie denn überhaupt jede Masse von jeder bewegenden Kraft bewegt wird. Unser obiger Satz über das Mittönen ist insofern dahin zu verstehen, dass nur unter den bestimmten Bedingungen ein elastischer Körper in merkliche (hörbare) Schwingungen geräth. Irgend welche unmerkbare Bewegung kann theoretisch nie fehlen. Bei einer Membran ist aber diese Bewegung in der Regel sogar merkbar, der sie treffende Klang mag eine ganz beliebige Höhe haben. Wenn man auch gerade die Membran nicht laut mittönen hört, so kann man doch durch feinere Hülfsmittel bei jedem Klange ein gewisses Zittern daran bemerken. Wird nun ein Klang erregt, der einen dem Eigenton der Membran sehr nahe kommenden Partialton enthält, so geräth dieselbe in sehr beträchtliche Mitschwingungen, und wenn der Partialton dem Eigenton der Membran genau gleich ist, so ist das Mittönen der Membran ganz ausserordentlich stark.

Die Intensität der Mitschwingungen unserer Membran mit verschiedenen Tönen wird sich daher graphisch darstellen durch eine Curve etwa von der Fig. 63 gezeichneten Form. Auf der Abscissenaxe OX sollen die Höhen des erregenden Tones gemessen sein. Der Einfachheit wegen wollen wir nämlich annehmen, die Ursache der Erregung sei ein einfacher Ton, nicht ein zusammengesetzter Klang. Diesen Ton lassen wir bei unveränderter Stärke (welche $= 1$ gesetzt werden mag) die ganze auf der Abscissenaxe dargestellte Höhenscala durchlaufen. Die Ordinaten der Curve sind die Intensitätswerthe des Mitschwingens, in das unsere Membran geräth, wenn der erregende Ton bei der Intensität 1



Fig. 63.



die durch die Abscisse dargestellte Höhe hat. An die Abscissenaxe sind, um es anschaulicher zu machen, gleich die musikalischen Bezeichnungen bestimmter Punkte der Tonhöhenscala angeschrieben; es liegt der Figur die bestimmte Annahme zu Grunde, dass der Eigenton der Membran c ist. In der That muss alsdann diesem Punkte der Abscissenaxe der grösste Ordinatenwerth $c\varkappa$ entsprechen. Wird mit derselben Stärke der Ton H angegeben, der einen halben Ton abweicht vom Eigentone der Membran, so geräth dieselbe in viel schwächere Mitschwingungen, deren Intensität durch die Länge $H\eta$ dargestellt sein mag. Noch viel schwächer ist das Mitschwingen beim Angeben des Tones A in derselben Stärke, wie durch die Länge $A\alpha$ angedeutet ist. Ebenso schwingt die Membran auf den Ton d, wenn er in der Stärke 1 erklingt, nur mit in der Stärke $d\delta^1$. Mit zunehmendem Intervalle zwischen dem erregenden Tone und dem Eigenton der Membran nimmt die Stärke der Mitschwingungen an-

fangs sehr rasch, weiterhin immer langsamer ab, wie die Figur sehen lässt.

Stellen wir uns jetzt vor, die Membran, deren Mitschwingungen auf Töne von gleicher Stärke, aber verschiedener Höhe durch die ausgezogene Curve, Fig. 63, dargestellt sind, werde durch irgend einen Widerstand in ihren Schwingungen überhaupt behindert. Dies könnte auf verschiedene Weise geschehen, z. B. es sei (ähnlich wie beim Paukenfelle des menschlichen Ohres) ein unbiegsamer Stab an der Membran befestigt, der ihre Schwingungen mitmachen muss. Dieser sei wieder mit anderen festen Körpern in Verbindung, deren Bewegungen durch Reibungswiderstände gehemmt sind. Wir wollen ferner annehmen, durch diese Verbindungen werde die Höhe des Eigentones der Membran nicht verändert, was freilich in Wirklichkeit immer der Fall sein wird, denn weil jetzt mehr Masse durch dieselben elastischen Kräfte in Bewegung zu setzen ist, werden die Schwingungen, auch wenn keine Widerstände wirksam wären, von längerer Dauer sein; doch ist es ohne Zweifel erlaubt, für den gegenwärtigen Zweck davon abzusehen, weil die Widerstände die Schwingungsdauer nicht ändern. Die Membran soll also immer noch den Ton *c* angeben, aber sie wird jetzt, einmal angeschlagen, rascher verklingen als vorher, wo sie ganz frei schwang.

Man sieht sofort, dass die gehemmte Membran unter allen Umständen in weniger ausgiebige Mitschwingungen gerathen wird, als die freie. Werden also der Reihe nach wie oben die Töne *A*, *B*, *H*, *c*, *cis*, *d* etc. in der Nähe der Membran stets mit der Intensität 1 erregt, so schwingt bei jedem Tone die Membran weniger stark mit als bei demselben Tone vorher. Wollten wir also wieder eine Curve verzeichnen, welche die Intensität der Mitschwingungen in ihrer Abhängigkeit von der Höhe des erregenden Tones darstellt, so wären deren Ordinaten sämmtlich kleiner, als die Ordinaten der obigen ausgezogenen Curve $\alpha \eta \varkappa \delta'$ etc. Aber die Verkleinerung der Ordinaten durch Widerstände geschieht nicht in gleichem Maasse. Die Ordinaten, deren Werthe vorher sehr gross waren, werden in viel höherem Maasse verkleinert, als die kleineren. Die Verkleinerung betrifft mit anderen Worten vorzugsweise die Ordinaten, welche den dem Eigenton der Membran benachbarten Tönen angehören. Die Ordinaten der punktirten Curve, Fig. 63, könnten also ungefähr die Intensität der Mitschwingung der gehemmten Membran darstellen, wenn die Abscissenpunkte die Höhen der immer in der Intensität 1 angegebenen erregenden Töne sind.

Wären die Widerstände gegen die Bewegungen der Membran noch grösser, so bekäme man eine Curve etwa wie die gestrichelte in Fig. 64. Es ist ersichtlich, dass das Verhältniss zwischen der dem Eigenton der Membran entsprechenden Maximalordinate zu einer einem bestimmten andern Ton entsprechenden in diesen drei Curven drei verschiedene Werthe hat. Umgekehrt entspricht in jeder der drei Curven ein anderer Ton derjenigen Ordinate, deren Werth ein gegebenes Verhältniss (z. B. 1 : 10)

zur Maximalordinate hat. So z. B. ist für die ausgezogene Curve die zu *H* (und zu *Cis*) gehörige Ordinate schon kleiner als $^1/_{10}$ von der Maximalordinate. Dies heisst in Worten, die gedachte freie Membran tönt noch lange nicht den zehnten Theil so stark mit, wenn ein von ihrem Eigenton um einen halben Ton abstehender Ton erklingt, als wenn genau ihr Eigenton in derselben Stärke angegeben wird. Die im ersten Grade gehemmte Membran schwingt mit einem von ihrem Eigenton um etwas über einen halben entfernten Tone noch gerade $^1/_{10}$ so stark, wie mit ihrem eben so stark angegebenen Eigenton, in der punktirten Curve ist nämlich die etwas links von *H* und etwas rechts von *cis* stehende Ordinate $= {}^1/_{10}$ von der zu *c* gehörigen. Nur schwingt die gehemmte Membran weder mit dem einen noch mit dem andern Tone so stark als

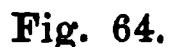
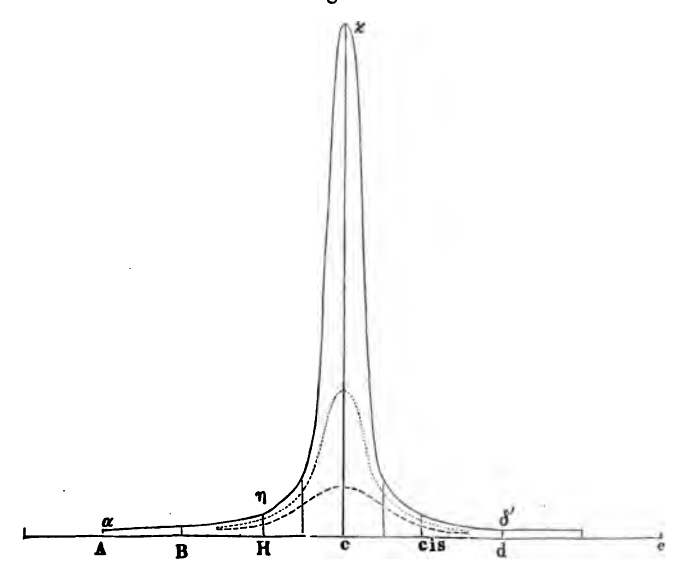


Fig. 64.



die ungehemmte Membran, wenn sie von den Tönen in gleicher Stärke getroffen wird. Die im zweiten Grade gehemmte Curve schwingt mit einem von ihrem Eigenton um mehr als eine Terz abstehenden Tone $^1/_{10}$ so stark wie mit ihrem eigenen.

Der Hemmungs- oder, wie man auch zu sagen pflegt, Dämpfungsgrad einer Membran oder überhaupt eines schwingungsfähigen Körpers wird um so grösser zu nennen sein, je früher nach einem einmaligen Anstoss die Schwingungsweite auf einen bestimmten Bruchtheil ihres ursprünglichen Werthes heruntersinkt. Man kann daher den Dämpfungsgrad eines tönenden Körpers durch eine Zahl bezeichnen, wenn man angiebt, die wievielte Schwingung des sich selbst überlassenen Körpers noch $^1/_{10}$ von der Amplitude der ersten besitzt. Die Zahl, welche dies angiebt,

wäre dem Dämpfungsgrade umgekehrt proportional, d. h. je mehr der Körper gedämpft ist, desto kleiner ist die Zahl, desto weniger Schwingungen führt der Körper mit einer Intensität aus, welche den zehnten Theil der Intensität der Schwingung, von welcher an gezählt wird, übertrifft.

Hat man den Dämpfungsgrad in dem soeben definirten Maasse ausgedrückt, so lässt sich der Charakter der Curve vollständig mathematisch bestimmen, deren Ordinaten die Bedeutung wie in Fig. 64 haben, d. h. man kann angeben, in welchem Verhältniss die Intensität der Mitschwingungen des Körpers mit irgend einem erregenden Tone zur Intensität seiner Mitschwingungen mit seinem Eigenton steht, wenn beide Töne in gleicher Stärke erklingen.

Man kann also insbesondere z. B. das Intervall angeben, um welches ein Ton vom Eigenton des Körpers abstehen muss, wenn die Mitschwingungen auf jenen Ton zehnmal schwächer sein sollen als die Mitschwingungen mit dem in gleicher Stärke erklingenden Eigenton. Helmholtz hat den Werth dieses Intervalles für eine Reihe von angenommenen Werthen des Dämpfungsgrades numerisch berechnet. Die zusammengehörigen Werthe sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Differenz der Tonhöhe, durch welche die Intensität des Mitschwingens auf $^1/_{10}$ reducirt wird	Zahl der Schwingungen, nach welcher die Intensität des ausklingenden Tones auf $^1/_{10}$ reducirt wird
1. Ein achtel Ton	38,00
2. Ein viertel Ton	19,00
3. Ein halber Ton	9,50
4. Drei viertel Ton	6,33
5. Ein ganzer Ton	4,75
6. Fünf viertel Ton	3,80
7. Kleine Terz ($^3/_2$ Ton) . . .	3,17
8. Sieben viertel Ton	2,71
9. Grosse Terz (2 Töne) . . .	2,37

Für den dritten Dämpfungsgrad hat Helmholtz auch noch bestimmt, in welchem Verhältniss die Intensität des Mittönens zur maximalen Intensität des Mittönens steht für eine Reihe von anderen Intervallen zwischen dem erregenden Ton und dem Eigenton des Körpers. Die Bestimmungen sind in nachstehender Tabelle gegeben. Die maximale Intensität des Mittönens (mit dem Eigenton des Körpers) ist willkürlich gleich 100 gesetzt.

Differenz der Tonhöhe	Intensität des Mitschwingens
0,0	100
0,1	74
0,2	41
0,3	24
0,4	15
Halber Ton	10
0,6	7,2
0,7	5,4
0,8	4,2
0,9	3,3
Ganzer Ton	2,7

Man könnte nach dieser Tabelle die wirkliche Intensität des Mittönens des gedachten Körpers mit allen möglichen im Intervalle einer grossen Terz eingeschlossenen Tönen, die mit der Stärke 1 den Körper treffen, in absolutem Maasse bestimmen, wenn man für einen dieser Töne die Intensität des Mittönens in absolutem Maasse gegeben hätte. Dieser Tabelle entsprechend ist übrigens die punktirte Curve, Fig. 64, annähernd verzeichnet, indem die Intensität des Mittönens mit dem Eigenton der Membran willkürlich durch die Länge der Ordinate über *c* dargestellt ist. Die ausgezogene Curve entspricht ebenso dem zweiten Dämpfungsgrade der obigen ersten Tabelle, und die gestrichelte Curve entspricht einem Dämpfungsgrade, der noch höher ist als der letzte der vorstehenden Tabelle.

Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass die durch obige Tabellen dargestellten Beziehungen ganz unabhängig sind von der sonstigen Natur der tönenden Körper, dass sie eben lediglich vom Dämpfungsgrade, d. h. von der relativen Stärke der Widerstände im Verhältniss zu den ins Spiel kommenden bewegenden Kräften abhängen, von der sonstigen Beschaffenheit des tönenden Körpers hängt dagegen der absolute Werth der Intensität des Mittönens bei gegebener Intensität des erregenden Tones ab. Es wird gut sein, dies noch durch einige Beispiele anschaulich zu machen. Wir hielten uns in den bisherigen Erörterungen an das specielle Beispiel einer gespannten Membran und nahmen an, wenn dieselbe so beschaffen ist, dass sie beim Ausklingen noch 19 Schwingungen mit mehr als $^1/_{10}$ der ursprünglichen Stärke ausführt, so stellt die ausgezogene Curve in Fig. 64 die Stärke ihres Mittönens mit verschiedenen, in gleicher Intensität angegebenen Tönen dar. Vergleichen wir jetzt mit der Membran eine auf denselben Ton gestimmte Stimm-

gabel, eine solche klingt bekanntlich, wenn sie ganz frei schwingt, sehr langsam aus und würde wohl einige hundert Schwingungen mit mehr als $^1/_{10}$ der ursprünglichen Stärke ausführen. Durch geeignete Verbindung mit anderen Körpern in der oben angedeuteten Weise würde sich aber die Gabel auf denselben Dämpfungsgrad wie unsere Membran bringen lassen, d. h. dass beim Ausklingen schon die 19. Schwingung nur noch $^1/_{10}$ der ursprünglichen Stärke besässe. Hätten wir dies bewerkstelligt, so würde aber auch das Verhalten der Gabel beim Mittönen insofern dem Verhalten der Membran gleich geworden sein, als nun die Gabel bei dem zwischen H und c in der Mitte liegenden Tone gerade $^1/_{10}$ so stark mittönte, wie beim Ton c. Dagegen könnten wir nun keineswegs die Stärke ihres Mittönens mit dem Tone c auch wieder durch die Ordinate $c\varkappa$ darstellen, wenn dieselbe Maasseinheit beibehalten wird. Vielmehr würde die Gabel, weil sie überall schwerer in Bewegung zu setzen ist, auch mit ihrem Eigenton viel schwächer mittönen als die Membran. Um also für die Gabel eine der Curve $\alpha\eta\varkappa\delta'$ etc. entsprechende Curve zu verzeichnen, müsste man die sämmtlichen Ordinaten jener Curve bedeutend verkleinern, aber alle in demselben Maasse, denn die entsprechenden Ordinaten müssen in der neuen für die gedämpfte Gabel gültigen Curve im selben Verhältnisse stehen, da diese Verhältnisse eben lediglich vom Dämpfungsgrade abhängen.

Die Physiologie des Hörens macht in zwei Punkten wichtige Anwendungen von den vorgetragenen Grundsätzen, einmal nämlich bezüglich der Mitschwingungen des Paukenfelles mit äusseren Luftschwingungen und dann bezüglich der Mitschwingungen der Corti'schen Bögen mit Schwingungen des Labyrinthwassers.

Drittes Capitel.

Einige besondere Fälle der Resonanz.

Die Fähigkeit des menschlichen Gehörwerkzeuges alle Töne ihrer objectiven Stärke annähernd proportional zu empfinden und die Klänge ihrer objectiven Zusammensetzung fast genau entsprechend zu zerlegen, beweist, dass das Paukenfell jeden beliebigen Schwingungszustand der Luft anzunehmen und getreu auf die inneren Theile des Ohres zu übertragen vermag. Es ist daher für die Physiologie des Gehörs von Interesse, die physikalischen Eigenschaften von Membranen kennen zu lernen, welche unter ähnlichen Bedingungen schwingen, wie das Paukenfell des Ohres.

Man hat meistens die soeben erwähnte Eigenschaft des Paukenfelles mit der im vorigen Capitel dargestellten allgemeinen Theorie der Resonanz in Uebereinstimmung bringen zu können geglaubt, dass man annahm, die schwingende Masse sei im Verhältniss zu den Widerstand leistenden Kräften so klein, oder, um den im vorigen Capitel erklärten Ausdruck zu brauchen, die Schwingungen des Paukenfellapparates seien so stark gedämpft, dass dadurch die Unterschiede der Resonanz mit den seinen Eigenton als Componente enthaltenden und mit beliebigen anderen Klängen verwischt werden. Das heisst aber mit anderen Worten annehmen, dass es beim Mitschwingen jenes Apparates zu einer Summirung mehrerer Anstösse desselben erregenden Klanges unter dem Einflusse der Trägheit gar nicht in nennenswerthem Grade kommt. Die Bewegung des Paukenapparates müsste also bei einem Tone nicht wesentlich energischer sein, als wenn nur eine Welle des Tones an das Paukenfell anschlägt.

Diese Annahme hat offenbar grosse Schwierigkeit, wenn man bedenkt, wie ausserordentlich schwach die Anstösse sind, welche ein noch gut hörbarer Ton auf das Paukenfell ausübt, und dass einer derselben doch schon die zum Hören genügende Wirkung hervorbringen soll. Ueberdies ist die Masse des ganzen schwingenden Paukenapparates doch wohl auch nicht so ganz verschwindend anzuschlagen gegen die Reibungswiderstände, so dass die Summirung mehrerer Anstösse die im Tempo möglicher Eigenschwingungen erfolgen, eigentlich nicht unwahrscheinlich ist.

Wollte man nun demgemäss die thatsächlich stattfindende Gleichmässigkeit des Mitschwingens mit allen Tonhöhen beim Paukenfelle nicht auf extrem hohen Dämpfungsgrad gründen, so bliebe nur übrig in dieser Membran einen Körper zu sehen, welcher alle möglichen Schwingungszustände annehmen und in denselben eine Zeit lang vermöge der Trägheit selbständig verharren könnte. Dass es solche Körper giebt, die gleichwohl nicht wie die Besaitung eines Claviers aus express verschieden abgestimmten Theilen zusammengesetzt sind, kann ich durch eine Thatsache beweisen, die ich schon vor längerer Zeit beobachtet, aber noch nicht veröffentlicht habe. Die Beobachtung wurde zum ersten Male rein zufällig gemacht. In einem Zimmer des Laboratoriums hatte ich einige Worte laut gerufen und hörte hierauf einen Nachhall, welcher den zuletzt ausgesprochenen Vocal in seiner eigenthümlichen Klangfarbe ganz deutlich wiedergab. Es zeigte sich bei absichtlicher Wiederholung, dass der Nachhall herrührte von einem als Ofenschirm gebrauchten Eisenblechstücke von etwa 2 m Höhe und 1 m Breite mit zwei umgeknickten Streifen an den Seiten von etwa 0,1 m Breite, welche besondere Füsse ersetzten.

Bei eingehender Prüfung zeigte sich, dass diese Metallplatte jeden beliebigen darauf wirkenden Klang im Nachhall beinahe ebenso treu wiedergiebt, wie die Besaitung eines Claviers bei aufgehobenen Dämpfern.

Diese Thatsache wird man sich durch die Annahme zu erklären haben, dass die Eisenplatte auf unendlich vielerlei verschiedene Arten durch Knotenlinien in Abtheilungen getheilt zu schwingen vermag. Diese Annahme hat bei einer grossen Eisenplatte gar nichts Anstössiges. Ob sie aber auch für ganz kleine membranöse Gebilde zulässig ist, das könnte fraglich erscheinen. Dass sie aber auch hier in vielen Fällen gar nicht zu umgehen ist, scheint mir durch die Leistungen zweier erst in neuester Zeit erfundenen und allgemein bekannten Apparate erwiesen, des Telephons und des Phonographen.

Schon beim Telephon ist aus demselben Grunde, der für das Paukenfell oben geltend gemacht wurde, kaum daran zu denken, dass ein aperiodisches Mitgehen mit beliebigen Luftdruckschwankungen vor der aufnehmenden Platte, diese in hinlänglich grosse Bewegungen versetzen sollte. Man muss nothwendig daran denken, dass die Platte die verschiedenen Schwingungszustände in solcher Art annehmen kann, dass sie eine, wenn auch nur kurze Zeit vermöge ihrer Trägheit darin verbleibt, so dass es zu einer Summirung einiger auf einander folgenden Anstösse kommen kann.

Noch viel schlagender scheint diese Betrachtung beim Phonographen, wo überdies von einer wirksamen Dämpfung der frei gespannten und nur in der Mitte auf den Druckstift aufgestützten Membran kaum die Rede sein kann. Die Wirkungen sind hier aber so gewaltige, nämlich die mit blossem Auge sichtbaren Eindrücke in die zähe Stanniolplatte, dass die Annahme einer wirksamen Summirung mehrerer Tonwellen wohl kaum zu umgehen ist und da verschiedene Tonhöhen gleich gut wiedergegeben werden, so muss die Phonographenmembran in verschiedene Schwingungszustände gerathen und dieselben durch Trägheit einige Zeit beibehalten können.

Mit einer Phonographenmembran hat aber das Paukenfell grosse Aehnlichkeit, da es wie jene in der Mitte aufgestützt ist auf die Hammerstielspitze, die wie der Druckstift des Phonographen nur wenig beweglich ist.

Wollte man die in Rede stehende Annahme für das Paukenfell gelten lassen, so wäre man allerdings gezwungen den Grundton desselben ziemlich tief zu setzen, weil es ja eben auch tiefe Töne wirksam überträgt. Viele Autoren haben hierüber die entgegengesetzte Meinung geäussert. Wenn man aber die Verhältnisse genauer ins Auge fasst, so muss man Hensen Recht geben, der einen tiefen Grundton des Paukenapparates von vornherein für wahrscheinlich erklärt. Er sagt[1]: „Unser Trommelfell hat eine im Verhältniss zur Dicke nicht kleine Fläche, es ist zwar unnachgiebig, aber dafür ist seine Spannung eine sehr geringe, so dass kein hoher Eigenton zu erwarten ist.“ Ferner ist noch daran zu erinnern, dass das Paukenfell mit träger Masse — den Gehör-

---

[1]) Handb. d. Physiologie, herausgeg. v. Hermann. Th. II, S. 42.

knöchelchen — stark belastet ist, was seinen Eigenton noch erheblich vertiefen muss. Hensen theilt ferner mit, dass ein Stück Goldschlägerhaut konisch vorgewölbt einen um zwei Octaven tieferen Eigenton zeigt als unter sonst möglichst gleichen Bedingungen eben ausgebreitet. Er meint hiernach, dass die konische Einziehung des Paukenfelles noch zur Vertiefung seiner Stimmung beitragen könne.

Vielleicht ist der Grundton des eigenen Paukenfelles der dumpfe schwache Puff, den man hört, wenn man Luft in das Ohr fächelt. Hensen, der diese mir sehr einleuchtende Vermuthung ausspricht, sagt, die Höhe des fraglichen Tones sei nicht genau zu bestimmen, sie könne aber gewiss 700 Schwingungen in der Secunde nicht übersteigen. Mir kommt der Ton ganz unzweifelhaft sehr viel tiefer vor. Ich glaube ihn nach meinem freilich nicht geübten Gehör ganz in die Nähe von *c* (128 Schwingungen in 1″) setzen zu müssen. Ein junger Mann, der sich viel mit Musik beschäftigt, bestimmte ihn an sich als *B* (etwa 114 Schwingungen). Wenn man den Grundton so tief setzt, so kann man sich vorstellen, dass es auf höhere Töne in Abtheilungen getheilt resonirt, und dass es dann auch aus beliebig vielen Componenten zusammengesetzte Schwingungszustände annehmen kann. Natürlich muss man sich auch unter dieser Annahme den Dämpfungsgrad des Paukenapparates als ziemlich hoch vorstellen, da sonst jedem gehörten Klange ein störender Nachhall folgen müsste.

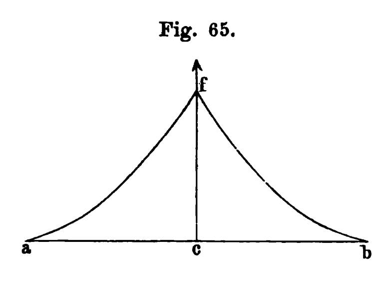
Die trichterförmige Gestalt des Paukenfelles hat noch eine andere sehr bemerkenswerthe Eigenschaft zur Folge, deren mechanische Theorie Helmholtz entwickelt hat, von welcher nachstehend die Grundzüge gegeben werden sollen.

Bekanntlich sind die vom Rande nach der Mitte ziehenden Radien des Paukenfelles nicht gerade gestreckt, sondern nach dem Hohlraume des Trichters, also nach der Seite des äusseren Gehörganges hin convex gekrümmt. Eine in der Mitte, an der Spitze des Hammerstieles, angreifende nach der Paukenhöhlenseite hin gerichtete Zugkraft kann also nicht unmittelbar durch Spannung der Radialfasern im Gleichgewichte gehalten werden, sondern nur durch Spannung von kreisförmig den Mittelpunkt umziehenden Fasern, welche die Convexität der Radialfasern zu vermehren strebt. Diese letzteren hat man sich also zwar vollkommen biegsam aber unausdehnbar und ohne eigene Spannung vorzustellen.

Denken wir uns nun eine so beschaffene Membran ohne alle Unregelmässigkeiten, gewissermaassen ein ideales Paukenfell von vollständig drehrunder Gestalt, und fragen uns: wie müsste die Krümmung seiner Radialfasern (fa und fb Fig. 65 a. f. S.) beschaffen sein, damit Luftdruckschwankungen, welche darauf wirken, mit möglichst grosser Kraft auf Verschiebung des Mittelpunktes längs der Axe fc des Conoids wirken? Diese Frage ist sofort dahin zu beantworten: Die Radialfasern müssen durch die Wechselwirkung zwischen der Zugkraft fg und der Spannung der Ringfasern so gekrümmt sein, dass der Hohlraum des

Conoids fab bei unverändert gedachter Lage des Punktes f ein Minimum ist. In der That stellt man sich vor, es wirke auf der oberen Seite der Membran ein Drucküberschuss, so wird derselbe das Volum unter der Membran zu verkleinern streben. Wenn dies aber für die bestimmte Lage des Punktes f schon so klein als möglich ist, so wird jener Drucküberschuss das Volum nur noch durch Herabdrücken des Punktes f verkleinern können und dies also mit grösserer Kraft zu thun streben als bei jeder anderen Form der Membran, bei welcher durch Aenderung der Krümmung noch eine Verkleinerung des Volums afb zu erzielen wäre. Um andererseits einzusehen, dass ein Drucküberschuss auf der unteren Seite der Membran bei der gedachten Form derselben stärker als bei jeder anderen auf Verschiebung des Punktes f im Sinne des Pfeiles wirkt, brauchen wir gar nicht einmal auf das Minimum des eingeschlossenen Volums zu achten, sondern es genügt zu bedenken, dass es die Form des Gleichgewichts zwischen der Zugkraft bei f und den Spannungen der Ringfasern ist. Jede minime Spur von Drucküberschuss auf der unteren Seite wird also die Kraft bei f ins Uebergewicht bringen und Verschiebung dieses Punktes zur Folge haben.

Fig. 65.



Auf dem Wege infinitesimaler Rechnung, die hier nicht wieder gegeben werden kann, leitet nun Helmholtz die zweckmässigste Krümmung der Radialfasern einer trichterförmigen Membran ab, die mit der Form der freien unteren Theile des menschlichen Paukenfelles gut übereinstimmt. Fig. 65 ist eine Copie der von Helmholtz theoretisch gefundenen Form.

Ferner hat Helmholtz auf demselben Wege abgeleitet, welcher im Mittelpunkte f angebrachten Zugkraft ein Drucküberschuss p auf der oberen Seite der Membran bei der fraglichen Form Gleichgewicht hält, resp. welche Kraft ein Drucküberschuss auf der unteren Seite ersetzt. Er findet diese Kraft

$$k = p \pi R^2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta},$$

wenn unter R der Halbmesser des Anheftungskreises verstanden wird, unter α der Winkel, unter welchem die Radialfasern an der Spitze gegen die Axe convergiren, unter β der Winkel, welchen die Tagente am Anheftungspunkte der Radialfaser mit der Axe bildet. Da der Winkel β unter den hier gemachten Voraussetzungen nothwendig immer grösser ist als α, so ist $\cos \alpha - \cos \beta$ stets positiv. Es ist ferner $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta}$ stets > 1, die Resultirende des Luftdruckes an der Spitze also grösser als $p \pi R^2$, d. h. grösser als der Druck auf eine ebene Membran vom Halbmesser R. Die trichterförmige Einziehung einer Membran hat also dieselbe mechanische Folge, wie wenn die Luftdruckschwankungen auf einen langen Hebelarm wirkten, während die Hammerstielspitze das Ende des kurzen Armes desselben Hebels bildete. Die Luftdruckschwankungen werden also grosse Kräfte, welche der Bewegung der Hammerstielspitze widerstreben, über-

winden können, dafür müssen aber die Excursionen um so kleiner ausfallen da die von den Luftdruckschwankungen geleistete Arbeit durch den Mechanismus natürlich nicht vergrössert werden kann.

Man sieht der obigen Formel ferner leicht an, dass die hebelartige Verstärkung der statischen Wirkung des Luftdruckes im Mittelpunkte der Membran um so grösser ist, je kleiner die Differenz der beiden Winkel α und β ist, d. h. je gerader die Radialfasern gestreckt sind und andererseits bei gleicher Differenz $\cos\alpha - \cos\beta$ je kleiner der Winkel α ist, d. h. je spitzer das Conoid zuläuft.

Von diesen für die Theorie des Hörens fundamentalen Sätzen kann man sich auch ohne höheren Calcül in folgender Art überzeugen, wie Helmholtz ebenfalls gezeigt hat. Man betrachte eine der Radialfasern, deren sehr schwache Krümmung kreisförmig angenommen wird. Nennt man nun l die Länge der gebogenen Faser und λ ihre Sehne, so ist, wenn mit r der Halbmesser des Kreises bezeichnet wird, von welchem die Faser einen Bogen bildet,

$$\lambda = 2r \sin\left(\frac{l}{2r}\right).$$

Da aber der Bogen sehr flach sein soll, so ist l jedesfalls nur ein kleiner Bruchtheil von $2r$ und man kann die Sinusreihe beim 2. Gliede abbrechen oder setzen:

$$\lambda = 2r\left[\frac{l}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2r}\right)^3\right] = l - \frac{1}{24}\frac{l^3}{r^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Die Hervorwölbung des Bogens über die Sehne, oder der Abstand der Fasermitte von der Mitte der Sehne, der mit s bezeichnet sein mag, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{r-s}{r} = \cos\frac{l}{2r}$$

und wenn wir $\cos\frac{l}{2r}$ ebenfalls in eine Reihe entwickeln und uns auf die zwei ersten Glieder beschränken, so hat man

$$\frac{r-s}{r} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2}{4r^2}$$

und hieraus

$$s = \frac{1}{8}\frac{l^2}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Eliminirt man aus (1) und (2) r, so ergiebt sich

$$\lambda = l - \frac{8}{3}\frac{s^2}{l} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Man kann hieraus leicht entnehmen, um welche sehr kleine Grösse $d\lambda$ die Sehne λ sich ändert, wenn man die Hervorwölbung s um die sehr kleine Grösse ds ändert, es muss nämlich, da die Länge l der Radialfasern als unveränderlich angenommen wird, offenbar die geänderte Sehne

$$\lambda + d\lambda = l - \frac{8}{3}\frac{(s+ds)^2}{l}$$

sein oder

$$\lambda + d\lambda = l - \frac{8}{3}\frac{s^2}{l} - \frac{8}{3}\frac{2.s}{l}ds - \frac{8}{3}\frac{ds^2}{l},$$

da aber ds schon als sehr klein gegen s und noch mehr gegen l gedacht ist, verschwindet $\frac{8}{3}\cdot\frac{ds^2}{l}$ ganz aus der Rechnung und man hat

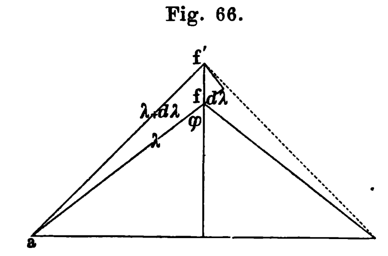
$$\lambda + d\lambda = l - \frac{8}{3}\frac{s^2}{l} - \frac{8}{3}\frac{2 \cdot s}{l} \cdot ds$$

oder wenn man von dieser Gleichung die Gleichung (3) abzieht,

$$d\lambda = -\frac{16}{3} \cdot \frac{s}{l}\, ds,$$

d. h. wenn die Hervorwölbung s um ds zunimmt, so nimmt die Länge der Sehne ab um $\frac{16}{3}\,\frac{s}{l} \cdot ds$ und umgekehrt nimmt die Länge der Sehne um ebenso viel zu, wenn die Hervorwölbung in der mittleren Zone der Membran um ds abnimmt. Es ist weiter leicht zu berechnen, um wieviel der Punkt f (siehe Fig. 66) sich heben muss, wenn die Sehnenlänge um einen gewissen sehr kleinen Betrag zunimmt. Man beschreibe nämlich mit der gewachsenen Sehnenlänge $\lambda + d\lambda$ einen Kreisbogen um a, der die Axe in f' schneiden mag, dann ist ff' offenbar die der Zunahme der Sehne entsprechende Erhebung des Punktes f. Wegen der Kleinheit des Zuwachses $d\lambda$ gegen λ kann aber der sehr kleine Kreisbogen als eine auf der ursprünglichen Lage der Sehne senkrechte Gerade betrachtet werden und ff' ist also die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $d\lambda$ ist. Bezeichnet man also mit φ den Winkel, welcher die ursprüngliche Lage der Sehne mit der Axe bildet, so hat man die Erhebung des Mittelpunktes

Fig. 66.



$$ff' = \frac{d\lambda}{\cos\varphi} = -\frac{16}{3}\,\frac{s}{l} \cdot \frac{ds}{\cos\varphi}.$$

Da wir die Wölbung sehr flach annehmen, so wird $\frac{s}{l}$ immer ein kleiner Bruch sein, und die Verschiebung (ff'), welche eine Aenderung des Druckes auf einer Seite der Membran im Mittelpunkte hervorruft, wird also gegen die von dieser Druckschwankung hervorgebrachte Aenderung der Wölbung (ds) im Allgemeinen klein sein. Da aber die Arbeit einer am Punkte f angebrachten Gegenkraft der Arbeit des Luftdruckes gleich sein muss, welche sich bemisst nach diesem Drucke und der Volumänderung des von der Membran überspannten Raumes, so kann jene Gegenkraft bei der Kleinheit der Wegstrecke (ff'), welche ihr Angriffspunkt zurücklegt, verhältnissmässig sehr gross sein. Nur wenn sich der Winkel φ einem Rechten, also $\cos\varphi$ der Null nähert, kann ff' grösser als ds werden.

Es mag noch einmal ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Verhältnisse bei einer eben ausgespannten Membran wesentlich andere sein würden, hier würde der Luftdrucküberschuss auf der einen Seite den Mittelpunkt am allermeisten verschieben und folglich hier die kleinste Kraft ausüben.

Von der Kraft, mit welcher ein Ueberdruck auf der oberen Seite der Membran an der Spitze des Kegels zieht, kann man sich auf folgende Art eine Anschauung bilden. Man denke sich aus der Membran in radialer Richtung von der Spitze zum Rande ein sehr schmales durch parallele Linien begrenztes Streifchen herausgeschnitten. Es sei p der Ueberdruck, welcher auf der Längeneinheit dieses Streifchens lastet. Nennt man nun r den Radius des Kreises, von welchem das Streifchen einen Bogen bildet, so ist die Spannung t des

Streifchens mit der es an einem Ende zieht, gegeben durch die Gleichung

$$t = p r.$$

Denkt man sich nämlich das Streifchen mit überall gleicher Krümmung bis zum Halbkreis verlängert, so fallen die an den beiden Enden angreifenden Zugkräfte, welche der Spannung Gleichgewicht halten, in dieselbe Richtung. Man kann dann also das Gleichgewicht unmittelbar bestehend denken zwischen der Summe der beiden Gegenkräfte $2t$ und dem Drucke, welcher auf einem gleich breiten Streifen von der Länge des ganzen Durchmessers lasten würde, also es muss sein $2t = 2pr$, oder wie oben behauptet wurde, $t = pr$. Man sieht also wieder, dass der Zug an der Spitze für einen bestimmten Druck p bei gleicher Radialfaserlänge um so grösser ist, je flacher die Krümmung, d. h. je grösser r ist. Von dieser Spannung kommt eine um so grössere Componente in der Axenrichtung zur Wirkung, je kleiner der Convergenzwinkel der Fasern an der eingezogenen Spitze ist.

Viertes Capitel.

Von den Geräuschen in den Respirations- und Blutbahnen.

Es ist bekannt, dass die Physik bis jetzt über das Wesen der Geräusche noch wenig Aufschluss giebt, man wird daher von ihr auch nicht viel Detail über deren Entstehungsarten erwarten können. Nur wenige ganz allgemeine Sätze stehen fest, die dann auch als leitende Gesichtspunkte bei der Erforschung und praktischen Benutzung der in der Ueberschrift erwähnten Geräusche dienen können. Wir müssen uns hier um so mehr beschränken auf die kurze Darlegung dieser wenigen physikalischen Thatsachen, da ein Eingehen in Einzelheiten jedesfalls nicht soweit möglich ist, dass dadurch dem Mediciner das Studium specieller Werke über physikalische Diagnostik erspart werden könnte.

Durch die alltägliche Erfahrung sowohl als durch eigens angestellte Versuche ist bekannt, dass alle Körper, ihr Aggregatzustand mag sein welcher er will, im Stande sind, durch geeignete Anstösse in Bewegungen zu gerathen, welche der Luft mitgetheilt und zum Ohre fortgepflanzt als Geräusche empfunden werden. Jedoch geben gasförmige Körper am leichtesten Geräusche zu hören, feste Körper schon schwerer, tropfbar flüssige am schwersten und nur unter ganz besonderen Umständen, die im thierischen Körper sicherlich nie gegeben sind. Insbesondere haben zunächst die sogenannten „Herztöne", welche bekanntlich jede Systole und jede Diastole des Herzventrikels begleiten, nach den anerkanntesten Autoritäten [1]) ihre Ursache in der plötzlichen Anspannung der Atrio-

[1]) Skoda, Ueber Auscultation und Percussion, 4 Aufl. S. 173.

ventricularklappen und der Semilunarklappen. Es ist auch durch Versuche an künstlichen Vorrichtungen erwiesen, dass die plötzliche Anspannung einer elastischen Membran, selbst wenn sie rings von tropfbarer Flüssigkeit umgeben ist, ein Geräusch oder einen Ton hervorbringt.

Der sogenannte „erste Herzton" bei der Kammersystole hörbar, soll nach der neuesten Untersuchung[1]) über diesen Gegenstand, die in Ludwig's Laboratorium angestellt ist, auch dann gehört werden, wenn der Ventrikel blutleer ist. Danach wäre dieser Ton allerdings nicht durch die Anspannung der Atrioventricularklappen zu erklären, man müsste vielmehr annehmen, dass er in der Musculatur des Ventrikels selbst entstünde. Für einen Muskelton im gewöhnlichen Sinne des Wortes kann er aber unmöglich gelten, da dessen Schwingungen durch die getrennten Erregungsanstösse beim sogenannten Muskel tetanus entstehen, die Zusammenziehung des Herzens aber nachweislich gar kein Tetanus, sondern eine einzelne Zuckung ist. Man müsste sich etwa denken, dass die plötzliche Entstehung einer starken Spannung in der Muskelmasse der Herzkammer einige Schwingungen bedingte, welche als Ton wahrnehmbar werden.

Ueber die Geräusche in den übrigen Theilen der Blutbahn giebt einigen Aufschluss eine Untersuchung von Theodor Weber[2]) über die beim Strömen einer tropfbaren Flüssigkeit in elastischen Röhren vorkommenden Schallerscheinungen. Durch die Resultate derselben, die ich im Folgenden der Hauptsache nach mittheilen werde, ist unter Anderem auch das bestätigt worden, was bereits früher auf ähnlichem Wege von Kiewisch[3]) gefunden war.

1. Die Geräusche entstehen, wie bereits oben angedeutet wurde, durch Schwingungen der Röhrenwand, nicht durch Reibung der Flüssigkeitstheilchen unter einander; die Flüssigkeit spielt nur die Rolle der erschütternden Körper, wie etwa ein Geigenbogen.

2. Röhre und Flüssigkeit mag beschaffen sein wie sie wollen; wenn man die Stromgeschwindigkeit immer mehr steigert, so entsteht zuletzt ein Geräusch, natürlich an allen Stellen, wenn die Röhre überall gleichartig ist.

3. In ein und derselben Röhre bringen dünnflüssige Liquida leichter (bei geringerer Geschwindigkeit) Geräusche hervor als zähflüssige, schwere leichter als leichte. Die untersuchten Flüssigkeiten folgten sich in dieser Beziehung daher in der Ordnung, dass am leichtesten Quecksilber Geräusche erzeugte, dann Wasser, Milch, verdünntes Blut und am allerschwersten reines Blut.

4. Rauhigkeiten an der inneren Röhrenfläche begünstigen die Entstehung eines Geräusches, so dass man es bereits bei einer geringeren Geschwindigkeit hört, als wenn die Röhre glatt wäre.

---

[1]) Dogiel und Ludwig, ein neuer Versuch über den ersten Herzton. Berichte der sächsischen Gesellschaft, 1868.

[2]) Archiv für physiolog. Heilkunde, Jahrg. 14, Heft 1.

[3]) Verhandl. der Würzburger physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Bd. I.

5. In dünnwandigen Röhren entstehen leichter Geräusche als in dickwandigen.

6. Bei gleichem Verhältnisse von Lumen und Wandstärke entstehen Geräusche leichter in weiten Röhren als in engen (wegen der grösseren Berührungsfläche).

7. Es bedarf einer viel grösseren Geschwindigkeit, um in starren Röhren (aus Glas oder Messing) Geräusche hervorzubringen, als in biegsamen (aus Kautschuk, Venenwand, Darmwand).

8. Am allerleichtesten entstehen Geräusche an solchen Stellen, wo der Strom aus einem engeren Theile seines Bettes in einen weiteren übergeht, und zwar ganz besonders dann, wenn er nicht central in die erweiterte Stelle eintritt, oder wenn er nicht in der Axe derselben verläuft, sondern schräg gegen ihre Wand gerichtet ist. Vermehrung oder Verminderung der Spannung scheint keinen namhaften Einfluss auf die hier betrachteten Erscheinungen zu haben.

Die Anwendungen auf Arterien- und Venengeräusche ergeben sich unmittelbar. Die besondere Häufigkeit eines Geräusches in der Jugularvene bei Anämischen findet hier auch in jedem Falle ihre Erklärung; denn ist, wie die einen wollen, Dünnflüssigkeit des Blutes das Wesen der Anämie, so giebt uns die unter 3. angeführte Thatsache Aufschluss; besteht aber die Anämie in wirklicher Blutarmuth, so haben wir in Nr. 8. die Erklärung; denn es muss alsdann der Halstheil der Jugularvene zusammenfallen und in den weiteren Brusttheil derselben eintreten, der ja vermöge seiner Lage und Umgebung nicht in entsprechendem Maasse zusammenfallen kann.

Dass im Respirationsorgane, wo beständig Luftmassen mit anderen Körpern in Berührung sich bewegen, die günstigsten Bedingungen zur Entstehung von Geräuschen gesetzt sind, ergiebt sich schon aus dem an die Spitze gestellten Satze, nach welchem Luft am leichtesten in schallende Bewegung geräth. Man sieht aber ferner auch sofort, dass hier die mannigfaltigsten Geräusche entstehen können, wo in der gesunden und kranken Lunge die Berührungsweisen der flüssigen und festen Körper mit dem vorbeistreichenden Luftstrome so überaus mannigfaltig sein können, und wo ferner noch bei dem Vorhandensein unzähliger Scheidewände und grösserer oder kleinerer, mehr oder weniger abgeschlossener Räume die einmal entstandenen Geräusche durch Reflexion und Resonanz in der mannigfaltigsten Weise modificirt werden müssen. Wollten wir uns in Betreff dieser normalen und krankhaften Athmungsgeräusche auf Einzelheiten einlassen, so würden wir uns in eine unerschöpfliche Casuistik verlieren, die selbst ein ganzes Buch füllte und in der That viele Bücher füllt.

Es könnte an dieser Stelle vielleicht noch eine physikalische Discussion des Instrumentes, mittelst dessen man in der Regel die soeben abgehandelten Geräusche beobachtet, erwartet werden — ich meine des Stethoskopes. Die Physik kann, so weit ich sehe, darüber nichts Anderes

aussagen, als: im Allgemeinen wird jedesfalls die Schallintensität durch das Stethoskop geschwächt; die Modification der Form und Grösse innerhalb der üblichen Grenzen sind jedoch fast vollkommen gleichgültig. Hiermit stimmen die anerkannt ersten Autoritäten [1]) überein. Eine Modification, die von L. Fick [2]) vorgeschlagen wurde, kommt mir in der That, von physikalischer Seite angesehen, empfehlenswerth vor, nämlich die, statt eine Platte ans Ohr zu legen, das konisch zugespitzte Rohr in den Gehörgang zu stecken. Dadurch wird offenbar der vollständige Abschluss des den Schall fortpflanzenden Luftraumes sehr erleichtert.

Später ist von Rudolf König [3]), dem bekannten Verfertiger akustischer Apparate, ein neues Stethoskop construirt, das allerdings mehr als das blosse Ohr zu leisten scheint. Ich habe mich durch eigene Anschauung und Prüfung von der Vortrefflichkeit des Instrumentes überzeugt. Es besteht aus folgenden Theilen: Ueber einen Holzring von etwa 5 cm Durchmesser sind zwei Kautschuklamellen gespannt, so dass gleichsam eine flache Trommel entsteht. Die Luft im Innern derselben wird etwas verdichtet, so dass sich die beiden Kautschukblätter etwas gespannt vorwölben und die Trommel eine linsenartige Gestalt annimmt. Dies Stück ist fest eingesetzt in die offene Basis einer hohlen messingenen Halbkugel, so dass es dieselbe vollständig schliesst. Vom Pole der Halbkugel geht ein starker, beinahe armslanger Kautschukschlauch aus, der am andern Ende ein geeignetes Ansatzstück von Horn hat, das in den Gehörgang des Auscultirenden eingesetzt (nicht mit jener physikalisch unbegreiflichen Platte angelegt) wird. Die Luft des Gehörganges steht also durch den Kautschukschlauch in Communication mit der Luft im Innern der durch die vorhin beschriebene Linse geschlossenen Halbkugel. Die freie Fläche der Linse wird nun auf den zu auscultirenden Theil leicht angedrückt, während, wie gesagt, das Ansatzstück des Kautschukschlauches im Ohre des Auscultirenden steckt. Es geht schon aus dieser kurzen Beschreibung deutlich hervor, dass das neue Stethoskop vor dem bisher gebräuchlichen jedesfalls viel voraus hat in der Bequemlichkeit des Gebrauches, ganz abgesehen von den unvergleichlich überlegenen akustischen Leistungen. Vermöge der Biegsamkeit des langen Kautschukschlauches kann man die ganze Brust eines Kranken Punkt für Punkt durchauscultiren, ohne das Ohr von der Stelle zu bringen. Auch kann man ganz bequem seine eigenen Herztöne oder Respirationsgeräusche auscultiren, was gewiss die beste Uebung für den Anfänger bilden dürfte.

In Betreff der Percussionsgeräusche scheinen nach Skoda's Versuchen folgende Sätze festzustehen: 1. Wird eine Luftmasse durch An-

---

[1]) Skoda, l. c. S. 25 ff.
[2]) Müller's Archiv 1855.
[3]) Pogg. Annal. 1864, Heft VII.

stoss an ihre feste Umgebung in Schallschwingungen versetzt, so ist der Schall um so heller (resp. lauter), je dünner die Schicht fester Substanz ist, durch welche die unmittelbare Erschütterung fortgepflanzt werden muss. Ist gar kein abgeschlossener Luftraum unter der unmittelbar gestossenen Stelle, so ist der Schall ganz gedämpft, kaum hörbar, was auch nach dem oben aufgestellten Principe zu vermuthen war, wonach in festen Körpern nicht so leicht Schallschwingungen entstehen als in gasförmigen. 2. Je grösser die durch den Stoss an die Wand erschütterte Luftmasse ist, desto voller klingt der Schall. Ich sehe von physikalischer Seite nichts, was dieser von Skoda aufgestellten Unterscheidung eingewandt werden könnte, obwohl sie von vielen Aerzten gänzlich verlassen ist. 3. Der Schall einer in biegsame Wände eingeschlossenen Luftmasse klingt tympanitisch, wenn dieselben wenig, nicht tympanitisch, wenn sie stark gespannt sind. Die Höhe eines dem Percussionsschalle etwa beigemengten musikalischen Tones scheint nach Skoda überall nicht sehr beachtenswerth, und stellt er darüber keine besonderen Regeln auf. Ueber einzelne besondere Modificationen des Percussionsschalles können wir uns hier aus den bereits mehrfach angegebenen Gründen nicht verbreiten.

FÜNFTER ABSCHNITT.

WÄRMELEHRE.

Erstes Capitel.

Verbrennungswärme.

Die ergiebigste irdische Quelle von Wärme sind chemische Processe, bei denen die chemischen Anziehungskräfte im Ganzen mehr positive als negative Arbeit leisten. Zu den Processen dieser Art gehören vor Allen die sogenannten „Verbrennungen“. Man sagt von einer chemischen Verbindung, sie werde vollständig verbrannt, wenn ihre Bestandtheile, unter denen übrigens schon Sauerstoff sein kann, sich mit der noch erforderlichen Menge freien Sauerstoffes zu den höchsten Oxydationsstufen verbinden.

Die Wärme, welche bei einer Verbrennung frei werden muss, kann keineswegs als einfach äquivalent betrachtet werden der Arbeit, welche die Anziehungskräfte zwischen den einzelnen ins Spiel tretenden Sauerstoffatomen einerseits und den übrigen Atomen andererseits bei der Verknüpfung zu Oxydmolekülen leisten. Es müssen vielmehr bei jeder Verbrennung auch Anziehungskräfte überwunden werden, selbst dann, wenn es sich um eine Verbrennung von einem Elemente z. B. Wasserstoff in reinem Sauerstoff handelt, denn die Moleküle von Elementen sind in der Regel Systeme von mehreren Atomen und insbesondere ist das Sauerstoffmolekül ein System von zwei Sauerstoffatomen, diese müssen also bei der Verbrennung getrennt — von einander entfernt — werden. Ein Theil der durch die Annäherung der Sauerstoffatome an die Atome anderer Art bei der Verbrennung geleisteten Arbeit muss also auf jene Trennungen verwendet werden und kann daher nicht als Wärme zur Erscheinung kommen. Diese Bemerkung macht es begreiflich, dass die meisten Verbrennungen nicht von selbst anfangen, dass vielmehr meist eine Wärme-

zufuhr von aussen nöthig ist, um sie einzuleiten, obwohl doch die Verbrennung selbst Wärme erzeugt. Diese äussere Wärmezufuhr oder die Erhitzung eines Theiles des verbrennlichen Körpers auf die „Entzündungstemperatur“ ist offenbar erforderlich, um die bestehenden Atomverknüpfungen soweit zu lockern, dass die stärkeren Verwandtschaftskräfte zwischen dem einzelnen Sauerstoffatom zu den anderen Atomen ins Spiel treten können. Ist dies einmal erfolgt, dann kann sich die Verbrennung selbst im Gange erhalten, indem nun die Verbrennung des einen Moleküls hinlängliche Wärme erzeugt, um Nachbarmoleküle im erforderlichen Maasse zu lockern oder zu „dissociiren“.

Besonders genau ist in den letzten Jahrzehnten die Constitution der Kohlenstoffverbindungen erforscht, so dass man von der bei ihrer Verbrennung frei werdenden Wärmemenge schon heute im Stande ist, sich auf rein theoretischem Wege eine Vorstellung zu bilden. Da nun die Verbrennungswärme der Kohlenstoffverbindungen auch physiologisch von grösstem Interesse ist, so sollen die darüber von L. Hermann[1]) angestellten Betrachtungen hier in ihren Grundzügen mitgetheilt werden.

Stellen wir uns ein Aggregat von Molekülen vor, das nicht nothwendig ein homogener Körper zu sein braucht. Wir können, um bestimmtere Vorstellungen vor Augen zu haben, gleich an den Fall denken, der uns hernach besonders beschäftigen wird, nämlich an die Zusammenstellung einer gewissen Menge einer gasförmigen flüssigen oder festen Kohlenstoffverbindung mit der zu ihrer vollständigen Verbrennung erforderlichen Sauerstoffgasmenge. Führen wir jetzt diesem Aggregat Wärme zu, so wird einerseits seine Temperatur erhöht und der Zusammenhang zwischen den Molekülen sowohl als zwischen den Atomen der Moleküle gelockert, bis zuletzt das ganze Aggregat in ein gasförmiges Aggregat freier Atome zerstäubt. Wenn man diese Operation vielleicht auch nicht thatsächlich ausführen kann, so kann man sich doch die Wärmemenge vorstellen, welche dazu erforderlich sein würde und kann den Theil A sogleich davon ausscheiden, welcher zur Erhöhung der Temperatur nöthig ist, den Rest kann man die gesammte „Haftwärme“ des Aggregates nennen, da sie zur Ueberwindung des Aneinanderhaftens der Moleküle und Atome gedient hat. Da er als eine Summe betrachtet werden kann, deren einzelne Summanden sich beziehen auf das Haften jedes Moleküles und jedes Atomes an seinen Nachbarn, so wollen wir ihn bezeichnen mit ΣW_J.

Stellen wir uns nun vor, aus dem zerstäubten Aggregat von freien Atomen bilde sich ein neues Aggregat von Molekülen und zwar wollen wir uns auch wieder bestimmter vorstellen, dies sei die Zusammenstellung der Verbrennungsproducte der vorhin gedachten Kohlenstoffverbindung. Enthielte dieselbe bloss Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff, so hätten wir also jetzt schliesslich eine gewisse Menge Kohlensäure und Wasser.

---

[1]) Vierteljahrschr. der Züricher naturf. Gesellsch. Bd. 14.

Bei diesem Zusammentritte der freien Atome zu Molekülen und der Moleküle zu flüssigen oder festen Aggregate leisten nun ihre Anziehungskräfte positive Arbeit, die, wenn sonst keine äussere Wirkung ausgeübt wird, Wärme erzeugt. Man könnte sie passend die „Haftwärme“ des neuen Molekülaggregates nennen und wir wollen sie als Summe der Haftwärmen der einzelnen Moleküle und Atome durch $\Sigma\, W_P$ bezeichnen. Stellen wir uns vor, dass bei und nach der Bildung der neuen Aggregationsweise die Temperatur wieder hergestellt wird, welche ursprünglich vor der Zerstäubung des erstgedachten Aggregates herrschte, so kann im Ganzen bei und nach dem gedachten Vorgange eine Wärmemenge nach aussen abgegeben werden, welche sich zusammensetzt aus der eben definirten Haftwärme $\Sigma\, W_P$ und der Wärmemenge, welche nöthig sein würde, die Temperatur des Aggregates von der Schlusstemperatur wieder auf die Anfangstemperatur des zerstäubten Zustandes zu bringen. Diese letztere Wärmemenge ist aber offenbar dieselbe, welche wir vorhin unter der Bezeichnung A sogleich ausgeschieden haben.

Denken wir uns die beiden beschriebenen Vorgänge wirklich ausgeführt an einer Kohlenstoffverbindung und der zur Oxydation erforderlichen Sauerstoffmenge, so haben wir gewissermaassen nichts Anderes gethan, als die Kohlenstoffverbindung „verbrannt“. Nun wurde beim ersten Vorgange die Wärmemenge $\Sigma\, W_J + A$ von aussen zugeführt, beim zweiten die Wärmemenge $\Sigma\, W_P + A$ nach aussen abgegeben. Der Ueberschuss der abgegebenen über die zugeführte Wärmemenge ist also $\Sigma\, W_P - \Sigma\, W_J$ d. h. die Differenz zwischen der Haftwärme der Verbrennungsproducte und der Haftwärme der Ingredienzien. Diese Differenz könnte an sich sowohl negativ als positiv sein, in den uns interessirenden Fällen ist sie aber immer positiv, da die Haftwärme der Verbrennungsproducte von Kohlenstoffverbindungen nämlich der Kohlensäure und des Wassers der äusserst energischen Anziehung zwischen Sauerstoffatomen einerseits und Kohlenstoff- oder Wasserstoffatomen andererseits entspricht, während die Haftwärme der Ingredienzien wesentlich durch die weit schwächeren Anziehungen zwischen Kohlenstoff und Kohlenstoff oder zwischen Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen bedingt ist. Es wird also die Haftwärme der Producte in solchen Fällen die Haftwärme der Ingredienzien bedeutend übertreffen.

Die Wärmemenge $\Sigma\, W_P - \Sigma\, W_J$ wird nun auch frei werden, wenn man irgendwie, also z. B. durch directe Verbrennung, die Ingredienzien in die Producte verwandelt, da die von Centralkräften geleistete Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage der Kraftcentra — hier also der Atome — abhängt und nicht von dem Wege, auf welchem dieselben aus der Anfangs- in die Endlage übergeführt worden sind. Die Grösse $\Sigma\, W_P - \Sigma\, W_J = V$ wird also als die Verbrennungswärme der gedachten Verbindung zu bezeichnen sein.

Jede der Summen $\Sigma\, W_P$ und $\Sigma\, W_J$ können wir nun selbst wieder in zwei Summen zerlegen, von denen die erste sich bezieht auf die An-

ziehung zwischen den Molekülen des Aggregates, die zweite auf die Anziehung zwischen den Atomen innerhalb des Moleküles. Man kann also setzen

$$\Sigma W_P = \Sigma W_{mP} + \Sigma W_{aP}$$

und

$$\Sigma W_J = \Sigma W_{mJ} + \Sigma W_{aJ}).$$

also

$$V = (\Sigma W_{aP} - \Sigma W_{aJ}) + (\Sigma W_{Pm} - \Sigma W_{mJ}).$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes, das wir mit W bezeichnen wollen, d. h. $W = \Sigma W_{aP} - \Sigma W_{aJ}$, bedeutet also die Wärmemenge, welche durch die Umlagerung der Atome zu neuen Molekülen frei wird oder die „intramolekulare Verbrennungswärme". Der andere Summand ist die Wärmemenge, welche bei der Trennung und Wiedervereinigung der Moleküle zu neuen Aggregaten frei resp. verbraucht wird.

Man kann natürlich nur für die erstere intramolekulare Verbrennungswärme (W) versuchen, Werthe theoretisch aus dem Bau der Moleküle abzuleiten, und man muss daher zunächst versuchen, aus den empirisch bestimmten rohen Verbrennungswärmen V die intramolekularen W zu berechnen, was folgendermaassen annähernd geschehen kann.

1. Sind sowohl die Ingredienzien als die Producte gasförmig, so ist sowohl Σ_{mP} als $\Sigma_{mJ} = o$, da zwischen den Molekülen im gasförmigen Zustande keine merkliche Anziehung oder Abstossung besteht. Ist nun auch noch die Anzahl aller Moleküle der Producte gleich der Anzahl der Moleküle der Ingredienzien, so nehmen bei einer calorimetrischen Bestimmung von V, wo zu Anfang und Ende merklich gleicher Druck und gleiche Temperatur herrscht, die Gemenge gleiches Volum ein und es ist ohne alle Correctur $V = W$ zu setzen.

2. Sind wieder Ingredienzien und Producte gasförmig, ändert sich aber bei der Verbrennung die Gesammtzahl der Moleküle, so ist schon eine Correctur an V erforderlich. Es ist zwar auch hier keine Haftwärme der Gasmoleküle in Rechnung zu bringen, aber es ist bei der Messung der Verbrennungswärme äussere Arbeit geleistet worden, deren calorisches Aequivalent als positiver oder negativer Summand in dem rohen Werthe der Verbrennungswärme steckt. Um dies einzusehen, nehmen wir an, bei Ausführung der calorimetrischen Bestimmung seien die gasförmigen Ingredienzien und Producte zu Anfang und zu Ende 15^0 warm gewesen und haben unter Atmosphärendruck = 760 mm Quecksilber gestanden. Dann ist bei einer Veränderung der Molekülzahl wegen der dadurch bedingten Volumänderung der atmosphärische Druck bei Volumvermehrung überwunden resp. bei Volumverminderung hat derselbe die Producte zusammengedrückt. Die bei einer Volumänderung $\varDelta v$ unter dem Drucke p geleistete positive oder negative Arbeit ist aber bekanntlich $\varDelta v . p$ in Grammetern ausgedrückt, wenn die Volumina in Cubikcentimetern die Drucke in Kilogrammen pro 10 qcm Oberfläche ge-

messen werden, denn denkt man sich die Gasmenge eingeschlossen in ein Rohr von 10 qcm Querschnitt, so wird für jedes Cubikcentimeter Ausdehnung ein das Rohr abschliessender Stempel gegen den Druck der p Kilogramme um 1 mm verschoben. Eine Quecksilbersäule von 760 mm Höhe und 10 qcm Grundfläche wiegt nun 10,3 kg. Wäre also das Volum der Ingredienzien x_1, der Producte x_2, so beträgt die zu berechnende äussere Arbeit $(x_2 - x_1)$. 10,3 Grammeter und ihr calorisches Aequivalent in kleinen d. h. auf 1 g Wasser bezogenen Calories

$$(x_2 - x_1)\frac{10,3}{425} = (x_2 - x_1) \times 0,024.$$

Die Grösse ist $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$, je nachdem $x_2 \gtrless x_1$ ist. Nun ist aber noch $x_2 - x_1$ in Cubikcentimetern auszudrücken auf Grund der Angaben, dass bei der Verbrennung a_1 Moleküle in Wechselwirkung treten und a_2 Moleküle gebildet werden und dass die angewandte Menge des verbrennlichen Körpers 1 g beträgt, auf welche Menge man gemeiniglich die Verbrennungswärme bezieht. Bekanntlich nehmen von irgend einer gasförmigen Verbindung, deren auf Wasserstoff = 2 bezogenes Molekulargewicht $= m$ ist, bei 15° und 760 mm Quecksilberdruck m Gramme, ebenso wie 2 g Wasserstoff, 23 547 ccm[1]) Raum ein, also 1 g der Verbindung $\frac{23\,547}{m}$ ccm. Es mögen nun in den Process eingehen b Moleküle des brennbaren Körpers und c Moleküle Sauerstoff eingehen (also $a_1 = b + c$), dann nimmt der Sauerstoff, welcher zur Verbrennung von 1 g oder $\frac{23\,547}{m}$ ccm des brennbaren Gases vom Molekulargewicht m gehört, einen Raum $= \frac{23\,547}{m} \cdot \frac{c}{b}$ ccm ein, also ist das Volum x_1 der Ingredienzien

$$= \frac{23\,547}{m} + \frac{23\,547}{m}\frac{c}{b} = \frac{23\,547}{m} \cdot \frac{b}{b} + \frac{23\,547}{m} \cdot \frac{c}{b} = a_1 \times \frac{23\,547}{mb}.$$

Das Volum der Producte wird demnach sein $a_2 \frac{23\,547}{m.b}$ und die Differenz

$$x_2 - x_1 = \frac{a_2 - a_1}{mb} \cdot 23\,547 \text{ ccm.}$$

Das calorische Aequivalent der bei der Volumänderung geleisteten Arbeit berechnet sich also

$$= \frac{a_2 - a_1}{m.b}\, 23\,547 \times 0,02449 = \frac{a_2 - a_1}{mb} \times 576$$

kleine Calories. Als Rechnungsbeispiel wollen wir die Verbrennung des Methylalkohols betrachten, er ist zwar bei 15° kein Gas, man könnte sich

[1]) 22 320 bei 0° entsprechend.

ja aber den Process bei höherer Temperatur durchgeführt denken. Eingehen müssen 2 Moleküle CH_4O und 3 Moleküle Sauerstoff, im Ganzen 5 Moleküle; gebildet werden, 2 Moleküle CO_2 und 4 Moleküle H_2O. $a_2 - a_1$ ist also $= 1$ m, das Molekulargewicht des Methylalkohols ist $= 32$, die Correction für V ist also:

$$= \frac{1}{2 \times 32} 576 = + 9{,}0.$$

3. Sind unter den Ingredienzien und Producten flüssige oder feste Körper, so kommt zu der soeben berechneten Correction der Verbrennungswärme noch eine Differenz $L_J - L_P$ hinzu, wenn man mit L_J die Wärmemenge bezeichnet, welche zur Vergasung der nicht gasförmigen Ingredienzen erforderlich ist und mit L_P die Wärmemenge, welche bei Condensation der nicht gasförmigen Producte frei werden kann. Zu der rohen Verbrennungswärme V hat nämlich die Bildung der neuen Aggregate aus den Molekülen der Producte einen Beitrag L_P geliefert, der deshalb abgezogen werden muss, andererseits mussten die Aggregate der Ingredienzien gesprengt werden und ein dieser Arbeit entsprechender Wärmebetrag L_J fehlt also in der rohen Verbrennungswärme und ist ihr hinzuzufügen.

Die intramolekulare Verbrennungswärme ist also:

$$W = V + \frac{a_2 - a_1}{mb} 576 + L_J - L_P.$$

Nach dieser Formel hat Hermann für eine Reihe von Kohlenstoffverbindungen aus den von Favre und Silbermann bestimmten Werthen von V die intramolekulare Verbrennungswärme W berechnet. Die Resultate sind in der Tabelle S. 198 verzeichnet. Die latenten Verdampfungswärmen L_J und L_P hat Hermann, wo sie nicht experimentell bekannt sind, nach dem Grundsatze berechnet, dass sie den Dichtigkeiten der Dämpfe umgekehrt proportional sind. Die vermuthlich sehr kleinen Schmelzwärmen fester Ingredienzien sind ganz vernachlässigt.

Wenn man nun an den so berechneten Werthen von W theoretische Annahmen prüfen will, so bietet sich als einfachste Annahme die folgende dar, dass die gesammte Haftwärme eines Moleküls die Summe ist von den Haftwärmen der einzelnen sich sättigenden Valenzenpaare und dass jedem Valenzenpaare, wo es auch vorkommt, dieselbe Haftwärme zuzuschreiben ist. So kommt z. B. im Alkoholmolekül fünfmal die Bindung einer C-Valenz an eine H-Valenz vor oder die Sättigung C — H; einmal die Sättigung C—C, einmal C—O und einmal O—H. Wenn wir also die einer solchen Sättigung entsprechende Haftwärme durch Zusammenstellung der kleinen Buchstaben für die Atome bezeichnen, so wäre die Haftwärme für 46 g Alkohol 5 ch + cc + co + ho. Ebenso wäre die Haftwärme für 16 g Grubengas 4 ch. Die Verbrennungswärme von 46 g Alkohol ergiebt sich hiernach wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ingredienzien} & & \text{Producte} \\ C_2H_6O + 3O_2 & = & 2CO_2 + 3H_2O, \end{array}$$

$$\text{Haftwärme der Producte} = 2 \times 4\,co + 3 \times 2\,ho,$$

$$\text{Haftwärme der Ingredienzien} = 5\,ch + cc + co + ho + 3 \times 2.oo,$$

intramolekulare Verbrennungswärme

$$= 2 \times 4\,co + 3 \times 2\,ho - (5\,ch + cc + co + ho)$$

$$= 7\,co + 5\,ho - 5\,ch - cc - 6\,oo = 5\,u + v,$$

wenn man

$$co + ho - ch - oo = u$$

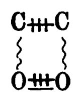
und

$$2\,co - cc - oo = v$$

setzt. Diese Grössen haben eine reale Bedeutung, u ist nämlich offenbar die Arbeit, welche geleistet wird, wenn eine ch-Valenz durch Sauerstoffbindungen ersetzt wird, wie aus folgendem Schema zu ersehen ist:

C—H
O—O

wo die ursprünglich vorhandenen und später gelösten Bindungen mit durchstrichenen Linien, die neuen Bindungen durch geschlängelte Linien angedeutet sind. Die den ersteren entsprechenden Haftwärmen ch und oo gehen also mit negativem, die den letzteren entsprechenden Haftwärmen gehen mit positivem Vorzeichen in die Summe ein. Ebenso ist v die Arbeit bei Ersetzung einer CC-Bindung durch Sauerstoffbindungen; wir brauchen nur das Schema



ins Auge zu fassen, um zu sehen, dass 2co positiv und cc, sowie oo negativ in die Summe eingeht.

Man kann also die intramolekulare Verbrennungswärme einer Kohlenstoffverbindung berechnen, wenn man für jede C—H-Bindung die Grösse u, für jede C—C-Bindung die Grösse v einmal in Rechnung setzt, die C—O- und H—O-Bindungen brauchen nicht berücksichtigt zu werden, da sie schon Sauerstoffbindungen sind, also bei der Verbrennung nur durch gleichartige zu ersetzen wären, ihre Lösung also ebenso viel Arbeit kostet wie ihre Neuknüpfung etwa mit einem anderen Atomindividuum liefern würde. Man kann nun aus der Tabelle S. 198 für u und v unter den gemachten Annahmen numerische Werthe berechnen. Es fand sich im oben benutzten Beispiel die intramolekulare Verbrennungswärme von 46 g Alkohol $= 5u + v$. Auf demselben Wege ergiebt sich die intramolekulare Verbrennungswärme für 60 g Essigsäure $= 3u + v$, die Differenz beider Grössen muss als $= 2u$ sein. Nun ergiebt die Tabelle I die Verbrennungswärme von 46 g Alkohol $= 6720 \times$

46 = 309 120. Die intramolekulare Verbrennungswärme für 60 g Essigsäure = 3318 × 6 = 199 080. Die Differenz ist 110 040 = $2u$, also u = 55 020, rund 55 000. Betrachten wir ferner zwei auf einander folgende Glieder einer homologen Reihe, die sich um den Atomcomplex CH_2 unterscheiden, so ist klar, dass bei Verbrennung eines Moleküls vom höheren Gliede zwei Bindungen C—H und eine Bindung C—C mehr zu verbrennen ist als bei Verbrennung eines Moleküls vom niederen Gliede. Die Differenz der intramolekularen Verbrennungswärme zweier Glieder einer solchen Reihe auf das Molekulargewicht berechnet, muss also constant = $2u + v$ sein. In der That schwanken diese Differenzen aus den Zahlen W der Tabelle berechnet wenig um den Mittelwerth 147 000. Nehmen wir als Beispiel die Buttersäure mit dem Molekulargewicht 88 und die Baldriansäure mit dem Molekulargewicht 102. Auf Grund der Angaben in der Tabelle geben 88 g Buttersäure 88 × 5282 = 464 816 Cal. intramolekulare Verbrennungswärme und 102 g Baldriansäure 102 × 6021 = 614 142 Cal. Die Differenz 149 326 weicht wenig von 147 000 ab. Setzen wir dieser Zahl also $2u + v$ gleich und ziehen den schon gefundenen Werth von $2u$ = 110 000 davon ab, so ergiebt sich v = 37 000. Berechnet man mit Hülfe dieser Werthe von u und v die intramolekulare Verbrennungswärme einiger Kohlenstoffverbindungen, so ergeben sich die Zahlen der letzten, „W berechnet" überschriebenen Spalte der Tabelle S. 198. Man sieht, dass im Ganzen die Ergebnisse der Rechnung mit denen der Beobachtung gut stimmen, aber gerade bei den einfachsten Verbindungen zeigen sich die grössten Abweichungen: Methylalkohol 3 Proc., Ameisensäuremethyläther 8 Proc. und Grubengas gar 17 Proc. Dies zeigt, dass die zu Grunde liegenden Annahmen doch noch nicht ganz zutreffend sein können.

Um eine noch bessere Uebereinstimmung zu erzielen, muss man also annehmen, dass der Verbrennungswerth einer Bindung, z. B. einer C—H-Bindung, doch nicht ganz constant ist, sondern mit abhängt von den übrigen Bindungen im Molekül. Um eine weitere Annäherung anzubahnen, macht nun Hermann zunächst die Annahme, dass die Haftwärme eines Valenzenpaares nur durch diejenigen anderen Atome beeinflusst werde, welche an demselben Atome haften. Die Haftwärme ch könnte also sieben verschiedene Werthe haben, je nachdem an dem C-Atome ausser dem betrachteten H-Atome lauter Wasserstoffatome hafteten, wie im Grubengas, oder noch zwei Wasserstoffatome und ein Sauerstoffatom, wie im Methylalkohol, und so fort. Die sieben verschiedenen Werthe von ch können sehr verständlich bezeichnet werden durch die Symbole $c_{h_3}h$, $c_{h_2o}h$, $c_{ho_2}h$, $c_{o_3}h$, $c_{ch_2}h$, $c_{c_2h}h$.

Auf Grund solcher Betrachtungen hat nun Hermann weitere Berechnungen ausgeführt, deren Resultate in der That auch für die einfacheren Verbindungen besser mit den Daten der Beobachtung stimmen. Doch müssen wir bezüglich dieser interessanten Ausführungen, sowie bezüglich der daran geknüpften Betrachtungen über Verbrennungswärme un-

gesättigter und stickstoffhaltiger Kohlenstoffverbindungen auf die Originalabhandlung H e r m a n n's verweisen.

Name	Formel	V	$\frac{a_2 - a_1}{m \cdot b}$ 576,6	L_J	L_P	W	W berechnet
Holzgeist	CH_4O	5 307,1	+ 9,0	322,9	634,5	5 005	5 156
Weingeist	C_2H_6O	7 183,6	+ 12,5	224,6	700,3	6 720	6 783
Amylalkohol	$C_5H_{12}O$	8 958,6	+ 16,4	117,4	732,2	8 360	8 557
Cetylalkohol	$C_{16}H_{34}O$	10 629,2	+ 19,1	42,7	754,4	9 937	9 793
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	3 505	+ 9,6	161,0	358,0	3 318	3 367
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	5 647	+ 13,1	109,7	488,1	5 282	5 636
Baldriansäure	$C_5H_{10}O_2$	6 439	+ 14,1	94,7	526,4	6 021	6 304
Palmitinsäure	$C_{16}H_{32}O_2$	9 316,5	+ 18,0	38,5	671,2	8 702	8 828
Aethyläther	$C_4H_{16}O$	9 027,6	+ 15,6	91,6	725,6	8 409	8 432
Amyläther	$C_{10}H_{22}O$	10 188	+ 18,2	42,9	747,6	9 502	9 532
Ameisensäuremethylester	$C_2H_4O_2$	4 197,4	+ 9,6	155,2	358,0	4 004	3 667
Essigsäuremethylester . .	$C_3H_6O_2$	5 344	+ 11,7	112,3	435,4	5 033	4 959
Ameisensäureäthylester .	$C_3H_6O_2$	5 279	+ 11,7	112,3	435,4	4 968	4 959
Essigsäureäthylester . .	$C_4H_8O_2$	6 293	+ 13,1	10[illegible],8	488,1	5 924	5 841
Buttersäuremethylester .	$C_5H_{10}O_2$	6 799	+ 14,1	91,3	526,4	6 378	6 480
Baldriansäuremethylester	$C_6H_{12}O_2$	7 376	+ 14,9	80,3	555,5	6 916	6 966
Baldriansäureäthylester .	$C_7H_{14}O_2$	7 834,9	+ 15,5	71,6	578,2	7 344	7 346
Essigsäureamylester . . .	$C_7H_{14}O_2$	7 971,2	+ 15,5	71,6	578,2	7 480	7 346
Baldriansäureamylester .	$C_{10}H_{20}O_2$	8 543,6	+ 16,8	54,1	624,4	7 990	8 116
Palmitinsäurecetylester .	$C_{32}H_{64}O_2$	10 342,2	+ 19,2	19,4	715,9	9 665	9 644
Grubengas	CH_4	13 063	0	—	1 342,3	11 721	13 750
Aethylen	C_2H_4	11 857,8	0	—	767,1	10 091	—
Amylen	C_5H_{10}	11 419	+ 12,4	133,5	767,1	10 798	—
Decylen	$C_{10}H_{20}$	11 303	+ 16,5	66,8	767,1	10 619	—
Undecylen	$C_{11}H_{22}$	11 262	+ 16,9	60,7	767,1	10 573	—
Cetylen	$C_{16}H_{32}$	11 055	+ 18,0	41,7	768,1	10 348	—
Metamylen	$C_{20}H_{40}$	10 928	+ 18,5	33,4	767,1	10 213	—
Aceton	C_3H_6O	7 303	+ 9,9	116,8	555,5	6 874	6 966
Phenylsäure	C_6H_6O	7 842,3	+ 6,1	110	342,7	7 616	—
Kohlenoxyd	CO	2 403	— 10,3	—	—	2 393	—
Wasserstoffgas	H_2	34 462	— 144,1	—	5 369,4	28 949	—

Als nothwendige Folgerung aus dem Principe der Erhaltung der Energie kann noch folgender Satz aufgestellt werden: Wenn eine Verbrennung auf verschiedenen Wegen möglich ist, so ist die dabei gebildete Wärmemenge von dem Wege unabhängig; sie hängt lediglich ab von den Anfangs- und Endzuständen der Körper, durchaus nicht von den Zwischenstufen, welche die Körper durchlaufen. Dieser Satz ist für die Lehre von der thierischen Wärme von ausserordentlicher Bedeutung, wie sich aus den Beispielen sogleich ergeben wird, dic zur Erläuterung des Satzes beigebracht werden sollen. Um zunächst ein allereinfachstes Beispiel zu bilden, denken wir uns eine Gewichtseinheit Kohlenstoff einmal verbrannt direct zu Kohlensäure, dann aber denken wir uns eine Gewichtseinheit Kohlenstoff anfänglich bloss zu Kohlenoxyd oxydirt und hernach dieses Gas durch Aufnahme eines weiteren Atoms Sauerstoff zu Kohlensäure verbrannt. Das Princip der Erhaltung der Kraft fordert: die bei dem letzten aus zwei getrennten Acten bestehenden Processe gebildete Wärmemenge ist gleich der Wärmemenge, welche beim erstgedachten Processe in einem Acte gebildet wird, d. h. die Wärmemenge, welche bei Verbrennung einer Gewichtseinheit Kohlenstoff zu $3^2/_3$ Gewichtseinheiten Kohlensäure entsteht, ist gleich einer Summe, deren erster Summand die Wärmemenge ist, die bei Oxydation einer Gewichtseinheit Kohle zu Kohlenoxyd entsteht, deren zweiter Summand die Wärmemenge ist, welche entsteht, wenn sich $2^1/_3$ Gewichtseinheiten Kohlenoxyd mit $1^1/_3$ Gewichtseinheiten Sauerstoff zu $3^2/_3$ Gewichtseinheiten Kohlensäure verbindet. Es wird offenbar durch Anwendung dieses Principes möglich, die bei gewissen Processen gebildete Wärmemenge zu bestimmen, die sich experimentell gar nicht bestimmen lässt. Z. B. können wir ermitteln, wie viel Wärme bei Oxydation einer Gewichtseinheit Kohle zu Kohlenoxyd gebildet werden muss. Man braucht nur von der Verbrennungswärme der Kohle zu Kohlensäure diejenige (experimentell bestimmbare) Wärmemenge abzuziehen, die bei Verbrennung von $2^1/_3$ Gewichtseinheiten Kohlenoxyd frei wird.

Als zweites Beispiel mag uns der Zucker dienen. Verbrennen wir eine Gewichtseinheit Zucker in heller Flamme zu Kohlensäure und Wasser. Dabei wird eine gewisse Wärmemenge frei, wir wollen sie Z nennen. Wir können aber die Gewichtseinheit Zucker auch auf eine andere Weise in Kohlensäure und Wasser verwandeln. Wir lassen nämlich den Zucker zuerst gähren und verbrennen nachher den gebildeten Alkohol. Bei der Gährung einer Gewichtseinheit Zucker wird nun eine gewisse Wärmemenge (G) frei werden und bei der Verbrennung der aus der Gewichtseinheit Zucker gebildeten Alkoholmenge wird wieder eine gewisse Wärmemenge (A) frei werden. Unser Princip verlangt, dass $Z = G + A$ ist. Von dieser Gleichung könnten wir nun wieder Gebrauch machen zur Berechnung der schwer bestimmbaren Gährungswärme, wenn wir die Verbrennungswärme des Zuckers und des Alkohols bestimmt hätten. Aus der letzteren könnte man nämlich zunächst A leicht berechnen, indem

ja die Chemie lehrt, wie viel Alkohol aus einer Gewichtseinheit Zucker entstehen kann. Die Differenz $Z - A$ ist nun die Gährungswärme G.

Aehnliche Betrachtungen wie über die Verbrennung des Zuckers lassen sich anstellen über die Verbrennung der verwickelten eiweissartigen Verbindungen. Wenn diese bei hoher Temperatur und genügender Sauerstoffzufuhr geschieht, so sind die Endproducte Kohlensäure, Wasser und Stickstoff. Die Wärmemenge, welche auf diese Weise von einem Gramm Eiweiss geliefert wird, wollen wir mit E bezeichnen. Im thierischen Organismus schreitet die Oxydation der Eiweisskörper nicht bis zu diesem Punkte vor, nur ein Theil des darin enthaltenen Kohlenstoffs und Wasserstoffs tritt in der Form von Kohlensäure und Wasser aus der Verbindung, ein anderer Theil dieser Stoffe bleibt mit Stickstoff und Sauerstoff zu complicirteren Molekülen verbunden, unter denen insbesondere der Harnstoff wichtig ist. Bei dieser unvollständigen Verbrennung kann daher nicht jedes Gramm Eiweiss die Wärmemenge E entbinden. Offenbar muss aber diese Wärmemenge wieder herauskommen, wenn man zu der bei der unvollkommenen Verbrennung erzeugten Wärmemenge (sie mag T genannt werden) diejenige hinzufügt, welche noch entsteht, wenn man die von einem Gramm Eiweiss als Harnstoff etc. zurückbleibenden Reste auch noch vollständig zu Kohlensäure, Wasser und Stickstoff verbrennt. Bezeichnen wir diese letztere Wärmemenge, die sich leicht experimentell bestimmen liesse, mit H, so haben wir die Gleichung $E = T + H$ oder $T = E - H$. Man könnte also durch Rechnung finden, wie viel Wärme bei der Umsetzung jedes Grammes Eiweiss im Thierkörper entstehen muss, wenn man die Verbrennungswärme des Eiweisses (E) kennte und ausserdem wüsste, wie viel Wärme (H) entsteht bei der vollständigen Verbrennung des aus einem Gramm Eiweiss stammenden Harnstoffs etc.

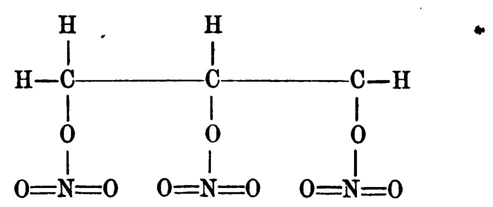
Die am Eingange dieses Abschnittes entwickelten Sätze machen es begreiflich, dass es Verbindungen geben kann, deren Entstehung aus ihren Elementen nicht Wärme erzeugt, sondern Wärme bindet. Solche Verbindungen werden dann Wärme erzeugen bei ihrem Zerfalle. Als Beispiel mag das Stickoxyd dienen (NO). Bei Bildung von zwei Molekülen dieser Verbindung aus einem Molekül Sauerstoff (O_2) und einem Molekül Stickstoff (N_2) würde die ohne Zweifel vorhandene Anziehung zwischen O und N eine Arbeit leisten, welche nach der obigen Bezeichnungsweise (S. 195) durch $2\,no$ darzustellen wäre. Die ebenso vorhandene Anziehung aber zwischen den beiden Stickstoffatomen des N_2-Moleküls und zwischen den beiden Sauerstoffatomen des O_2-Moleküls leistet negative Arbeit im Betrage von $nn + oo$. Es ist nun offenbar $nn + oo > 2\,no$ und es wird daher im Ganzen mehr negative als positive Arbeit geleistet, wenn $2\,NO$ aus $O_2 + N_2$ wird und mehr positive als negative, wenn umgekehrt $O_2 + N_2$ aus $2\,NO$ wird. Solche Verbindungen bilden sich natürlich nicht leicht von selbst aus den Elementen, um so leichter aber zerfallen sie. Man versteht hiernach auch die Thatsache,

dass brennbare Körper mehr Wärme entbinden, wenn sie in NO als wenn sie in O_2 verbrannt werden, weil eben die Dissociation eines NO-Moleküls eine kleinere negative Arbeit ist, als die Dissociation eines O_2-Moleküls und weil überdies bei der Verbrennung eines Körpers in NO noch die Wärme frei wird, welche der Wiedervereinigung der frei gewordenen N-Atome zu N_2-Moleküle entspringt.

Die entwickelten Principien machen ferner begreiflich, dass eine complicirtere Verbindung in sich selbst ohne Mitbetheiligung freies Sauerstoffs unter bedeutender Wärmeentwickelung zu einfacheren Verbindungen verbrennen oder zerfallen kann. Nehmen wir als Beispiel das bekannte Nitroglycerin oder den dreifachen Salpetersäureester des Glycerins, $C_3H_5(ONO_2)_3$. Aus vier Molekülen dieser Verbindung wird bei der Explosion

$$4 . C_3H_5(ONO_2)_3 = 12CO_2 + 10H_2O + 6N_2 + O_2.$$

Man sieht leicht, wenn man sich die Structurformel des Nitroglycerins



vorstellt, dass bei dem Zerfalle lauter lockere Bindungen mit geringer Haftwärme, nämlich NO-, CH- und CC-Bindungen gelöst und lauter sehr feste Bindungen mit grosser Haftwärme, nämlich CO- und HO-, sowie ferner OO- und NN-Bindungen geknüpft werden, dass also bei dem Processe eine grosse Wärmemenge entwickelt werden muss, wie es bekanntlich in der That der Fall ist.

Diese Betrachtung ist deswegen von grossem physiologischem Interesse, weil offenbar bei den Muskeln Nerven und wohl auch bei anderen arbeitenden Elementen des Thierkörpers ähnliche Processe stattfinden. Für die Muskelsubstanz z. B. ist es positiv erwiesen, dass die bei ihrer Erregung geleistete Arbeit und entwickelte Wärme nicht durch Verbrennung im engeren Sinne des Wortes entsteht, d. h. dass in den „Erregung des Muskels“ genannten chemischen Process nicht freier Sauerstoff eingeht. Es bildet sich bei diesem Processe vielmehr Kohlensäure und wahrscheinlich Wasser aus lauter Sauerstoff-, Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen, welche schon vorher in Verbindung gewesen sind wie im Nitroglycerin.

Zweites Capitel.

Die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie.

In den einleitenden Betrachtungen ist schon gezeigt, dass Wärme nur ein anderer Name für eine gewisse Form der kinetischen Energie ist. Daraus folgt der Satz, welcher heutzutage als der erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet zu werden pflegt: Ein bestimmtes Wärmequantum kann durch ein bestimmtes Maass von positiver Arbeit erzeugt werden und umgekehrt, wenn bei einem Processe die Wärme Kräfte überwindet, so entsteht für ein bestimmtes verschwundenes Wärmequantum allemal genau jenes bestimmte Maass potentieller Energie oder negativer Arbeit, welches, positiv genommen, das Wärmequantum hätte erzeugen können. Kurz gesagt, besteht zwischen den Wärme- und Arbeitsmengen ein bestimmtes Aequivalentverhältniss.

Durch verschiedene Versuchsweisen ist der numerische Werth des Aequivalentverhältnisses ermittelt. Es entspricht der Wärmeeinheit oder Calorie, d. h. der Wärmemenge, welche 1 kg Wasser von 0° auf 1° erwärmt, eine Arbeit von 425 Arbeitseinheiten, d. h. Kilogrammmetern. Die gewöhnlichen Methoden zur Bestimmung dieser fundamentalen Grösse sind in allen ausführlichen Lehrbüchern der Physik (s. Müller's Lehrbuch, 8. Aufl., bearbeitet von Pfaundler. Bd. II, 2. Abth., S. 428 u. flgd.) aus einander gesetzt. Hier soll daher nur noch eine Methode besprochen werden, die zwar an Genauigkeit mit den älteren nicht wetteifern kann, die aber physiologisch von besonderem Interesse ist, sofern zum Medium der Bestimmung die lebende Muskelsubstanz dient.

Eine aus parallelen und gleich langen Fasern bestehende Muskelmasse wird oben befestigt und an ihr freies unteres Ende wird eine bekannte Last gehängt. Nun wird diese um einen bestimmten Betrag gehoben und sodann fallen gelassen. Sie zerrt und erschüttert die Muskelfasern und setzt sich nach wenigen Schwingungen wieder mit der elastischen Spannung derselben ins Gleichgewicht wie vor dem Hube. Da somit sonst Alles wieder ist wie zu Anfang, so kann die Arbeit, welche die Hand des Experimentators auf Heben der Last verwendet hat, keinen anderen Effect haben, als Erzeugung von Wärme im Muskel durch die Erschütterung beim Wiederherabfallen der Last. Diese erzeugte Wärme muss also der aufgewendeten Arbeit äquivalent sein, nur müsste dabei von der Arbeit des Hubes ein Theil in Abzug gebracht werden, welcher von den elastischen Kräften des Muskels selbst bei seiner Entlastung im ersten Stadium des Hubes geleistet wird. Die entwickelte Wärme lässt sich berechnen, wenn man die Temperaturerhöhung des

Muskels während des beschriebenen Actes misst und mit der Wärmecapacität der Muskelmasse multiplicirt. Diese Temperaturerhöhung, die wirklich jedesmal stattfindet, ist natürlich sehr klein und kann nur durch besonders feine Hülfsmittel ausgeführt werden. In den auf meine Veranlassung von Danilewsky angestellten Versuchen[1]) diente hierzu die weiter unten beschriebene Thermosäule. Eine dieser Versuchsreihen ergab als Quotient der Hubarbeit, dividirt durch die entwickelte Wärme, d. h. als Werth des mechanischen Aequivalentes der Wärmeeinheit im Durchschnitt aus neun wenig von einander abweichenden Einzelbestimmungen die Zahl 493. Sie weicht allerdings beträchtlich von der richtigen Zahl 425 ab, aber man muss bedenken, dass es sich um den ersten Versuch handelt, das mechanische Wärmeäquivalent an einem lebenden Gebilde zu bestimmen, überdies ist die oben berührte Correction der Hubarbeit vernachlässigt. Schlägt man sie zu 5 Proc. an, so würde die gefundene Zahl sich auf etwa 469 ermässigen, was noch weniger von 425 abweicht.

Ferner hat Danilewsky auch noch bei der activen Zusammenziehung des Muskels das mechanische Aequivalent der Wärme bestimmt. Die Versuche wurden nach folgendem Plane angestellt. Der lebende Muskel wird durch einen elektrischen Schlag zur Zuckung gereizt und wirft ein daran frei hängendes Gewicht auf, das sich herabfallend wieder mit seiner Spannung im Ruhezustande ins Gleichgewicht setzt. Da jetzt gar keine äussere bleibende Wirkung stattgefunden hat, so muss die ganze Arbeit, welche chemische Verwandtschaftskräfte in der Erregung geleistet haben, zur Erzeugung von Wärme verwandt sein. Die ganze Wärme muss aber auch im Muskel vorhanden sein, denn sie ist zum Theil in ihm selbst unmittelbar als solche entstanden, theils durch das Wiederherabfallen der zeitweise gehobenen Last unter Vermittelung der dabei stattfindenden Erschütterung des Muskels in ihm erzeugt, ganz wie bei der künstlichen Erschütterung in den vorhin beschriebenen Versuchen. Anders verhält sich die Sache, wenn der Process so geleitet wird, dass ausserhalb des Muskels eine bleibende Wirkung stattfindet. Wenn man z. B. dafür sorgte, dass die aufgeworfene Last am höchsten Punkte liegen bliebe und nachträglich durch eine gleich grosse andere Last den ruhenden Muskel wieder auf seine ursprüngliche Spannung brächte, so würde ein bleibender mechanischer Effect da sein, denn die letztgedachte Last braucht lange nicht so tief zu sinken, als die erstere beim Wurf stieg. Ein diesem Effecte äquivalentes Wärmequantum würde alsdann im Muskel weniger erscheinen als im Versuche der ersten Art. Danilewsky hat jedoch einen etwas von diesem nächstliegenden abweichenden Versuchsplan ausgeführt. Es wurde nämlich beim zweiten Versuche die Zuckung so eingerichtet, dass die Last beim Herabfallen durch ein Kautschukband mit dem Muskel verknüpft war. Da

---

[1]) Pflüger's Archiv, Bd. 21.

dies leichter dehnbar ist als der Muskel, so nimmt es statt seiner den Stoss der herabfallenden Last fast allein auf und es wird in diesem Kautschukband das dem Hube der Last entsprechende Wärmequantum frei. Gespannt ist aber durch Vermittelung des Kautschukbandes der Muskel zu Ende wieder wie zu Anfang.

Es fand sich nun in der That, dass jedesmal bei einem Versuche der zweiten Art weniger Wärme im Muskel frei wird als bei einem solchen der ersten Art. Die Differenz sollte nun der zeitweilig geleisteten mechanischen Arbeit äquivalent sein, welche sich leicht aus dem graphisch verzeichneten Wurfe der Last berechnen lässt. Die Ergebnisse der nach diesem Plane ausgeführten Versuchsreihen Danilewsky's stimmen unter sich nicht so gut überein, wie die der Versuchsreihen mit künstlicher Erschütterung des ruhenden Muskels, auch weicht die Durchschnittszahl der sämmtlichen Bestimmungen 536 noch weiter von dem wahren Werthe ab. Man muss aber bedenken, dass diese Experimente ausserordentlich schwierige sind, und kann daher mit dem Ergebnisse dieses ersten Versuches, das mechanische Wärmeäquivalent in einer Lebenserscheinung bestätigt zu sehen, sehr zufrieden sein, um so mehr, wenn man sich daran erinnert, dass die ersten Bestimmungen dieser Grösse aus einfachen rein physikalischen Versuchen noch viel weiter von dem richtigen Werthe abliegende Ergebnisse geliefert haben.

Am sichersten von jedem principiellen Einwand würde ein Versuch zur Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme dann sein, wenn man den Körper, durch dessen Vermittelung Wärme in Arbeit oder Arbeit in Wärme verwandelt wird, zu Ende wieder genau in seinen Anfangszustand zurückbrächte, wenn man ihn — wie es Clausius passend bezeichnet — einen Kreisprocess durchmachen liesse. In einem solchen Falle könnte natürlich das Bedenken gar nicht erhoben werden, dass allfällig ein Theil der verschwundenen Wärme oder der verbrauchten Arbeit zur Zustandsänderung des fraglichen Körpers verwandt worden sei. Zwar sind bis jetzt noch keine wirklichen experimentellen Bestimmungen des mechanischen Aequivalentes der Wärme auf derartige Kreisprocesse gegründet worden. Ihre Betrachtung ist aber theoretisch so wichtig, dass wir noch einen Augenblick dabei verweilen wollen.

Ein höchst einfacher Kreisprocess ist z. B. folgender, wir denken uns eine Gasmasse, eingeschlossen in einer für Wärme absolut undurchdringlichen Hülle. Sie hat zu Anfang eine Temperatur t_0 und ein Volum v_0. Sie wird unter diesen Umständen einen gewissen Druck p_0 ausüben. Jetzt bringen wir, indem wir einen Theil der Hülle wegnehmen, an dieser Stelle einen Körper A mit dem Gase in Berührung, der ein unerschöpfliches und absolut gut leitendes Wärmemagazin von der Temperatur t_0 darstellt. In Wirklichkeit ist dies zwar nicht herzustellen, aber man kann es sich doch denken; auch würde wohl in der That eine grosse Metallmasse, die dem Gase eine recht grosse Berührungsfläche bietet, einigermaassen den an den Körper A gestellten Anforderungen

genügen. Indem wir uns gleichzeitig einen Theil der die Gasmasse umschliessenden Wände beweglich denken (etwa wie einen Kolben in einem Cylinder), wird sich jetzt das Gas ausdehnen. Der dabei eintretende Wärmeverlust wird dem Gase in jedem Augenblicke durch den Körper A ersetzt, das Gas behält also trotz der Ausdehnung seine Temperatur t_0 bei, dagegen sinkt seine Spannung, gemäss dem Mariotte'schen Gesetze, mit der Zunahme des Volums. Wir brechen jetzt in einem willkürlich gewählten Augenblicke diesen Act ab, indem wir den Körper A wegnehmen und an seine Stelle wieder eine für Wärme undurchdringliche Partie der Hülle einsetzen. Die Ausdehnung des Gases lassen wir noch weiter fortschreiten. Da aber jetzt der durch arbeitende Ausdehnung des Gases bedingte Wärmeverlust nicht mehr von anderswoher ersetzt wird, so wird sich in diesem zweiten Acte das Gas abkühlen. Die Abkühlung sei fortgeschritten bis zur Temperatur t_1 (die also niedriger sein muss als t_0, übrigens aber willkürlich gewählt werden darf). Die Spannung des Gases war in diesem zweiten Acte noch tiefer gesunken. Jetzt lassen wir einen dritten Act beginnen, indem wir ein unendlich geräumiges und absolut leitendes Wärmereservoir B von der Temperatur t_1 mit dem Gase in Berührung setzen. Gleichzeitig drücken wir das Gas durch äusseren Kraftaufwand zusammen. Es steigt die Spannung des Gases und es wird Wärme gebildet; diese aber wird jeden Augenblick von dem Körper B aufgenommen, so dass eine Steigerung der Temperatur über t_1 hinaus nicht zu Stande kommen kann. Diesen dritten Act dürfen wir nun nicht in einem willkürlich gewählten Augenblicke abbrechen, sondern in einem ganz bestimmten, der so zu wählen ist, dass, wenn wir den gleich zu beschreibenden vierten Act vornehmen, das Gas wieder mit dem Volum v_0 auf die Temperatur t_0 kommt. Der vierte Act besteht aber darin, dass wir den Körper B entfernen, die Hülle des Gases wieder für Wärme undurchdringlich machen und es durch äusseren Kraftaufwand auf das Anfangsvolum v_0 zusammendrücken. Da bei diesem Acte keine Wärme nach aussen geleitet werden kann, so wird sich die Temperatur von t_1 an steigern, und man kann es selbstverständlich durch Verfügung über den Umfang des dritten Actes allemal so einrichten, dass die Erwärmung gerade in dem Augenblicke den Grad t_0 erreicht, wenn das Volum wieder v_0 geworden ist, dann ist also auch der Druck wieder p_0. Wir haben also jetzt das Gas einen Kreisprocess durchmachen lassen.

Bei dem beschriebenen Processe hat sich nun in der Gasmasse selbst schliesslich gar nichts verändert, da es eben ein Kreisprocess war. Zu Ende wie zu Anfang nimmt die Gasmenge das Volum v_0 ein, hat die Temperatur t_0 und übt mithin wieder den Druck p_0 aus. Ausserhalb aber sind bleibende Veränderungen eingetreten. Es ist nämlich erstens im Ganzen äussere Arbeit geleistet worden, da die Ausdehnung der Gasmasse durchweg mit höherem Drucke erfolgte als die Zusammendrückung. Die letztere hat also nicht soviel Arbeit gekostet, als bei der Ausdehnung

geliefert worden ist. Durch geeignete Veranstaltungen wäre es möglich gewesen, dass irgend eine Last am Ende unseres Kreisprocesses höher läge, als am Anfang, dass also eine in Kilogrammeter ausdrückbare Arbeit geleistet wäre. Zweitens hat der Körper A Wärme verloren und der Körper B hat Wärme gewonnen. Die von A verlorene Wärmemenge muss offenbar grösser sein, als die von B gewonnene. Es muss mit anderen Worten im Ganzen Wärme verschwunden sein, denn sonst wäre die Arbeit aus Nichts entstanden. Es wird sogar offenbar ganz bestimmt der Ueberschuss der von A abgegebenen Wärmemenge über die von B empfangene, d. h. die gänzlich verschwundene, Wärmemenge genau gleich dem Aequivalent der geleisteten Arbeit sein. Die übrige von A abgegebene Wärmemenge ist einfach während des Processes von A auf B übergegangen, d. h. sie ist übergegangen von einem wärmeren auf einen kälteren Körper. Dies war bei dem Kreisprocesse nicht zu vermeiden, denn wir sahen ja den Körper B, dessen Temperatur t_1 war, während des dritten Actes Wärme aufnehmen, die offenbar nicht aus dem Wärmevorrathe der Gasmasse stammen kann, da dieser am Ende des Processes noch gerade so gross war wie zu Anfang. Diese Wärmemenge muss also auch von dem Körper A stammen, dessen Temperatur t_0 höher als t_1 war.

So sind wir denn auf den „zweiten Grundsatz“ der mechanischen Wärmelehre geführt worden, der von Clausius zuerst ausgesprochen und begründet worden ist. Wir können ihn allgemein zunächst so ausdrücken: Wenn bei einem Kreisprocesse ein gewisses Quantum Wärme in Arbeit verwandelt worden ist, so muss nothwendig gleichzeitig ein gewisses anderes Quantum von Wärme von einem wärmeren auf einen kälteren Körper übertragen sein. Das zweite Wärmequantum kann jede beliebige Grösse haben, die einen gewissen im gegebenen Falle angebbaren Werth übersteigt. Dieses Minimum von Wärme, was mindestens von einem wärmeren Körper auf einen kälteren übergehen muss, wenn ein gegebenes Wärmequantum durch einen Kreisprocess in Arbeit verwandelt werden soll, hängt von verschiedenen Umständen ab, erstens von der in Arbeit zu verwandelnden Wärmemenge selbst, zweitens von der Temperatur, bei welcher diese Verwandlung geschieht, drittens von den Temperaturen der Hülfskörper, zwischen welchen der Wärmeübergang geschieht. Den allgemeinen Charakter der fraglichen Abhängigkeit können wir so ausdrücken: Es muss um so mehr Wärme mindestens aus einem wärmeren Körper A zu einem kälteren Körper B übergehen, erstens je mehr Wärme in Arbeit verwandelt werden soll, zweitens bei je niedrigerer Temperatur diese Verwandlung geschieht, drittens je niedriger die Temperatur von A und je höher die Temperatur von B ist.

Eine einfache mathematische Formel fasst diese drei Sätze zusammen und giebt auch noch den Zusammenhang der in Rede stehenden Grössen bestimmt quantitativ an. Diese Formel ist:

$$Q\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)=\frac{Q'}{T'},$$

wo Q die Wärmemenge bedeutet, welche mindestens vom wärmeren Körper A, dessen absolute Temperatur T_1 ist, auf den kälteren Körper B von der absoluten Temperatur T_2 übertragen werden muss, wenn die Wärmemenge Q' bei der absoluten Temperatur T' in Arbeit verwandelt werden soll. Unter absoluter Temperatur ist bekanntlich zu verstehen die Temperatur, gerechnet vom absoluten Nullpunkt, der bei -271^0 der 100theiligen Scala liegt.

Es versteht sich ganz von selbst, dass eben nur das Minimum der Wärme, das mindestens von A nach B übergehen muss, eine bestimmte Grösse sein kann; denn bei dem allgemeinen Bestreben der Wärme, ganz von selbst von wärmeren auf kältere Körper überzugehen, kann bei jedem Processe noch nebenher ein ganz beliebiges Quantum von Wärme diesen Weg gehen, ohne zur Erzeugung der Arbeit beizutragen. In allen wirklich ausführbaren Processen greift dieser nutzlose Wärmeübergang stets unvermeidlich Platz. So geht bei einer Dampfmaschine stets viel mehr Wärme vom Herd auf kältere Körper über, als an und für sich nothwendig wäre, um die Erzeugung der geleisteten Arbeit aus Wärme zu ermöglichen.

Wenn in einem Kreisprocesse wirklich nur das absolut nothwendige Minimum des Wärmeüberganges stattfinden soll, dann muss er so eingerichtet sein, wie wir oben fingirten. Es muss namentlich das Wärmereservoir, welches die Wärme an den sich ausdehnenden Körper liefert, und das Wärmereservoir, welches die bei der Zusammendrückung jenes Körpers entstehende Wärme aufnimmt, genau die jeweilige Temperatur dieses Körpers selbst haben. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist der Kreisprocess „umkehrbar". In der That hätten wir den ganzen oben beschriebenen Process auch in entgegengesetzter Richtung durchmachen können. Wir hätten nämlich alsdann die Gasmasse zuerst ohne Wärmezufuhr sich ausdehnen lassen müssen, bis sie zur Temperatur t_1 abgekühlt gewesen wäre, hierauf in Berührung mit B sich weiter ausdehnen lassen. Hierauf hätten wir sie ohne Wärmeentziehung zusammendrücken müssen, bis sie auf die Temperatur t_0 gekommen wäre, und dann in Berührung mit dem Körper A zum ursprünglichen Volum zusammendrücken. Hätten wir den Process so gemacht, so hätte die Zusammendrückung des Gases mehr Arbeit gekostet, als seine Ausdehnung leistete. Es wäre demnach jetzt im Ganzen äussere Arbeit verbraucht worden. Andererseits hätte aber der Körper B Wärme abgegeben, der Körper A Wärme aufgenommen. Es wäre also bei diesem Processe Wärme von einem kälteren Körper (B) zu einem wärmeren (A) übergegangen.

Dies ist die Kehrseite des oben aufgestellten zweiten Grundsatzes der mechanischen Wärmelehre. Man kann den Satz so formuliren: Wenn

Wärme von einem kälteren auf einen wärmeren Körper übertragen werden soll, so muss eine gewisse Arbeit aufgewandt werden; und es lässt sich auch ganz bestimmt angeben, wie gross diese mindestens sein muss, um eine gegebene Wärmemenge von einem Körper, dessen Temperatur gegeben ist, auf einen anderen, dessen höhere Temperatur ebenfalls gegeben ist, überzuführen. Oder es lässt sich angeben, wie viel Wärme höchstens vom kälteren auf den wärmeren Körper durch eine gegebene Arbeit gebracht werden kann. Dass bei dem Processe weniger Wärme als dies Maximum vom kälteren zum wärmeren Körper übergehen könne, versteht sich wiederum von selbst, da ja von der durch Arbeit übergeführten Wärme ein Theil wieder auf den kälteren Körper von selbst zurückgegangen sein kann.

Die vorstehenden Folgerungen können auch noch von einem anderen Gesichtspunkte aus gezogen werden, der mehr auf das innere Wesen des Herganges gerichtet ist. Wir können vor Allem einen Grundsatz hervorheben, der an sich einleuchtend und auch oben schon eigentlich stillschweigend vorausgesetzt ist: die Kraft, mit welcher die Wärme einen der Ausdehnung des warmen Körpers entgegenstehenden Widerstand zu überwinden strebt, ist um so grösser, je höher die Temperatur des Körpers ist, der Widerstand mag bestehen in dem von aussen wirkenden Drucke fremder Körper oder in der Anziehung der Theilchen des warmen Körpers zu einander oder in beiden zugleich. Erfolgt daher ein bestimmtes Maass von Ausdehnung bei höherer Temperatur, so kann dabei mehr Arbeit geleistet werden, als wenn dasselbe Maass von Ausdehnung bei niederer Temperatur erfolgt. Ebenso wird zu einer bestimmten Zusammendrückung bei höherer Temperatur mehr Arbeit erfordert als bei niederer.

Hieraus geht hervor, wenn ein Kreisprocess äussere Arbeit zur Folge haben soll, muss er nothwendig so eingerichtet sein, dass die Ausdehnungen bei höherer Temperatur stattfinden als die Zusammendrückungen, denn nur so ist es möglich, dass die (bei den Ausdehnungen) geleistete Arbeit grösser ist als die (zu den Zusammendrückungen) verbrauchte, da ja das Maass der sämmtlichen Ausdehnungen dem der sämmtlichen Zusammendrückungen bei einem Kreisprocesse gleich sein muss. Es ist fernerhin ohne Weiteres klar, dass mindestens eine der schliesslich geleisteten äusseren Arbeit äquivalente Wärmemenge dem Körper während der Ausdehnungen von aussen her zugeführt sein muss. Es ist aber auch klar, dass der Körper bei den Zusammendrückungen nothwendig Wärme nach aussen abgeben muss, denn wäre dies nicht der Fall, so müsste in jedem Augenblicke der Zusammendrückungen die Temperatur des Körpers mindestens ebenso hoch sein als in einem entsprechenden Augenblicke der Dehnungen, was der Voraussetzung widerspricht. Es folgt daher, dass der Körper während der Dehnungen mehr Wärme aufgenommen haben muss, als jene der schliesslich geleisteten äusseren Arbeit äquivalente Menge, denn sonst enthielte ja der Körper schliesslich weni-

ger Wärme als anfangs, was der Voraussetzung eines Kreisprocesses widersprechen würde. Es muss also während eines Kreisprocesses, der Arbeit zur Folge hat, nothwendig ein gewisses Quantum von Wärme von dem die Arbeit vermittelnden Körper während der Ausdehnungen von aussen aufgenommen und während der Zusammendrückungen nach aussen abgegeben sein.

Wir fügen nun als zweiten Grundsatz den hinzu: Wärme kann überhaupt nur aus einem wärmeren Körper in einen kälteren übergehen. In der That, wie sollten auch die Molekularbewegungen eines Aggregates beschleunigt werden durch Bewegungsaustausch mit einem anderen Aggregate, dessen Molekularbewegungen selbst keine grössere Geschwindigkeit besässen. Solcher Bewegungsaustausch ist aber das, was man Wärmeleitung nennt. Sie kann also nur stattfinden von einem Körper höherer Temperatur (mit schnelleren Molekularbewegungen) zu einem Körper niederer Temperatur (mit langsameren Molekularbewegungen). Dahingegen ist es selbstverständlich, dass die Molekularbewegungen in einem Körper jederzeit beschleunigt werden könen durch Aufwand mechanischer Arbeit, sie mögen schon an sich noch so schnell sein, d. h. es kann bei jeder beliebigen Temperatur Arbeit in Wärme verwandelt werden.

Der soeben entwickelte Grundsatz ergiebt für unseren Kreisprocess die Folgerung: die während der Ausdehnungen von aussen her aufzunehmende Wärme muss von einem Körper (A) geliefert werden, dessen Temperatur mindestens so hoch ist, als die Temperatur des die Arbeit vermittelnden Körpers während seiner Ausdehnungen ist; und die während der Zusammendrückungen nach aussen abzugebende Wärme kann nur abgegeben werden an einen Körper (B), dessen Temperatur höchstens so hoch sein darf, als die Temperatur des vermittelnden Körpers zur Zeit seiner Zusammendrückungen. Da nun diese letztere Temperatur niedriger ist, als jene bei den Ausdehnungen, so muss die Temperatur des Körpers A, der die Wärme liefert, nothwendig höher sein, als die Temperatur des Körpers B, der die Wärme aufnimmt, d. h. es muss bei einem Kreisprocesse, der äussere Arbeit zur Folge hat, Wärme aus einem Körper (A) höherer Temperatur zu einem Körper (B) niederer Temperatur übergehen.

Wenn man den Process in umgekehrter Richtung vor sich gehen lässt, so giebt umgekehrt — wie man leicht sieht — der kältere Körper Wärme her und der wärmere Körper A nimmt Wärme auf. Es wird aber alsdann zu den Zusammendrückungen des vermittelnden Körpers, weil sie jetzt bei höheren Temperaturen erfolgen, mehr äussere Arbeit verbraucht, als bei den Ausdehnungen geleistet wird. Das Endresultat des ganzen Kreisprocesses ist also ein Verbrauch von äusserer Arbeit. Man überzeugt sich demnach auch so wieder ganz allgemein, dass durch Verwendung äusserer Arbeit, d. h. durch Verwandlung von äusserer Arbeit in Wärme bei einem Kreisprocesse eine gewisse Wärmemenge von

einem kälteren Körper auf einen wärmeren übergeführt werden kann. Dies ist kein Widerspruch gegen unseren Grundsatz, dass keine Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen könne, denn der Uebergang ist in unserem gegenwärtigen Falle kein directer. Genauer gesprochen wird ja die Wärme, welche auf den wärmeren Körper übergeht, erst in dem Augenblicke des Ueberganges durch Arbeit erzeugt.

Für diejenigen Leser, welchen die mathematische Zeichensprache geläufig ist, will ich die vorstehend nur ungefähr angedeuteten Sätze in strengerer Form entwickeln. Ich werde mich dabei wesentlich an den von Clausius in seinen berühmten Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie eingehaltenen Gedankengang anschliessen. Ich werde jedoch einen Satz, den Clausius als Folgerung aus seinen Betrachtungen erscheinen lässt, als Voraussetzung gebrauchen. Dieser Satz lautet dahin, dass die wahre specifische Wärme eines Körpers eine von seiner Temperatur und seinem Aggregatzustande unabhängige Constante ist, und zwar wäre der Werth dieser Constanten gleich der specifischen Wärme des Körpers im vollkommenen Gaszustande bei constantem Volum. Erschiene die specifische Wärme des Körpers in anderen Zuständen grösser, so hätte man sich vorzustellen, dass ein Theil der Wärme, die ihm bei einer gegebenen Temperaturerhöhung zugeführt werden muss, zu „innerer" Arbeit verwandt sei. Allerdings ist es misslich, einen solchen Satz, der den bisher in der Physik geläufigen Vorstellungen schnurstracks widerspricht, einer grundlegenden Betrachtung zur Voraussetzung zu geben. Da dieselbe aber dadurch an Einfachheit und Uebersichtlichkeit ausserordentlich gewinnt, so dürfte sie doch vielleicht manchem Leser willkommen sein. Ueberdies ist die ganze Deduction wenigstens für den Fall vollkommener Gase ganz streng. Wenn das Axiom zulässig ist, dass die bewegende Kraft der Wärme der absoluten Temperatur proportional ist, dann muss es für jeden Körper eine gewisse Function seines Volums geben, deren Differential für eine unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers, multiplicirt mit der dabei statthabenden absoluten Temperatur und einem constanten Factor, die bei dieser unendlich kleinen Zustandsänderung geleistete (äussere und innere) Arbeit darstellt. Ein negatives Vorzeichen entspricht natürlich einer verbrauchten Arbeit. Wir wollen diese Function die „Disgregation" nennen und mit Z bezeichnen. Man bemerkt, dass das Differential der Disgregation etwas Analoges ist wie die unendlich kleine Wegstrecke, längs welcher eine Kraft wirkt; denn nach unserem Axiom ist ja die absolute Temperatur, multiplicirt mit dem constanten Factor, die hier in Betracht kommende Kraft. Für den Fall eines permanenten Gases ist die Function Z leicht darstellbar. Hier wird bei einer Zustandsänderung lediglich äussere Arbeit geleistet, welche $= p\,dv$ ist, wo p den äusseren Druck bedeutet; man hat also $kT.dZ = p\,dv$, wenn wir die absolute Temperatur mit T bezeichnen. Nun ist aber bekanntlich $p = R\frac{T}{v}$, wo R eine gewisse Constante bezeichnet, und man hat also $k\,dZ. = R\frac{dv}{v}$, d. h. $Z = Const.\ log\,v$.

Es muss also für ein beliebiges unendlich kleines Stadium einer Zustandsänderung irgend eines Körpers die Gleichung gelten $kT.dZ = dL$, wenn wir mit dL die in diesem Stadium geleistete unendlich kleine Arbeit bezeichnen. dL können wir aber ausdrücken durch die Wärmemenge dQ, welche bei dieser Zustandsänderung verschwindet; wir brauchen sie bloss mit dem mechanischen Aequivalent der Wärme, das mit a bezeichnet sein mag, zu multipliciren. Es ist daher $kT\,dZ = a\,dQ$ oder $\frac{k}{a}\,dZ = \frac{dQ}{T}$. Nach den gemachten Annahmen

ist jede in Arbeit verwandelte Wärmemenge positiv, jede aus Arbeit entstandene Wärmemenge negativ zu rechnen. Es handle sich nun um einen Kreisprocess, dann ist offenbar die Summe aller dZ der Null gleich, d. h. $\int dZ = 0$, wenn die Integration über den ganzen Verlauf des Kreisprocesses ausgedehnt wird, mithin ist ebenso $\int \frac{dQ}{T} = 0$.

Nun sei der Kreisprocess ein umkehrbarer. Er muss alsdann aus abwechselnd auf einander folgenden (endlichen oder unendlich kleinen) Stadien von zweierlei Arten bestehen. In einem Stadium der einen Art ändert der Körper seine Temperatur nicht, indem ihm jedes in Arbeit verwandelte Wärmedifferential sofort aus einer unerschöpflichen Wärmequelle von gleicher Temperatur ersetzt (resp. entzogen) wird. In einem Stadium der zweiten Art bestreitet der Körper den Verlust an Wärme, die in Arbeit verwandelt wird, lediglich aus seinem eigenen Vorrath. In einem solchen Stadium ist also $T = cQ$, wo c eine Constante, Q die gesammte im Körper enthaltene Wärmemenge ist. Für ein einzelnes solches Stadium ist also

$$\int_{Q_n}^{Q_{n+1}} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{c} \cdot \int_{Q_n}^{Q_{n+1}} \frac{dQ}{Q} = \log Q_{n+1} - \log Q_n.$$

Im Anfange des nächstfolgenden Stadiums dieser zweiten Art ist aber offenbar $Q = Q_{n+1}$, denn das zwischenliegende Stadium der ersten Art ändert nichts an T und mithin an Q. Das über das fragliche Stadium ausgedehnte Integral ist also $\log Q_{n+2} - \log Q_{n+1}$. Man sieht leicht, dass die Summe aller Integrale, welche sich auf Stadien der zweiten Art beziehen, sein muss:

$$-\log Q_n + \log Q_{n+1} - \log Q_{n+1} + \log Q_{n+2} \ldots . - \log Q_{n+m-1} + \log Q_{n+m},$$

wenn im Ganzen m solcher Stadien vorkommen. Es folgt aber aus dem Begriffe des Kreisprocesses, dass alsdann $Q_{n+m} = Q_n$ ist, und folglich ist die Summe dieser Integrale $= 0$. Es muss demnach die Summe aller der Integrale, welche sich auf Stadien der ersten Art beziehen, ebenfalls für sich gleich Null sein. Während dieser Stadien wird aber alle in Arbeit verwandelte Wärme von aussen aufgenommen (resp. alle aus Arbeit entstandene Wärme nach aussen abgegeben), und es wird andererseits nur während dieser Stadien der ersten Art Wärme von aussen aufgenommen. Die Wärmedifferentiale, sofern sie sich auf diese Stadien beziehen, können wir daher geradezu ansehen als die Differentiale der mit anderen Körpern ausgetauschten Wärme, und zwar bedeutet das + Zeichen eine Wärmeaufnahme, das — Zeichen Wärmeabgabe. Es gilt demnach für jeden umkehrbaren Kreisprocess die Gleichung $\int \frac{dQ}{T} = 0$, wenn unter dQ die unendlich kleine Wärmemenge verstanden wird, welche in einem Element des Processes bei der Temperatur T aufgenommen (resp. abgegeben) wird. Diese Gleichung ist aber der Clausius'sche Satz.

Beachten wir, dass während eines Stadiums der ersten Art die Temperatur constant bleibt, so ergiebt sich, dass die Gleichung $\int \frac{dQ}{T} = 0$, unbeschadet der Allgemeinheit, auch so geschrieben werden kann: $\sum_{n=1}^{n=m} \left(\frac{Q_n}{T_n}\right)$, wenn unter Q_n die während des $n$ten Stadiums der ersten Art aufgenommene Wärme bedeutet und T_n die während dieses Stadiums herrschende absolute Temperatur, und wenn m Stadien der ersten Art im Processe vorkommen. Mit dieser Gleichung muss zugleich noch die bestehen:

$$\sum_{n=1}^{n=m} (Q_n) = \frac{L}{a},$$

wo L die im ganzen Kreisprocesse gelieferte Arbeit bedeutet und a das mechanische Aequivalent der Wärme (= 425 kgm). Einzelne Fälle lassen sich jetzt leicht übersehen. In dem S. 204 behandelten Falle kommen z. B. zwei Stadien der ersten Art vor, sei nun T_0 die absolute Temperatur des Körpers A und Q_0 die von ihm auf die Gasmenge übertragene Wärme, sei ferner T_1 die absolute Temperatur des Körpers B, und Q_1 die an ihn von der Gasmenge übergegangene Wärme. Mit Berücksichtigung der getroffenen Verabredung über die Zeichen hätten wir also zu setzen

$$\frac{Q_0}{T_0} - \frac{Q_1}{T_1} = 0 \text{ oder } Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) = \frac{Q_0 - Q_1}{T_0};$$

$Q_0 - Q_1$ ist aber in der That die bei der Temperatur T_0 bleibend in Arbeit verwandelte Wärmemenge, so dass sich die Seite 207 gegebene Gleichung bestätigt.

Das Princip der Aequivalenz von Wärme und Arbeit kann auch in solchen Fällen angewandt werden, wo andere bewegende Agentien als nur eben freie Wärme und mechanische Druckkräfte im Spiele sind, insofern die Wärmeeinheit einmal als bequemstes Maass aller Energievorräthe (potentieller und kinetischer) eingeführt ist. Ein für die Physiologie besonders interessanter Fall derart ist die galvanische Kette, sei es für sich, sei es in Verbindung mit elektromagnetischen Bewegungsmaschinen. Dieser Fall ist von Favre und Silbermann auch zur experimentellen Bestätigung des Princips der Erhaltung der Kraft angewandt worden.

Eine Gewichtseinheit Zink in verdünnter Schwefelsäure lösen, heisst den Vorrath von potentieller Energie um ein gewisses Quantum vermindern. Es muss also bei diesem Processe ein entsprechendes Quantum lebendiger Kraft (Wärme) erzeugt werden, resp. an einer anderen Stelle des Raumes ein entsprechender Vorrath potentieller Energie angehäuft werden. Nimmt man die Lösung des Zinks ohne Weiteres in einem Gefässe vor, so wird die dem verbrauchten Spannkraftsvorrath äquivalente Wärmemenge ganz an Ort und Stelle frei.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn wir das Zink während seiner Auflösung die Rolle des positiven Metalles in einer galvanischen Kette spielen lassen. Es sei eine Daniell'sche Kette. Dann kommt erstens noch ein neuer chemischer Process hinzu, nämlich es wird eine der gelösten Zinkmenge äquivalente Kupfermenge niedergeschlagen. Wir können aber leicht, wenn die Verbrennungswärme der beiden Metalle u. s. w. bekannt ist, berechnen, welches Wärmequantum dem zusammengesetzten Processe entspricht. Wir wissen nun, dass in einer geschlossenen galvanischen Kette in der gesammten Strombahn überall Wärme frei wird, diese ganze Wärme muss offenbar der verlorenen chemischen Energie entsprechen. Jetzt kann also nicht die gesammte Wärme an Ort und Stelle, wo die chemischen Processe stattfinden, frei werden, sondern ein Theil davon wird im Schliessungsdrahte frei. Das Verhältniss beider

Theile kann willkürlich abgeändert werden, da die im Leitungsdrahte entstehende Wärme ceteris paribus dem Widerstande in demselben proportional ist. Wenn daher viel Widerstand im Leitungsdrahte ist, so muss ein grosser Bruchtheil der gesammten Wärme in demselben frei werden und dafür weniger an Ort und Stelle der chemischen Processe. Ist dagegen der Widerstand im Schliessungsdraht nur klein, so wird verhältnissmässig wenig Wärme in ihm frei und viel in den Zellen der Kette. Diese Folgerung der Theorie ist genau quantitativ durch Versuche bestätigt.

Schaltet man in den Schliessungsbogen der Kette Wasser zwischen Platinelektroden ein, so wird es zersetzt, d. h. ein Vorrath potentieller Energie aufgehäuft. Nach dem Principe der Erhaltung der Kraft kann alsdann überhaupt nicht eine dem Zinkverbrauch entsprechende Wärmemenge im ganzen Apparate frei werden, sondern es muss so viel davon in Ausfall kommen, als sich durch Verbrennung des freigewordenen Wasserstoffs wieder erzeugen liesse. Auch diese Folgerung ist experimentell genau bestätigt.

Endlich können wir auch den Strom unserer galvanischen Kette durch elektromagnetische Vorrichtungen senden, welche im Stande sind, mechanische Arbeit zu verrichten, d. h. Gewichte zu heben oder dergleichen. Drücken wir hier die bei einem gewissen Zinkverbrauch geleistete Arbeit in der äquivalenten Wärmemenge aus und addiren sie zu der gesammten im Apparate als solche frei werdenden Wärmemenge, so muss genau die Wärmemenge herauskommen, welche an Ort und Stelle entstehen würde, wenn wir die in der galvanischen Kette vorgegangenen chemischen Processe ohne Stromerzeugung vorgehen liessen. Mit anderen Worten, wenn unter Vermittelung eines galvanischen Stromes Arbeit geleistet wird, so wird in dem Apparate nicht ganz so viel Wärme frei, als den chemischen Processen in der galvanischen Kette entspricht, sondern so viel weniger, als das Aequivalent der geleisteten Arbeit beträgt. Man könnte demnach einen Versuch dieser Art wiederum benutzen, um das mechanische Aequivalent der Wärme zu bestimmen. Man braucht nur den Zinkverbrauch in der Kette zu ermitteln, daraus die entsprechende Verbrennungswärme zu berechnen; ferner die gesammte frei werdende Wärme calorimetrisch zu bestimmen. Sie findet sich kleiner als die berechnete Verbrennungswärme. Die Differenz muss der in der betrachteten Zeit gethanen Arbeit äquivalent sein. Dividirt man also die Zahl von Kilogrammetern, welche die geleistete Arbeit beträgt, durch die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche die gefundene Differenz beträgt, so hat man eine neue Bestimmung des mechanischen Aequivalents der Wärmeeinheit. Solche Bestimmungen sind in der That ausgeführt und sie ergeben Zahlen, die nur sehr wenig von den anderen Bestimmungen des mechanischen Aequivalents der Wärmeeinheit abweichen.

Drittes Capitel.

Physikalische Principien der thierischen Wärmeökonomie.

Die Wärmeökonomie des thierischen Körpers ist offenbar eines der wichtigsten und interessantesten Probleme der Physiologie. Das theoretische Interesse liegt hauptsächlich in der Frage, ob der thierische Körper wie die unorganische Natur dem Gesetze der Erhaltung der Kraft unterworfen ist, d. h. in besonderer Anwendung, ob die chemischen Processe im thierischen Körper gerade so viel Wärme erzeugen, wie sie ausserhalb desselben vorgenommen erzeugen würden. Es könnte scheinen, als wäre diese Frage experimenteller Entscheidung gar nicht zugänglich, weil wir nicht im Stande sind, ausserhalb des thierischen Körpers genau dieselben chemischen Processe vorgehen zu lassen, welche sich in ihm ereignen. Das hindert uns aber keineswegs, da es für die Wärmebildung (wie S. 199 u. flgd. gezeigt ist) durchaus nicht auf den Hergang während des Processes, sondern nur auf die Endproducte ankommt. Wir haben sogar oben schon absichtlich das Beispiel des Eiweisses gewählt, um das Princip klar zu machen, und es ergab sich, dass die Wärmemenge, welche ein Gramm Eiweiss bei vollständiger Verbrennung liefert, vermindert um die Wärmemenge, welche bei vollständiger Verbrennung der halbverbrannt aus dem Thierkörper ausscheidenden Reste jenes Grammes Eiweiss entsteht, diejenige Wärmemenge darstellt, welche durch Zersetzung jenes Grammes Eiweiss im Thierkörper frei werden muss unter Voraussetzung der Gültigkeit des Princips der Erhaltung der Kraft, d. h. unter der Voraussetzung, dass im Thierkörper die Beschaffenheit jedes Atomes unverändert bleibt. Wir können jene Betrachtung verallgemeinern und sagen: Denken wir uns einen Thierkörper während einer gewissen Zeit lebend und so, dass er selbst zu Ende genau in demselben Zustande ist, wie zu Anfang, dann muss er — unter Voraussetzung des Princips der Erhaltung der Energie — ein Quantum von lebendiger Kraft (kinetische Energie) erzeugen, welches einfach zu berechnen ist, indem man von der vollständigen Verbrennungswärme der während der betrachteten Zeit eingeführten Ingesta (Nahrungsmittel) die Wärme abzieht, welche noch entstehen kann durch vollständige Verbrennung der während jener Zeit gelieferten Egesta. Diesen Satz experimentell zu bestätigen ist noch nicht gelungen. Um überhaupt darauf ausgehen zu können, muss man sich vor Allem eben in der Wärmeökonomie des Thierkörpers genau zurechtfinden.

Die Fragen der thierischen Wärmeökonomie haben aber auch die grösste Wichtigkeit für die praktische Anwendung der Physiologie auf Medicin. In der That kann es nicht fehlen, dass die Wärmeökonomie

des Körpers, die ja in alle Processe eingreift, bei Krankheiten mehr oder weniger bedeutende Modificationen erleidet. Die Temperatur des gesammten Körpers sowie seiner einzelnen Theile ist daher in neuerer Zeit namentlich ein Gegenstand besonderer Aufmerksamkeit der Aerzte geworden. Die Bedeutung dieser Temperaturen kann aber nicht richtig gewürdigt werden ohne die genaueste Kenntniss von den physikalischen Principien der thierischen Wärmeökonomie.

Auf dem durch das vorige Capitel gewonnenen Standpunkte erweitert sich uns die Wärmeökonomie sofort zu einer allgemeinen Kraftökonomie, denn sichtlich liefert der thierische Körper lebendige Kraft nicht ausschliesslich in Form von Wärme, sondern oft auch in Form von mechanischer Arbeit.

Um die hier aufzuwerfenden Fragen möglichst klar und in ihrem Zusammenhange zu übersehen, dürfte es kein besseres Mittel geben, als wenn wir die Kraftökonomie eines einfacheren Apparates im Einzelnen betrachten, der darin mit dem Thierkörper analog ist, dass er in gleichmässig fortlaufendem Processe fortwährend aus chemischer Spannkraft (potentieller Energie) durch Verbrennung Wärme und mechanische Arbeit erzeugt. Es liegen zwei Beispiele derart nahe, zwischen denen wir die Wahl haben, erstens eine arbeitende elektromagnetische Maschine und zweitens eine Dampfmaschine. Die erstere Vorrichtung hat vielleicht grössere innere Aehnlichkeit mit den thierischen Muskeln bezüglich der Art und Weise der mechanischen Arbeitsleistung. In der That wird dieselbe im Muskel möglicherweise auch geradezu durch elektrische Kräfte vermittelt. Wir wollen aber gleichwohl das Beispiel der Dampfmaschine wählen, weil hier die Aehnlichkeit mit dem thierischen Haushalte in der ganzen Anordnung der Processe eine höchst augenfällige ist und fast jeder einzelne für die Wärmeökonomie des Thieres wichtige Vorgang sein Entsprechendes in der Dampfmaschine findet. Ueberdies ist die Dampfmaschine eine Jedermann aus täglicher Anschauung geläufige Vorstellung.

Stellen wir uns also jetzt ein Haus vor, in welchem sich eine Dampfmaschine befindet. Um einen Fall leicht messbarer mechanischer Arbeit vor uns zu haben, soll die Dampfmaschine Wasser aus einem Schachte pumpen. Man braucht alsdann nur die in der Zeiteinheit gepumpte Wassermenge in Kilogrammen ausgedrückt zu multipliciren mit der in Metern ausgedrückten Tiefe des Schachtes, um die während der Zeiteinheit geleistete Arbeit in Kilogrammetern ausgedrückt zu erhalten.

Das ganze Haus mit der Dampfmaschine darin soll uns den Thierleib repräsentiren. Betrachten wir einen längeren Zeitraum — etwa ein Jahr —, an dessen Ende das Haus genau in demselben Zustande wie am Anfang ist. — Diese Voraussetzung schliesst schon ein, dass während der Zeit genau eben so viel Stoff im Ganzen aus dem Hause hinausgeschafft als hineingekommen ist. Fragen wir nun im Einzelnen, was ist hinein- und was ist herausgekommen? Hineingekommen ist atmosphärische Luft, Wasser, Holz (wenn solches zur Heizung verwandt wird), Fette zum

Schmieren und Eisen, resp. andere Metalle zur Reparatur abgenutzter Maschinentheile. Ausgegeben ist atmosphärische Luft, Wasserdampf, Kohlensäure, andere Gase (Producte unvollständiger Holzverbrennung), flüssiges Wasser, unverbrannte oder halbverbrannte Reste des Holzes nebst Asche in fester Form, endlich die Erzeugnisse der Abnutzung von den Maschinentheilen[1]) und ihrer Schmiere, hauptsächlich in Metalloxyden und Oxydationsproducten der Fette bestehend. Die gesammten Ausgaben müssen nun den gesammten Einnahmen genau gleich sein, aber offenbar sind in den ersteren die Stoffe anders gruppirt als in den letzteren. Der Sauerstoff vor Allem dringt als freier Gemengtheil der atmosphärischen Luft durch Thür-, Fenster- und andere Oeffnungen in das Gebäude ein, aber nur ein Theil davon geht als solcher (meist durch den Kamin) wieder davon. Ein Theil des ins Gebäude frei eingetretenen Sauerstoffs verbindet sich im Innern desselben mit anderen Stoffen und geht als Bestandtheil chemischer Verbindungen wieder hinaus. Die massenhafteste auf diese Weise entstehende Verbindung des Sauerstoffs ist wohl meist Kohlensäure, zu welcher das im Feuerraum der Maschine und auf etwa sonst noch im Gebäude vorhandenen Herden verbrennende Holz den Kohlenstoff liefert. Eine zweite Verbindung, in welche von jenem Sauerstoff vielleicht ein Theil eingeht, ist Wasser, sofern in den als Brennmaterial dienenden Verbindungen nicht schon Wasserstoff und Sauerstoff in äquivalenter Menge vorhanden sind. Dann können sich auf den Feuerstätten unseres Gebäudes auch noch andere Producte unvollständiger Verbrennung auf Kosten des frei eingetretenen Sauerstoffs bilden. Endlich aber gelangt ein Theil des frei eingetretenen Sauerstoffs zu den Maschinentheilen und ihrer Schmiere und oxydirt die Metalle und Fette. So haben wir, die Schicksale des Sauersfoffs verfolgend, schon die wesentlichen chemischen Umgruppirungen der Atome kennen gelernt, welche in dem Gebäude stattfinden und aus den Ingestis die Egesta machen. Der freie Stickstoff der Atmosphäre und das Wasser erleiden beim Durchpassiren durch unser Gebäude keine chemische Aenderung.

Die chemischen Processe, welche wir in dem Maschinenhause vorgehen sahen, sind so beschaffen, dass ihr Gesammtergebniss eine Verminderung des Vorraths an potentieller chemischer Energie darstellt, dass also lebendige Kraft (als Wärme im Allgemeinen angebbar) dabei frei werden muss. Der bestimmte Betrag dieser lebendigen Kraft könnte ganz direct experimentell gefunden werden, wenn man eine der im Maschinenhause verbrannten gleichen Menge Holz, Metall, Fett im Calorimeter zu denselben Endproducten verbrennen liesse. Man könnte aber diese Wärmemenge nach den weiter oben aufgestellten Prin-

[1]) Bei einer Stoff- und Kraftbilanz der Dampfmaschine vom technischen Gesichtspunkte würde man vielleicht diesen Posten aus der Rechnung lassen. Ich nehme ihn aber wegen einer höchst lehrreichen Analogie mit dem Muskelsystem absichtlich auf.

cipien auch indirect bestimmen, indem man zuerst bestimmte, wie viel Wärme die vollständige Verbrennung aller brennbaren Ingesta zu möglichst hoch oxydirten Endproducten liefert und von dieser Wärmemenge diejenige abzöge, welche man erhielte, wenn man die unvollständig verbrannten Egesta des Maschinenhauses — den Rauch, die halbverbrannten Holzabfälle, die theilweise oxydirten Metallabfälle etc. — noch vollständig verbrennt. Beide Bestimmungsweisen würden ohne Zweifel genau zu demselben Werthe führen. Der so gefundene Betrag von lebendiger Kraft muss nun während der Beobachtungszeit von dem Maschinenhause ganz nach aussen abgegeben werden, da ja der Voraussetzung nach das Haus und die Maschine selbst am Ende jener Zeit auch hinsichtlich der Temperatur und Bewegung genau in demselben Zustande sein sollen wie zu Anfang.

Die Uebertragung lebendiger Kraft von dem Maschinenhause nach aussen geschieht nun auf sehr verschiedenen Wegen und in sehr verschiedenen Formen. 1. Es wird fortwährend von der gesammten Oberfläche des Hauses freie Wärme als solche an die Umgebung, die Luft und den Erdboden, durch Strahlung und Leitung abgegeben; 2. sind die festen und flüssigen Egesta regelmässig wärmer als die Ingesta, mit ihnen verlässt also ein Theil der innerhalb erzeugten Wärme das Haus; 3. nimmt der Strom der unverbrauchten Luft eine gewisse Wärmemenge aus dem Hause mit, denn die Luft entweicht aus dem Schornstein mit sehr hoher Temperatur, und auch aus anderen Oeffnungen austretende Luft ist wohl meist wärmer als die eintretende Luft; auch die durch die Verbrennung entstehenden Gase und der Rauch entweichen mit höherer Temperatur als mit welcher die Ingesta eingeführt wurden; 4. verlässt ein Theil der gebildeten Wärme das Haus als sogenannte latente Wärme, denn eine gewisse Menge Wasser, die in flüssiger Form eingeführt wurde, entweicht als Dampf, und man weiss, dass die Verwandlung des Wassers in Dampf, ganz abgesehen von etwaiger Temperaturerhöhung, Wärme kostet. Beiläufig bemerkt, braucht die latente Wärme der gasförmigen Kohlensäure nicht in Rechnung gebracht zu werden, da sie eigentlich schon in der Verbrennungswärme der Kohlensäure in Abzug gebracht ist; 5. endlich wird ein Theil der im Hause entwickelten lebendigen Kraft auf ausserhalb geleistete Arbeit verwandt, indem wir annahmen, die Dampfmaschine hebe Wasser aus einem Schacht. Diesen Posten können wir leicht zu den übrigen gleichartigen summirbar machen, indem wir die zunächst in Meterkilogrammen gemessene Arbeitsgrösse durch Division mit dem mechanischen Aequivalente der Wärme (= 425 Meterkilogramm) in Wärmeeinheiten ausdrücken. Es ist gut zu bemerken, dass dieser fünfte Posten in manchen Fällen gar nicht in Rechnung gebracht zu werden brauchte. Hätten wir eine Spinnerei als Beispiel gewählt, so wäre durch die Maschine gar keine mechanische Wirkung ausserhalb des Hauses ausgeübt worden, vielmehr hätte die mechanische Leistung nur bestanden in Ueberwindung von Widerständen innerhalb des Hauses, der Wider-

stände nämlich, die sich der Drehung der Spindeln entgegensetzen. Dabei wird aber die in der Maschine zunächst in Arbeit verwandelte Wärme wieder vollständig in freie Wärme zurückverwandelt, welche dann unter den vier übrigen Posten erscheinen müsste.

Jeder dieser aufgezählten fünf Posten ist nun principiell messbar, wenn auch die Ausführung der Messung auf kaum zu überwindende Schwierigkeiten stossen sollte, und das Princip der Erhaltung der Kraft verlangt, dass die Summe gleich ist jener Wärmemenge, welche die im Hause während der Beobachtungszeit verlaufenden chemischen Processe erzeugen können.

Bis ins Einzelne analog gestaltet sich die Stoff- und Kraftbilanz des Thierkörpers. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass wir den Luftstrom, der durch Fenster und Thüren ins Maschinengebäude eintritt und es grösstentheils durch den Schornstein verlässt, mit dem Respirationsluftstrom des Thieres vergleichen; dieser freilich kommt und geht durch dieselbe Oeffnung und kann daher nicht stetig sein; dass wir ferner das ins Maschinenhaus hineingetragene Wasser, Holz, Reparaturmetall und Schmiere vergleichen mit Trank und Speise des Thieres, dass wir endlich das ausgegossene Wasser und die weggeworfenen Abfälle des Brennmaterials und der abgenutzten Maschinentheile vergleichen mit Harn, Schweiss und Koth des Thieres. Die Abgabe lebendiger Kraft vertheilt sich auch hier auf dieselben fünf Posten, wie in unserem Beispiel. 1. Giebt der Thierkörper durch Leitung und Strahlung freie Wärme an die Umgebung ab; 2. sind die festen und flüssigen Egesta (Koth und Harn) regelmässig wärmer als die Ingesta; 3. nimmt die Exspirationsluft, welche wie der Luftstrom aus dem Schornstein der Maschine die gasförmigen Verbrennungsproducte führt, mehr Wärme nach aussen mit, als die Inspirationsluft in den Körper mit hineinbrachte; 4. verlässt ein Theil des flüssig aufgenommenen Wassers den Thierleib in Gasform (durch Lungen und Haut); 5. endlich leistet der Thierleib vermöge seiner Muskeln mechanische Arbeit. Dies geschieht zwar immer und nothwendig mindestens von Seiten der Respirations- und Herzmuskulatur; gleichwohl aber braucht nicht nothwendig dieser fünfte Posten unter den Kraft*ausgaben* des Thierleibes vorzukommen. So z. B. wird gerade die Arbeit des Herzens und der Respirationsmuskulatur ganz verwandt zur Ueberwindung von Widerständen im Innern des Leibes (wie die Arbeit der Maschine in einer Spinnerei) und wird daher hier schon in Wärme zurückverwandelt. Diese lebendige Kraft erscheint also schon in einer oder mehreren der vier ersten Rubriken. Aber selbst Arbeit der Extremitätenmuskulatur kann wieder in Wärme zurückverwandelt werden. Wenn wir z. B. auf *wagerechtem* Wege gehen oder laufen, so wird die Arbeit der Beinmuskeln nur zur Ueberwindung von Widerständen, z. B. des Luftwiderstandes, verwandt und kommt also höchstens noch an der Körperoberfläche als Wärme zum Vorschein. Wenn wir dagegen eine wahre *äussere* Arbeit verrichten, z. B. eine Last (sei

es auch nur die Last des eigenen Körpers) vom Erdmittelpunkte entfernen, oder äusseren Körpern Geschwindigkeiten ertheilen durch Wurf oder dergleichen, dann kommt das entsprechende Quantum von lebendiger Kraft nicht als Wärme im oder am thierischen Körper zum Vorschein, und es muss daher ein eigener Posten in der Kraftausgabenrechnung aufgestellt werden. Da dieser Punkt, wie es scheint, Missverständnissen sehr ausgesetzt ist, so dürfte es nicht überflüssig sein, denselben hier noch durch andere Ausdrucksweise und durch Beispiele näher zu erläutern. Dass wirklich äussere Arbeit geleistet worden ist, bedeutet, dass die Zusammenziehungen der Muskeln Ursache sind von einer solchen Veränderung in der Zusammenstellung oder den Zuständen der äusseren Körperwelt, denen sich irgend eine Kraft widersetzt. Nur in einem solchen Falle wird die lebendige Kraft, welche der durch die vegetativen Processe verlorenen potentiellen Energie äquivalent ist, nicht ganz in Form von (freier und latenter) Wärme ausgegeben. Nur in einem solchen Falle muss daher unter den Kraftausgaben ein Posten mechanischer Arbeit auftreten. Bei der in Rede stehenden Betrachtung ist übrigens die Masse des eigenen Leibes von der gesammten Körperwelt nicht auszuschliessen. Wird z. B. durch Muskelarbeit die Last des eigenen Körpers der Schwere entgegen auf einen Berg geschafft, so ist äussere Arbeit geleistet, deren Betrag leicht zu finden ist. Wird dagegen die eigene Körpermasse nur auf wagerechtem Boden fortgeschafft, so ist, wie oben bemerkt, keine äussere Arbeit geleistet, weil sich keine äussere Kraft dieser Veränderung in der Zusammenstellung der Körper widersetzt. Hebt man ein Gewicht in die Höhe und wird seine Verbindung mit dem Körper nach der Hebung gelöst, so ist äussere Arbeit geleistet. Setzt man dagegen das Gewicht hernach wieder nieder, indem man seinen beschleunigten Fall durch Muskelspannung in ein langsames Niedersinken verwandelt, so ist schliesslich keine äussere Arbeit geleistet, und man darf nicht erwarten, dass dieser Act einen Ausfall an der als Wärme zum Vorschein kommenden lebendigen Kraft bedingt.

Noch eine Analogie des Thierleibes mit der Dampfmaschine verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, die meines Wissens noch nirgend klar ausgesprochen ist, obwohl bereits längst vorliegende Thatsachen zu ihrer vollständigen Begründung genügen. Es wurden oben unter den festen Ingestis des Maschinenhauses absichtlich zwei Classen unterschieden, das Brennmaterial und das Material zum Ersatz abgenutzter Maschinentheile. Ganz dieselbe Eintheilung können wir bei den Nahrungsstoffen der höheren Thiere machen. Hier spielen offenbar die Eiweisskörper die Rolle des Ersatzmaterials für die gesammten Maschinentheile (Gewebselemente), die Fette und Kohlehydrate dagegen die Rolle des Brennmaterials. Schon vor längerer Zeit ist bekanntlich von Liebig diese Eintheilung der Nahrungsstoffe in plastische und Respirationsmittel, wie er es bezeichnete, aufgestellt und geistreich entwickelt worden. Sie hat aber den Angriffen nicht Stich halten können,

weil sie in ihrer damaligen Form physikalische Vorstellungen in sich aufnahm, die durch neuere Forschungen beseitigt sind. Gegenwärtig können wir nun diese Eintheilung fest begründen und zwar in einer noch viel eigentlicheren und zugleich allgemeineren Bedeutung, als sie vielleicht ursprünglich von Liebig gemeint war. Für uns ist nämlich das Heizmaterial der Stoff, dessen Oxydation nicht bloss freie Wärme, sondern auch die lebendige Kraft liefert, welche mittelst der Muskeln als mechanische Arbeit sichtbar wird, und gerade hierauf ist es bei unserer Analogie ganz besonders abgesehen. Andererseits versteht es sich aber auf unserem Standpunkte ganz von selbst, dass auch bei der zerstörenden Oxydation der Gewebetheile, deren Ersatz auf Kosten der eiweissartigen Nahrungsstoffe geschieht, Wärme frei wird gerade so gut, wie auch in einer Dampfmaschine bei der Oxydation metallener Maschinentheile Wärme frei wird, nach Maassgabe des Betrages dieser Processe.

Es gilt also, von allgemein zugestandenen Wahrheiten abgesehen, hier zu zeigen, dass in den Muskeln durch Verbrennung stickstofffreier Verbindungen (Fette und zuckerhaltige Stoffe) und nicht wesentlich durch Verbrennung der Proteïnstoffe dieses Gewebes die als mechanische Arbeit erscheinende Kraft erzeugt wird. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei hier ausdrücklich bemerkt, dass wir die Möglichkeit nicht ausschliessen wollen, jene stickstofffreien Verbindungen könnten in letzter Linie von eiweissartigen Ingestis herstammen; so mag es sich vielleicht auch wirklich bei ausnahmsweise eiweissreicher Nahrung verhalten. In der That liegt diese Möglichkeit auf der Hand, da es eine bekannte Thatsache der Chemie ist, dass unter den Zersetzungsproducten eiweissartiger Körper in und ausser dem Thierleibe jene stickstofflosen Verbindungen (Fette und Zucker) auftreten können. Es wäre aber eine Verschwendung der Natur, wenn — die Richtigkeit unserer Behauptung vorausgesetzt — regelmässig die kostbaren Proteïnstoffe verwandt würden zu einem Zwecke, zu dem die weit leichter zu beschaffenden Kohlehydrate ausreichen; ebenso wie wir es eine Verschwendung nennen würden, wenn ein Fabrikant es sich einfallen liesse, seine Maschine mit Eisen statt mit Kohle oder Holz zu heizen, was ja keineswegs unmöglich wäre.

Gegen unseren Satz wird man vor Allem die Einwendung hören, dass stets nur so überaus kleine Mengen jener stickstofflosen Verbindungen, die eine so wichtige Rolle bei der Function spielen sollen, im Muskel zu finden sind, während die eiweissartigen Verbindungen seinen Bestand vorwiegend ausmachen. Wer indessen hieraus schliessen wollte, dass die Verbrennung der eiweissartigen Verbindungen im Muskel die Kraft erzeugen müsse, der würde sich desselben Fehlschlusses schuldig machen, wie einer, der nach rein chemischen Gesichtspunkten eine Locomotive [1]) untersucht hätte und nun aus dem Befunde von 1000 Centnern Eisen neben

[1]) Der Tender mit dem Kohlenvorrath gehört nicht dazu, er entspricht dem Nahrungsvorrath des Thieres.

etwa $^1/_2$ Centner Kohlen, die gerade verbrennend auf dem Roste liegen, schliessen wollte: die Kraftwirkung der Locomotive muss von der Verbrennung des Eisens herrühren. Diesem Fehlschluss würde der nicht ausgesetzt sein, welcher beobachtete, was die Locomotive während einer bestimmten Zeit verbraucht und welche Producte sie während derselben liefert, wenn sie entweder arbeitet oder fortwährend wenigstens zur Arbeit bereit geheizt dasteht. Er würde bald merken, sie liefert viel Verbrennungsproducte der Kohle und wenig Verbrennungsproducte des Eisens und ebenso verbraucht sie viel Kohle und nur sehr wenig Eisen. Er würde ferner insbesondere bemerken, dass die Locomotive in dem Maasse mehr Verbrennungsproducte der Kohle liefert, als sie mehr arbeitet, dass dagegen die Menge des verbrannten oder sonst abgenutzten Eisens keineswegs mit der geleisteten Arbeit gleichen Schritt hält. In der That sind die metallischen Theile der Maschine in Ruhe zerstörenden Einflüssen nahezu ebenso ausgesetzt wie bei der Arbeit, und sollte sie durch stetige Reparatur in brauchbarem Zustande erhalten werden, so würde wahrscheinlich für die ruhende (nur immer geheizt zur Arbeit bereit gehaltene) Maschine nicht viel weniger Eisen etwa im Laufe eines Jahres verbraucht werden wie für die arbeitende. Genau analog verhält es sich aber beim Muskel. Sehen wir zunächst nach den Verbrennungsproducten, die er liefert. Unter den Verbrennungsproducten eiweissartiger Verbindungen muss nothwendig irgend eines sein, das den Stickstoff enthält. Wo es sich um namhafte Mengen handelt, kann dies nur der Harnstoff sein. Wer also annimmt, dass die Entwickelung der Muskelkraft auf der Verbrennung eiweissartiger Körper beruht, muss erwarten, dass mit bedeutender mechanischer Arbeitsleistung eine entsprechende Steigerung der Harnstoffausfuhr aus dem Körper einhergeht. Nun ist aber durch zahlreiche Untersuchungen das Gegentheil erwiesen. Anhaltende gewaltige Muskelarbeit vermehrt die Harnstoffausfuhr in kaum merklichem Maasse. Andererseits ist aber durch die schönen Untersuchungen Edward Smith's festgestellt, dass bei angestrengter Muskelarbeit die Kohlensäureausfuhr aus dem Körper den zehnfachen Betrag der im Schlafe stattfindenden erreichen kann. Es ist gewiss nicht gewagt, hieraus zu schliessen, dass die Muskelarbeit sich knüpft an Verbrennungen solcher Körper, unter deren Verbrennungsproducten sich zwar Kohlensäure, aber kein Harnstoff befindet, d. h. Fette und Kohlehydrate. Unsere Behauptung könnte durch folgenden Versuch möglicherweise über allen Zweifel erhoben werden. Man müsste eine sehr grosse und bestimmbare äussere Arbeit leisten, z. B. Besteigung eines hohen Berges, und gleichzeitig die gelieferte Harnstoffmenge bestimmen. Hieraus könnte die Menge des verbrannten Eiweisses berechnet werden. Wenn es sich nun fände, dass die Verbrennungswärme dieses Eiweisses weniger betrüge als das Aequivalent der geleisteten Arbeit, dann wäre offenbar unser Satz streng erwiesen [1]).

---

[1]) Dieser Versuch ist wirklich mit positivem Ergebnisse ausgeführt.

Sehen wir andererseits nach den Ersatzstoffen, so findet sich, dass angestrengte Muskelarbeit das absolute Bedürfniss eiweissartiger Nahrungsstoffe keineswegs bedeutend steigert. Gerade die Menschenclassen, welche am meisten mechanische Arbeit leisten, geniessen durchschnittlich am wenigsten eiweissreiche Nahrung, vielmehr herrschen darin die stickstofflosen Verbindungen entschieden vor. Noch auffallender ist es bei manchen pflanzenfressenden Säugethieren. Hier ist höchst wahrscheinlich oft das Aequivalent der geleisteten Muskelarbeit eine weit grössere Wärmemenge, als die Verbrennungswärme des gesammten in der Nahrung aufgenommenen Eiweisses.

So sehen wir denn im Muskel einen aus eiweissartigen Stoffen aufgebauten Apparat, in welchem zur Krafterzeugung Fette oder Kohlehydrate verbrennen. Damit tritt die geistreiche Lehre Virchow's in ein neues Licht, der die nutritive und functionelle Thätigkeit des Muskels (und anderer Gewebe) streng von einander unterscheidet. Jene wäre eben aufzufassen als Wiederherstellung des abgenutzten oder Aufbau eines neuen Apparates.

Schliesslich wollen wir den Vergleich zwischen dem Thierleib und der Dampfmaschine noch mit Rücksicht auf einen besonderen Punkt durchführen. Für beide Apparate lässt sich die Frage aufwerfen, wie viel von der Verbrennungswärme der Ingesta in mechanische Arbeit verwandelt werden kann. Für die Dampfmaschine ist dies eigentlich die Frage nach dem ökonomischen Werthe derselben. Man wird ihn nämlich offenbar um so höher anschlagen, ein je grösserer Bruchtheil der Verbrennungswärme in mechanische Arbeit umgesetzt werden kann, denn einen um so grösseren Effect wird man mit einer gegebenen Menge Brennmaterials durch sie erzielen können. Bei den gegenwärtig üblichen Einrichtungen gilt es als theoretisches Ideal, dass der achte Theil der dem Wasser des Kessels mitgetheilten Wärme in Arbeit verwandelt werde, $^7/_8$ gehen unvermeidlich als freie Wärme unbenutzt davon. In der Praxis wird bei Weitem noch nicht dieses Ideal erreicht, man ist schon sehr zufrieden, wenn nur $^1/_{12}$ der auf dem Herde erzeugten Wärme in Arbeit verwandelt wird. Der menschliche Körper ist in dieser Beziehung der Dampfmaschine sehr wahrscheinlich bei Weitem überlegen. Es kann hier vielleicht bis zu $^1/_5$ von der Verbrennungswärme der Nahrungsmittel in Arbeit verwandelt werden. Helmholtz hat dies aus folgender Betrachtung geschlossen: Man darf nach den Beträgen der ausgehauchten Kohlensäure, wie sie Edward Smith gefunden hat, vermuthen, dass die chemischen Processe im menschlichen Körper im wachen, aber ruhenden Zustande während einer Stunde soviel Wärme erzeugen, dass damit die Temperatur des Körpers um 1,2° C. gesteigert werden könnte. Dieser Vermuthung liegt nur noch die Annahme zu Grunde, dass Kohlensäureaushauchung und Wärmebildung beim Menschen ungefähr im selben Verhältnisse stehen, wie bei den von Dulong und Despretz calorimetrisch untersuchten Thieren. Aus den Versuchen von E. Smith geht nun ferner hervor, dass

fünfmal mehr Kohlensäure als im ruhenden (und zehnmal mehr als im schlafenden) Zustande ausgeschieden wird, wenn die Muskeln eine äussere Arbeit derart leisten, dass dadurch der Körper während einer Stunde um 571 m gehoben würde. Nimmt man an, dass auch hierbei Kohlensäureausscheidung und Wärmebildung noch im selben Verhältnisse stehen, so würde durch die Arbeitsleistung von der gedachten Intensität auch die Wärmebildung auf den fünffachen Betrag gesteigert sein, d. h. es würde jetzt während einer Stunde eine Wärmemenge gebildet, welche genügte, die Temperatur des Körpers um etwa 6° zu steigern. Die äussere Arbeit, den Körper auf die Höhe von 571 m zu heben, entspricht aber einer Wärmemenge, die seine Temperatur um nahezu 1,3° steigern könnte, die also mehr als $^1/_5$ von der ganzen in der Stunde gebildeten Verbrennungswärme ausmacht.

In der vorstehenden Betrachtung ist der menschliche oder thierische Körper als Ganzes aufgefasst und bloss nach der Arbeit gefragt, welche er an äusseren Objecten leisten kann, und nach ihrem Verhältniss zu der Wärme, die als freie schliesslich in ihm zum Vorschein kommt. Man kann aber auch jeden einzelnen Muskel für sich mit einer Maschine vergleichen und fragen, wie verhält sich seine Arbeitsleistung zu der in dem Muskel selbst aufgewandten potentiellen Energie, d. h. zu der Wärmemenge, welche erzeugt werden würde, wenn die im Muskel selbst während der Arbeit vorgehenden chemischen Processe ohne Arbeit vor sich gingen. Bei dieser Betrachtung kämen dann die chemischen Processe nicht in Rechnung, die etwa in anderen Geweben des Körpers im Blute oder sonst wo statthaben. Wofern der Betrag dieser Processe nicht überall verschwindend klein ist gegen den Betrag der Processe im arbeitenden Muskel, so muss sich hier das Resultat noch viel günstiger stellen, d. h. es muss ein noch viel grösserer Bruchtheil der im arbeitenden Muskel erzeugten Verbrennungswärme in Arbeit verwandelt werden.

Versuche [1]) welche zur Beantwortung der zuletzt aufgeworfenen Frage eigens angestellt sind, haben das überraschende Ergebniss geliefert, dass höchst wahrscheinlich nicht viel mehr als $^1/_5$ der im Muskel verlorenen potentiellen chemischen Energie als mechanische Arbeit gewonnen wird. Man hätte danach in der That anzunehmen, dass diejenigen Processe, bei welchen die chemischen Anziehungskräfte eigentlich zur Wirkung kommen, fast ganz in der Muskelmasse des Thieres verlaufen, in den anderen Geweben dagegen vorwiegend die Processe, bei welchen Ueberwindung und positive Arbeit chemischer Anziehungskräfte in nahezu gleichem Maasse stattfinden. Dieselbe Folgerung hat Pflüger aus ganz anderen physiologischen Ueberlegungen gezogen, und auch noch die nachstehende Betrachtung spricht in demselben Sinne.

Fassen wir noch einmal die vorhin ausgeführte, aus den Unter-

---

[1]) Fick, Mechanische Arbeit und Wärmeentwickelung bei der Muskelthätigkeit. Leipzig 1882.

suchungen von E. Smith hervorgehende Thatsache ins Auge, dass der gesammte Verbrennungsprocess im Thierkörper durch namhafte Muskelarbeit in so kolossalem Maasse gesteigert wird. Angesichts dieser Thatsache wird man sich kaum der Vermuthung erwehren können, dass der Stoffumsatz im Körper überall fast ausschliesslich in den arbeitenden Muskeln stattfindet, dass vielleicht nebenher in den ruhenden Muskeln ein mässiger chemischer Process verläuft, um sie fortwährend zur Arbeit bereit, gleichsam geheizt zu halten, dass endlich die übrigen Gewebe nur einen sehr unbedeutenden Beitrag zum gesammten Stoffumsatz liefern.

Soll diese Vermuthung richtig sein, so müsste die Wärmemenge, welche bei vollständiger Ruhe der Extremitätenmuskeln erzeugt wird, zum grössten Theil aus den Muskeln stammen, die während des ganzen Lebens in Thätigkeit sind, nämlich aus dem Herzen und den Inspiratoren. Sehen wir zu, ob sich die quantitativen Beträge der Wärme und der betreffenden Arbeitsleistung einigermaassen mit dieser Annahme vertragen. Ueberschlagen wir zunächst, wie viel Arbeit die Inspiratoren bei mittlerer Stärke des Athemprocesses während einer Stunde leisten. Nehmen wir an, es werde bei jedem Athemzuge der Thorax um 600 ccm ausgedehnt. Rechnen wir davon $^2/_3$ auf die Bewegung des Zwerchfelles und $^1/_3$ auf Bewegung der äusseren Thoraxwand. Die Oberfläche des Zwerchfelles schätzt Donders auf 350 qcm, es müsste sich also um 0,0114 m verschieben, wenn dadurch der Brustraum um 400 ccm erweitert werden soll. Das Zwerchfell hat bei dieser Verschiebung (gleichfalls nach Donders' Schätzung) einen Druck von 38,7 kg zu überwinden, also geschieht dabei eine Arbeit von 38,7 × 0,0114 = 0,44 mkg. Die äussere Oberfläche des Brustkorbes schätzt Donders auf 2000 qcm und den darauf lastenden Druck zu 194,4 kg. Soll also durch Zurückweichen dieser Wand das Volum noch um weitere 200 ccm vermehrt werden, so muss das Zurückweichen 0,001 betragen und die Arbeit ist = 194,4 × 0,001 = 0,1944 mkg. Die ganze Arbeit eines Athemzuges betrüge also 0,63 mkg. Rechnen wir auf die Stunde 900 Athemzüge, so hätten wir per Stunde eine Respirationsarbeit von 567 mkg. Die Arbeit des linken Herzens schlugen wir oben (S. 127) per Stunde zu 840 mkg an. Die Arbeit des rechten Herzens dürfte vielleicht beiläufig halb so gross sein, = 420 mkg. Die gesammte mechanische Arbeit der Respiration und des Blutkreislaufes betrüge hiernach ungefähr 1827 mkg, was nahezu 14,3 Wärmeeinheiten äquivalent ist. Diese Wärmemenge muss erstlich ganz im Körper als solche zum Vorschein kommen, denn die Arbeit der Respiration und des Blutkreislaufes wird durch Widerstände im Innern des Körpers aufgezehrt, ohne dass dadurch irgend eine Veränderung in der Aussenwelt hervorgebracht würde. Nun dürfen wir aber nach den oben angeführten Versuchen annehmen, dass bei der Muskelarbeit mindestens etwa 5 mal so viel Wärme im Ganzen

erzeugt wird, als der in mechanische Arbeit verwandelten äquivalent ist. Unter dieser Annahme würde aber die Arbeit der Respiration und des Blutkreislaufes einen chemischen Process erheischen, der per Stunde etwa 21,5 Wärmeeinheiten erzeugt. Wir dürfen andererseits nach den oben gegebenen Schätzungen von Helmholtz die von einem 60 kg schweren Menschen während einer Stunde des Schlafes im Ganzen gelieferte Wärme zu etwa 36 Einheiten veranschlagen, eine Zahl, welche von der soeben berechneten Zahl 21,5 noch nicht das Doppelte ist. Man sieht also, die wahrscheinlichsten quantitativen Verhältnisse der Wärmebildung sind keineswegs der Vermuthung ungünstig, dass die Wärme erzeugenden chemischen Processe zum weitaus überwiegenden Theil im Interesse der Muskelarbeit geschehen.

Viertes Capitel.

Von den Temperaturen im thierischen Körper.

Es wurde bei den Betrachtungen des vorigen Capitels vorausgesetzt, dass sich der Zustand des thierischen Körpers genau constant erhält und dass daher für irgend eine bestimmte Zeit die abgegebene Wärme (wir wollen die äussere mechanische Arbeit nöthigesfalls immer sogleich auf Wärmeeinheiten reducirt denken) der erzeugten Wärme genau gleich ist. Diese Voraussetzung realisirt sich nun immer von selbst, sowie die Wärme erzeugenden Processe und die äusseren Bedingungen in gleichmässigem Gange bleiben. Die nähere Untersuchung dieses Umstandes führt uns auf die Bedeutung der Temperaturen im Thierkörper.

Mittelst der Temperaturen ist nämlich die Wärmeabgabe von der Wärmebildung selbst abhängig. Dies soll jetzt näher erörtert werden. In einer ersten allgemeinsten Betrachtung wollen wir die Frage noch unberührt lassen, wo im Thierkörper die Wärme entsteht. Wir nehmen zugleich an — was auch für eine erste Annäherung ganz erlaubt ist — dass im Innern des Körpers, d. h. unter der Haut, überall dieselbe Temperatur herrscht. Die Temperatur der Haut ist im Allgemeinen eine andere, jedoch ist es gut, zu bemerken, dass auch die Haut an solchen Stellen, wo sie eine vollständig geschlossene einspringende Falte bildet, nothwendig alsbald die Temperatur des Innern annehmen muss. So muss z. B. die Haut der Achselhöhle, sowie auch eine daselbst befindliche Thermometerkugel, wenn der Arm dicht an die Brust angelegt wird, nach wenigen Minuten genau die im Innern des Körpers herrschende Temperatur annehmen; denn die Haut der Achselgrube nebst der Ther-

mometerkugel ist in diesem Falle ringsum von Theilen des Körperinnern umgeben. Man wird sich um die Thermometerkugel herum eine Kugelfläche von passendem Radius so denken können, dass dieselbe überall durch Muskelgewebe, Knochengewebe, Lungengewebe etc. geht, nur auf einer verschwindend schmalen Zone muss die gedachte Fläche allerdings die Haut des Armes und der Brust, die aber auf einander gepresst sind, schneiden. Auf dieser, das Thermometergefäss rings umgebenden geschlossenen Fläche wird also überall die Temperatur der tieferen Körpertheile anzutreffen sein. Im Innern einer geschlossenen Oberfläche aber (wenn daselbst weder Wärme fortwährend erzeugt noch vernichtet wird) kann sich auf die Dauer keine andere Temperatur erhalten, als die an der Oberfläche herrschende. Hierauf beruht die Berechtigung des von den Aerzten so viel angewandten Verfahrens, die Körpertemperatur in der Achselhöhle zu bestimmen.

Wir wollen jetzt annehmen, der thierische Körper erzeuge durch die in seinem Innern vorgehenden chemischen Processe ganz gleichmässig Wärme. Um ganz bestimmte Vorstellungen zu haben, denken wir uns, es handele sich um einen menschlichen Körper von 60 kg Gewicht und es entstehe darin jede Minute 1,87 Wärmeeinheit[1]), d. h. eine Wärmemenge, welche genügt, die Temperatur von 1,87 kg Wasser von 0° auf 1° zu erwärmen. Nehmen wir ferner an, die Temperatur der umgebenden Luft sei constant = 20°. Ferner setzen wir den Durchfeuchtungsgrad, Blutreichthum und die Wärmeleitungsfähigkeit der Haut, sowie die Respirationsfrequenz etc. constant voraus. Es sei endlich im Anfang der betrachteten Zeit die Temperatur des Körpers = 35°. Wären alle die angedeuteten Bedingungen der Wärmeabgabe vollständig bekannt, so würden wir angeben können, wie viel Wärme in der ersten Minute ausgegeben werden muss. Wir würden namentlich angeben können, wie viel Wärme durch die Haut hindurchgeht, auf deren äusserer Seite die Temperatur 20°, auf deren innerer Seite die Temperatur 35° ist. Beiläufig bemerkt, ist dies ohne Zweifel der Hauptposten der Wärmeausgabe, er beträgt nach Helmholtz' Ueberschlag etwa 77 Proc. der Gesammtausgabe. Wir wollen nun annehmen, es zeigte sich, dass unter den vorausgesetzten Bedingungen in der ersten Minute nur 1,27 Wärmeeinheiten den Körper verlassen könnten. Dann würden also 0,60 Einheiten im Körper zurückgehalten. Dadurch würde, die Wärmecapacität der Körpersubstanz der des Wassers gleich gesetzt, die Temperatur im Innern um 0,01°, d. h. von 35 auf 35,01 steigen. Die Wärmemenge nun, welche die Haut von innen nach aussen während der Zeiteinheit (hier Minute) durchsetzt, wächst mit der Differenz zwischen den Temperaturen innen und aussen. Haben wir also jetzt in der zweiten Minute die Differenz

[1]) Diese Zahl beruht auf einer überschlägigen Rechnung von Helmholtz, jedoch auf einer anderen als der weiter oben benutzten. Auf den absoluten Werth der Zahl wollen wir indessen kein Gewicht legen.

35,01 — 20 = 15,01 statt der Differenz 35 — 20 = 15, so wird etwas mehr Wärme die Haut passiren können als während der ersten Minute. Auch wird durch die kleine Erhöhung der Bluttemperatur die Wärmeabgabe auf der Lungenoberfläche durch Leitung und Verdunstung ein wenig gefördert, doch dürfte dies kaum in Betracht kommen. Jedesfalls aber sieht man, dass schon in der zweiten Minute etwas mehr Wärme abgegeben werden muss als in der ersten, d. h. etwas mehr als 1,27 Einheiten. Voraussichtlich aber noch lange nicht 1,87 Einheiten. Wenn also in der zweiten Minute, wie vorausgesetzt wird, wiederum 1,87 Wärmeeinheiten erzeugt werden, so muss abermals etwas davon im Körper zurückbleiben, und zwar wohl wiederum nahezu 0,60 Einheiten. Am Ende der zweiten Minute ist also die Temperatur noch etwas höher als am Ende der ersten. So geht es nun fort. Am Ende jeder folgenden Minute ist die Temperatur des Körpers ein wenig höher als am Ende der vorhergehenden, und gerade darum wird dann in der darauf folgenden Minute etwas mehr Wärme abgegeben. So wird also nothwendig nach einer gewissen Anzahl von Minuten eine Temperatur erreicht sein, bei welcher unter den gegebenen Ableitungsbedingungen genau 1,87 Wärmeeinheiten in der Minute abgegeben werden. Sei dies beispielsweise die Temperatur von 37° C. (bekanntlich die durchschnittliche Normaltemperatur des menschlichen Körpers). Diese wird sich dann constant erhalten, so lange die gedachten Bedingungen dauern, denn nunmehr wird stets in jeder Zeiteinheit ebensoviel Wärme abgegeben als gebildet, es bleibt also im Körper fortwährend derselbe Vorrath von Wärme.

Nehmen wir jetzt an, nachdem der stationäre Zustand bei 37° beliebige Zeit gedauert hat, ändere sich bei gleichbleibenden Ableitungsbedingungen die Intensität der Wärmebildung, statt 1,87 mögen jede Minute 2,00 Wärmeeinheiten frei werden. Sofort wird eine Steigerung der Temperatur beginnen, denn in den ersten Minuten werden immer noch bloss je 1,87 Wärmeeinheiten abgegeben werden, und von den gebildeten 2,00 Wärmeeinheiten bleibt etwas im Körper zurück, dadurch steigt aber die Temperatur des Körpers und mit ihr die Wärmeabgabe unter den alten Bedingungen. Es wird mithin auch jetzt wieder eine Temperatur beispielsweise 40° geben, bei welcher ebensoviel Wärme per Minute abgegeben als gebildet wird. Diese Temperatur wird sich — einmal erreicht — constant erhalten, so lange die Intensität der Wärmebildung 2,00 Einheiten per Minute bleibt.

Setzen wir ferner den Fall, die Wärmebildung fahre in gleicher Intensität fort, wie in dem zuerst gedachten stationären Zustande bei 37°, aber die Ableitungsbedingungen würden ungünstiger, gleichviel durch welche Ursache, die einfachste Annahme wäre Steigerung der Temperatur des umgebenden Mediums. Nun könnte wiederum in den ersten Zeiteinheiten nach der Veränderung nicht ebensoviel Wärme abgegeben werden als gebildet wird, denn wir haben ja angenommen, nur unter den alten Bedingungen werden bei 37° Körpertemperatur 1,87 Wärme-

einheiten per Minute abgegeben. Unter den ungünstigeren Bedingungen kann also nur weniger fortgehen. Ein Theil der gebildeten Wärme wird also im Körper zurückbleiben und seine Temperatur erhöhen. Dadurch aber wird unter allen Bedingungen der Wärmeabfluss gefördert, und es muss auch jetzt wieder eine über 37° liegende Temperatur (z. B. 40°) geben, bei welcher unter den neuen ungünstigeren Bedingungen genau 1,87 Wärmeeinheiten in der Minute fortgehen. Diese Temperatur wird nothwendig erreicht und erhält sich dann constant, so lange die neuen Ableitungsbedingungen dauern.

Es bedarf nunmehr wohl keiner ausführlichen Erläuterung mehr, die Umkehrungen der vorstehenden Sätze klar zu machen, die so lauten: Wenn ein stationärer Zustand bei gewisser Temperatur bestanden hat und man mindert die Intensität der Wärmebildung, ohne an den Ableitungsbedingungen etwas zu ändern, so sinkt die Körpertemperatur und es stellt sich allmälig ein neuer stationärer Zustand mit niederer Temperatur her. Genau dasselbe tritt aber auch ein, wenn man die Wärmeableitungsbedingungen günstiger macht, ohne die Intensität der Wärmebildung zu verändern.

Die Durchschnittstemperatur des thierischen Körpers hängt demnach von zwei Grössen gleichzeitig ab, erstens von der Intensität der Wärmebildung und zweitens von der Fähigkeit des Körpers, Wärme abzugeben. Wenn die Temperatur des Körpers steigt, so ist dies also keineswegs ein sicherer Beweis für eine gesteigerte Wärmebildung, es kann ebensowohl herrühren von verminderter Ableitungsfähigkeit, und wenn die Temperatur sinkt, so kann es entweder von verminderter Wärmebildung oder von gesteigerter Abgabefähigkeit herrühren. Diese Wahrheit, dass eine Veränderung der Körpertemperatur in gleicher Weise durch zwei ganz verschiedene Ursachen hervorgebracht werden kann, so klar sie auch ist, scheint doch vielen, die sich mit Temperaturmessungen beschäftigen, nicht immer hinlänglich lebhaft gegenwärtig zu sein.

Aus den vorstehenden Betrachtungen kann gefolgert werden dass trotz einer Aenderung in einer der Grössen, von denen die Temperatur abhängt, diese ihren alten Werth behaupten kann, wenn eben die andere Grösse gleichfalls eine geeignete Veränderung erleidet. So kann z. B. trotz gesteigerter Wärmebildung die alte Temperatur ungesteigert bleiben, wenn mit Steigerung der Wärmebildung zugleich eine Aenderung in den Bedingungen der Wärmeableitung eintritt, die den Abfluss der Wärme erleichtert. Es ist ferner klar, dass sogar trotz verminderter Wärmebildung die Temperatur des Körpers steigen, und dass sie trotz vermehrter Wärmebildung sinken kann. Um den ersteren Erfolg zu erzielen, brauchten nur die Wärmeableitungsbedingungen noch mehr verschlechtert zu werden, als einer blossen Compensation der verminderten Wärmeerzeugung entspricht. Der andere Fall würde eintreten, wenn die Ableitungsbedingungen in sehr hohem Maasse verbessert würden, und die Vermehrung der Wärmeerzeugung eben verhältnissmässig geringer wäre.

Es ist endlich klar, dass auch zwei im selben Sinne wirkende Ursachen gleichzeitig wirken können. Es könnten z. B. zur selben Zeit die Verbrennungsprocesse im ganzen Körper gesteigert und die Ableitungsbedingungen ungünstiger sein, das würde natürlich eine um so bedeutendere Temperaturerhöhung zur Folge haben. Ebenso könnten zur selben Zeit die Verbrennungsprocesse vermindert und die Ableitungsbedingungen günstiger sein, dann würde die Temperatur noch tiefer sinken, als wenn bloss eine der beiden Ursachen wirkte.

Die Möglichkeit, bei Variation in der Wärmeentwickelung doch dieselbe Temperatur zu erhalten, ist für die Physiologie und Pathologie von der allerhöchsten Bedeutung, denn es scheint für die höheren Thiere ein Bedürfniss zu sein, dass die durchschnittliche Körpertemperatur sich genau constant erhält, oder wenigstens nur zwischen sehr engen Grenzen schwankt. Wir wollen daher hier die physikalischen Principien genauer zergliedern, nach welchen die Erhaltung der Temperatur möglich wird, trotz der unvermeidlichen bedeutenden Aenderungen der Grössen, von denen die Temperatur, wie wir gesehen haben, abhängt. Es ist zu diesem Ende hauptsächlich nöthig, die Bedingungen der Wärmeableitung genauer zu zergliedern, als wir es bisher thaten, wo wir eben den ganzen Complex jener Bedingungen in eine einzige Grösse zusammenfassten, welche angiebt, wie viel Wärme unter den gesetzten Bedingungen bei einer bestimmten Körpertemperatur in der Zeiteinheit abgeleitet wird. Diese Grösse ist aber natürlich selbst wieder von mehreren Umständen abhängig, die sich gegenseitig unterstützen oder compensiren können.

Um alle hier bedeutungsvollen Verhältnisse besser übersehen zu können, wollen wir ein schematisches Beispiel aus dem täglichen Leben betrachten, bei welchem ganz analoge Verhältnisse wirksam sind. Wir wollen uns ein Haus denken, das durch einen sogenannten Wasserheizapparat geheizt wird, d. h. einen Apparat, welcher heisses Wasser in einem Röhrensystem durch die sämmtlichen Räume des Hauses circuliren macht; von einem Feuerherde wird dem Wasser immer die Wärme, die es unterwegs verloren hat, wieder mitgetheilt. Um in thermischer Beziehung die Aehnlichkeit mit dem Säugethierleibe vollständig zu machen, wollen wir uns das Röhrensystem in einer allerdings praktisch nie ausgeführten Weise angeordnet denken, nämlich so, dass ein namhafter Bruchtheil der gesammten Circulationsröhren dicht an den Fenstern des Hauses (natürlich inwendig) vorübergeht, und es soll ausserdem die Weite dieser Röhren willkürlich verändert werden können.

Es sei jetzt das ganze Innere des gedachten Hauses 20° C. warm im Gleichgewichte der Temperaturen, bei einer Heizung des Herdes mit 10 kg Kohle per Stunde, bei einer äusseren Temperatur von 8° C. und sonst bestimmten atmosphärischen Verhältnissen. Nun werde plötzlich die Wärmeableitung dadurch begünstigt, dass die äussere Lufttemperatur von 8° auf 0° sinkt, dann würde offenbar, wofern alles Uebrige bliebe wie bisher, die Temperatur des Hauses sinken, und erst bei einer

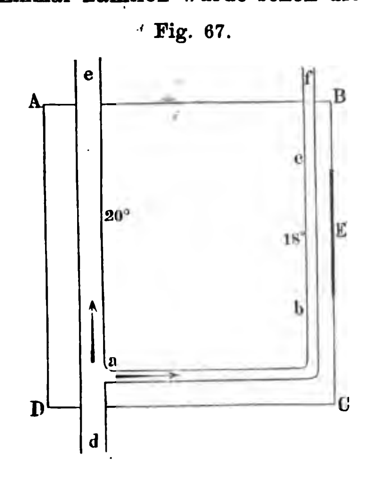
viel niedrigeren Temperatur würde der Wärmestrom wieder stationär werden. Wir können uns aber die Aufgabe stellen, trotz der niedrigeren äusseren Lufttemperatur dennoch die Temperatur im Innern auf 20° zu halten, durch compensirende Veränderungen in anderen Verhältnissen. Dazu stehen nun verschiedene Wege offen. 1. Können wir mehr Kohlen per Stunde auf dem Herde verbrennen. Es ist ohne Weiteres begreiflich, dass dadurch auch bei der grösseren Temperaturdifferenz die Temperatur von 20° im Hause erhalten werden kann. Der Wärmestrom vom Innern nach aussen wird eben dann stärker in dem Maasse, in welchem der Kohlenverbrauch in der Zeiteinheit steigt. 2. Kann aber möglicherweise ohne vermehrten Kohlenverbrauch das Haus auf 20° erhalten werden, denn die Erniedrigung der Temperatur des umgebenden Mediums ist nur eine unter den Wärmeableitungsbedingungen, deren Veränderungen durch Veränderungen in anderen Bedingungen vollständig oder wenigstens theilweise compensirt werden können.

Die nächstliegende von diesen möglichen Veranstaltungen wäre das Anbringen von Vorfenstern, eine Veranstaltung, die bekanntlich unzählige Male in der Praxis des gemeinen Lebens getroffen wird, um beim Sinken der Lufttemperatur die Temperatur im Hause zu erhalten, ohne den Brennstoffverbrauch zu steigern. Das physikalische Wesen dieser Einrichtung besteht darin, dass man an einem Theil der Oberfläche des Hauses eine stagnirende Luftschicht (nämlich die Schicht zwischen den beiden Fenstern) anbringt, die ein besonders grosses Hinderniss für den Wärmeabfluss bildet. Natürlich kann das Anbringen von Vorfenstern immer nur das Sinken der äusseren Temperatur um eine ganz bestimmte Anzahl von Graden genau compensiren; sinkt die äussere Temperatur noch tiefer, so reicht das eine Hülfsmittel nicht mehr aus, und sinkt sie weniger, so würde bei Anwendung desselben die Temperatur im Innern noch steigen. Dem Anbringen von Vorfenstern an einem geheizten Hause ist nun keine von der Natur selbst im menschlichen Körper getroffene Veranstaltung analog, dagegen entspricht ihm ganz genau das Bekleiden von Körperstellen, die man bei höherer Lufttemperatur nackt trägt. Bei manchen Thieren thut die Natur etwas Analoges, indem sie ihnen im Winter einen dickeren Pelz giebt als im Sommer.

Eine zweite Veranstaltung zur Compensation der Erniedrigung der äusseren Lufttemperatur wäre das Verkleinern der an den Fenstern vorbeigeführten Circulationsröhren. Dies entspricht einer Verengerung der Hautarterien. Da die Veränderlichkeit der Weite dieser Arterien offenbar das wichtigste Hülfsmittel der Natur ist, die Temperatur des Säugethierkörpers zu reguliren, so müssen wir die Wirkung dieses Umstandes genauer zergliedern, um so mehr, als die Sache nicht ganz so einfach ist, als sie aussieht. Sei $ABCD$ (Fig. 67) der viereckige Querschnitt eines Zimmers in dem von uns als Beispiel gedachten Hause, de eine Heizröhre in seinem Innern, und abc ein Zweig derselben, welcher dicht am Fenster E vorübergeht. Es versteht sich von selbst, dass in

einem solchen Zimmer nicht überall ganz genau die Temperatur von 20° stattfinden wird, sondern in der Nähe der bestableitenden Oberfläche, namentlich der Fenster, wird eine mehr oder weniger tiefere Temperatur herrschen (gerade wie auch die Haut immer ein wenig kälter ist als das tiefe Innere des Körpers). Es sei beispielsweise diese Temperatur = 18° unter den oben gedachten Anfangsbedingungen (10 kg Kohle per Stunde und 8° äussere Lufttemperatur). Es ist nun klar, dass die in der Zeiteinheit durch die Fensterwand *B C* entweichende Wärmemenge grossentheils von dem in der Röhre *abcf* fliessenden Wasser herstammt. Das Wasser darin wird also bei *c* nicht mehr so warm sein, als bei *a*. Jetzt wollen wir zunächst die Bedingungen dadurch verändert denken, dass die Röhre *abcf* (und alle entsprechenden) enger gemacht würde. Das hätte in doppelter Weise Einfluss auf die Temperaturverhältnisse. Einmal nämlich würde schon die Verkleinerung der Oberfläche der Röhre die Wärmeabgabe an die nächste Umgebung beeinträchtigen. Zweitens würde aber auch der Wasserstrom im Innern der Röhre *abcf* verzögert werden. Auch dies beeinträchtigt die Wärmeabgabe an die Umgebung, aber freilich nur in mittelbarer Weise. Es wurde schon oben bemerkt, dass die Flüssigkeit in der Röhre um so kälter sein muss, je weiter sie von *a* wegrückt, weil sie eben unterwegs Wärme verliert. Wenn nun das Wasser in *abc* beträchtlich langsamer strömt, so kühlt es sich unterwegs zu einer tieferen Temperatur ab und kann also in den späteren Abschnitten der Röhre um so weniger Wärme an die immer gleich warm gedachte Umgebung abgeben. Es mag noch besonders ausgesprochen werden, dass sich diese beiden Sätze keineswegs widersprechen: Das Wasser kommt bei langsamerem Strömen kälter am Ende der Röhre an und es ist dennoch in der Zeiteinheit weniger Wärme von dem Rohre aus abgegeben, als bei rascherem Strome. Man braucht nur ein Beispiel in Zahlen sich zu denken. Der raschere Strom führe per Minute 6 kg Wasser durch den Röhrenquerschnitt und es komme um 2° abgekühlt am Ende der Röhre an, dann giebt die Röhre per Minute 12 Wärmeeinheiten ab. Bei langsamerem Strömen kühle sich nun das Wasser um 4° ab, aber es passire dafür auch nur 1,5 kg Wasser per Minute jeden Querschnitt der Röhre, dann gehen nur 6 Wärmeeinheiten per Minute von der Röhre an die Umgebung.

Fig. 67.



Da nun durch Verengerung der Röhre *abc* aus zwei Gründen die Abgabe der Wärme von ihr an die Umgebung beeinträchtigt wird, so

würde offenbar die Temperatur hier an der Fensterwand von 18° auf einen niedrigeren Grad herabsinken, wenn alles Uebrige gleich bliebe. Nach der Voraussetzung aber wird nur, wenn die Temperatur an den Aussenwänden 18° ist, die ganze von 10 kg Kohle in der Stunde gelieferte Wärme nach aussen abgegeben, dies muss aber nothwendig auf die Dauer der Fall sein. Die Temperatur von 18° an den Fensterwänden muss also jetzt, wo weniger Wärme von der Röhre *abc* geliefert wird, dadurch erhalten werden, dass mehr Wärme vom Innern des Zimmers herandringt. Dies kann aber nur dann geschehen, wenn dort die Temperatur höher wird als 20°, denn es lag ja in der ursprünglichen Voraussetzung, dass bei 20° im Innern eben nur so viel Wärme nach aussen dringt, dass dieselbe plus der von der Röhre *abc* im weiten Zustande gelieferten die ganze von der Fensterwand abzuleitende ergiebt.

Das Ergebniss der vorstehenden Betrachtung können wir daher zusammenfassen: Verengerung der an den Fenstern vorübergeführten Heizröhren beeinträchtigt die Wärmeableitung im Ganzen, und wenn alle übrigen Bedingungen der Wärmeableitung und Wärmebildung gleich bleiben, wird dadurch die Temperatur im tieferen Innern erhöht. Wir werden daher irgend eine andere Wärmeableitungsbedingung günstiger stellen dürfen, wenn trotzdem die Temperatur im Innern dieselbe bleiben soll. Es ist namentlich denkbar, dass, wenn mit Verengerung der an den Fenstern vorbeigeführten Heizröhren gleichzeitig die Temperatur der äusseren Luft beispielsweise von 8° auf 0° sinkt, bei 10 kg Kohlenverbrauch per Stunde die Temperatur von 20° im Innern erhalten bleibt. Dies kann aber auch so ausgedrückt werden: Wenn die Temperatur der äusseren Luft von 8° auf 0° sinkt, so kann die dadurch bedingte Begünstigung der Wärmeabgabe compensirt werden durch Verengerung der an den Fenstern vorbeigeführten Heizröhren, dergestalt, dass nach wie vor bei 10 kg Kohlenverbrauch per Stunde die Temperatur von 20° im Innern erhalten bleibt. Wenn dies der Fall ist, dann wird in der That die Temperatur in der Nähe der Fensterwände von 18° herabsinken; sie darf eben auch nicht mehr so hoch bleiben, denn damit die von 10 kg Kohle gelieferte Wärme in einer Stunde durch die Fensterwände zu einer 0° warmen Atmosphäre entweicht, darf die Temperatur auf der innern Seite dieser Wände nicht so hoch sein, als wenn dieselbe Wärmemenge zu einer 8° warmen Atmosphäre entweichen sollte. Ist aber die Temperatur in der Gegend der Fenster einmal niedriger als 18°, so kann auch bei 20° im Innern des Zimmers von dorther mehr Wärme herausdringen, wie es der stationäre Zustand des Wärmestromes verlangt.

Den an den Fensterwänden vorübergeführten Heizröhren des gedachten Hauses entsprechen, wie schon bemerkt, ganz genau die Blutgefässe der Haut. Sie füllen sich fortwährend vom Herzen her mit warmer Flüssigkeit und ergiessen dieselbe mehr oder weniger abgekühlt

wieder in das gemeinschaftliche Behältniss. Ihre Weite ist im grössten Maassstabe veränderlich, was sich augenscheinlich im abwechselnden Erröthen und Erbleichen der Haut zeigt. Diese Erscheinung beweist insbesondere, dass schon die Vergrösserung der Gesammtoberfläche der Blutgefässe der Haut durch Erweiterung der Gefässlumina nicht unbeträchtlich ist, abgesehen von der Beschleunigung des Blutstromes in denselben. Durch nervöse Zusammenhänge ist nun die Weite der Hautgefässe geradezu mit der äusseren Lufttemperatur in ursächlichen Zusammenhang gebracht. Sinkt diese, so ziehen sich die Hautarterien zusammen, und es sinkt die Temperatur des ganzen Cutisgewebes in derselben Weise wie in unserem Beispiel die Temperatur der Luft an der inneren Seite der Fensterwände sinkt. Dadurch wird dann der Wärmezufluss vom Innern des Körpers her (insoweit er nicht durch den Blutzufluss der Hautgefässe, sondern durch directe Leitung in den Geweben vermittelt ist) vermehrt um so viel, als der Wärmeabfluss aus den Blutgefässen vermindert ist. Im Ganzen soll ja eben der Gesammtwärmestrom vom Körper nach aussen trotz des Sinkens der äusseren Lufttemperatur unverändert bleiben.

Im menschlichen Körper ereignet sich vielleicht zuweilen auch der Fall, den wir in unserer obigen Betrachtung zunächst bloss zur Erläuterung fingirt haben, nämlich der Fall, dass sich die Blutgefässe der Haut contrahiren, ohne dass eine andere Wärmeableitungsbedingung in entgegengesetztem Sinne geändert wird, und dass dadurch die Temperatur des Innern steigt. Es ist wohl nunmehr von selbst klar, dass die Veränderung des Durchmessers der Hautblutgefässe, wie Veränderungen der äusseren Lufttemperatur, so auch Veränderungen in der Wärmebildung compensiren kann. Steigert sich diese, so würde an sich die innere Körpertemperatur steigen, wenn sich aber gleichzeitig die Hautblutgefässe ausdehnen, so kann bei gleichbleibender Temperatur das grössere Wärmequantum in der Zeiteinheit den Körper verlassen. Auch diese Dinge stehen unter Vermittelung nervöser Mechanismen offenbar in ursächlichem Zusammenhange, was die Physiologie zu entwickeln hat.

Ein anderes Mittel der Temperaturerhaltung besteht in der Veränderung des Durchfeuchtungsgrades der Haut. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass, unter übrigens gleichen Bedingungen, bei feuchter Haut mehr Wärme entweichen kann als bei trockener Haut. Bei feuchter Haut kommt nämlich zum Wärmeverlust durch Leitung und Strahlung noch ein solcher durch Wasserverdunstung. Dieser ist möglichst gross, wenn die Feuchtigkeit der Haut eine vollständige Nässe ist, d. h. wenn die Haut von einer Schicht flüssiges Wassers ganz bedeckt ist. Wenn die Haut eben nur mehr oder weniger feucht ist, so kann der Wärmeverbrauch zur Wasserverdunstung nicht so gross sein, weil sich dann die überstehende Luftschicht nicht ganz mit Wasserdampf sättigt, denn es wird dann das flüssige Wasser mit mehr oder weniger grosser hygroskopischer Kraft von der Epidermis zurückgehalten. Wie sich die Natur

des in Rede stehenden Mittels der Temperaturregulirung bedient, kann man an sich selbst sehr leicht beobachten. Wenn durch irgend eine Ursache, z. B. durch Muskelanstrengung, die Wärmebildung bedeutend gesteigert wird, so wird auf die ganze Hautoberfläche eine Flüssigkeitsschicht, nämlich der Schweiss ergossen, dessen Verdunstung eine Wärmeabgabe verursacht, welche die Mehrbildung von Wärme ganz oder wenigstens theilweise compensirt.

Unter den Bedingungen der Wärmeableitung haben wir einige, um die Betrachtungen nicht allzusehr zu verwickeln, bis jetzt ganz unerwähnt gelassen. Eine, die ohne Zweifel von sehr grossem Einflusse ist, mag hier noch kurz besprochen werden, es ist der Bewegungszustand der umgebenden Luft. Es ist ohne Weiteres einleuchtend, dass bewegte Luft der Haut unter sonst ganz gleichen Bedingungen mehr Wärme entziehen muss, als ruhende Luft. Zwar hat dieser Umstand auf die Ausstrahlung keinen Einfluss, wohl aber auf die Ableitung von Wärme und auf die Wasserverdunstung. Da nämlich die eigentliche Wärmeleitungsfähigkeit der Gase jedesfalls sehr gering ist, so geschieht die Wärmeableitung vom Thierkörper zur umgebenden Luft überall wesentlich durch die Bewegung der letzteren. Ist sonst keine Bewegungsursache der Luft vorhanden, so erwärmen sich die der Haut anliegenden Lufttheilchen, werden dünner und leichter, steigen auf und werden durch kältere nachrückende ersetzt, mit denen ein gleiches geschieht. Auf diese Weise kommt aber in der Zeiteinheit offenbar eine viel geringere Luftmenge mit der Haut in Berührung, als wenn noch andere Ursachen (sogenannter Zug) die ganze Luftmasse in raschere Bewegung setzt. Obendrein verlassen im letzteren Falle die Lufttheilchen die Haut schon, ehe sie sich so weit erwärmt haben, wie sie es bei ruhender Luft thun müssen, um aufsteigen zu können. Man kann also sagen, dass in bewegter Luft die Haut fortwährend mit kälteren Lufttheilchen in Berührung ist, als bei ruhender Luft, der Wärmestrom wird also durch die Bewegung in mehrfacher Weise begünstigt. Ganz gleich ist es mit der Verdunstung, die bedeutend vermehrt werden muss, wenn immer noch lange, ehe eine Sättigung mit Wasserdampf hat eintreten können, neue relativ trockene Luftmassen herbeigeführt werden.

Bestimmte quantitative Angaben lassen sich bis jetzt noch nicht darüber machen, in welchem Maasse, etwa durch eine bestimmte Geschwindigkeit des Luftzuges, die Wärmeableitung begünstigt wird. Dass aber der Einfluss des Luftzuges sehr gross ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Zeiten vergleicht, innerhalb deren sich eine Thermometerkugel in ruhender und in bewegter Luft von gleicher Temperatur um eine gegebene Anzahl von Graden abkühlt, d. h. dasselbe Quantum von Wärme verliert. Man wird immer finden, dass dies in bewegter Luft sehr viel rascher geschieht als in ruhender. Auch schon das subjective Gefühl belehrt uns unmittelbar, dass bewegte Luft, ceteris paribus, unserem Körper viel mehr Wärme entzieht als ruhende.

Natürlich kann auch diese Bedingung mehr oder weniger compensirt werden durch die inneren Bedingungen der Wärmeableitung, d. h. durch die Weite der Hautblutgefässe und den Durchfeuchtungsgrad der Haut.

So lange die vorstehend besprochenen Compensationseinrichtungen normal functioniren, bleibt die Körpertemperatur zwischen ihren normalen Grenzen selbst bei ganz gewaltigen Aenderungen einzelner Factoren. So producirt z. B. der Körper bei angestrengter Muskelarbeit in der Zeiteinheit wohl zehnmal soviel Wärme als im Schlafe und dennoch genügen die Einrichtungen zur Temperaturregulirung, diese äusserst verschiedenen Wärmemengen bei nahezu gleicher Bluttemperatur in der Zeiteinheit fortzuschaffen. Fieberhitze kann also nur zu Stande kommen, wenn die der Regulirung des Wärmeabflusses dienenden Apparate in ihrer normalen Function gestört sind. Diese einfache Ueberlegung scheint sich merkwürdigerweise den Schriftstellern über Fieberhitze noch nicht aufgedrängt zu haben, denn sie behandeln es als eine Alternative, ob dieselbe durch vermehrte Wärmebildung oder durch verminderten Wärmeabfluss zu Stande komme. In der That liegt gar keine Alternative vor. Es wird freilich sehr wahrscheinlich im Fieber mehr Wärme in der Zeiteinheit gebildet als gewöhnlich, allein dadurch würde keine Temperaturerhöhung hervorgebracht, wenn die Apparate zur Regulirung des Wärmeabflusses gehörig functionirten, denn diese Apparate können, wie soeben angedeutet wurde, die enormsten Wärmemengen bewältigen.

Wir haben bisher die Temperatur im Innern des Körpers überall gleich angenommen und nur der Haut eine niedrigere Temperatur zugeschrieben. Für eine erste Annäherung ist dies auch ohne Zweifel erlaubt, es kann aber theoretisch nicht streng richtig sein, da selbstverständlich die durch Verbrennung erzeugte Wärme nicht überall in gleichem Maasse frei wird, und da andererseits die Wärmeleitungsfähigkeit nicht unendlich gross ist. Es müssen also nothwendig auch im Innern des Körpers Temperaturdifferenzen stattfinden, um den Wärmestrom von den verschiedenen Verbrennungsherden nach aussen im Gange zu erhalten. Diese Temperaturdifferenzen, so klein sie auch sind (sie werden sich selten über $1^1/_2{}^0$ erheben), haben für manche physiologische und namentlich für manche pathologische Fragen grosses Interesse. Wo es sich nämlich eben um die Auffindung der Hauptherde der Verbrennung handelt, muss man auf diese localen Temperaturunterschiede vor Allem sein Augenmerk richten. Jedoch sind sie keineswegs allein maassgebend. Die Bedeutung der Localtemperaturen ist genau dieselbe wie die Bedeutung der Gesammtkörpertemperatur, und man muss sich wohl hüten, dieselbe zu überschätzen. Die Höhe der Localtemperatur ist ebensowenig ein unzweideutiger Maassstab für die Intensität der Wärmebildung am betreffenden Orte wie die durchschnittliche Gesammttemperatur für die durchschnittliche Intensität der Wärmebildung im ganzen Körper. Will man sich eine recht klare Vorstellung von der Bedeutung der Local-

temperatur machen, so denke man sich ein Stück der Körpersubstanz (etwa ein Cubikcentimeter) an der betreffenden Stelle ringsum abgegrenzt durch eine geschlossene Fläche. Durch die gedachte Grenzfläche wird nun von den Seiten her, wo wärmere Stellen angrenzen, Wärme eindringen, nach den Seiten, wo kältere Stellen angrenzen, Wärme abfliessen. Wird in dem betreffenden Cubikcentimeter selbst Wärme frei, so muss, sofern der ganze Körper im Gleichgewichte der Temperaturen ist, offenbar der Wärmeabfluss den Wärmezufluss übertreffen, denn wenn dies Gleichgewicht, mithin die betreffende Localtemperatur, erhalten bleiben soll, so muss die sämmtliche in der Zeiteinheit zugeführte nebst der an Ort und Stelle gebildeten Wärme auch in jeder Zeiteinheit abgeführt werden. Eine besondere Complication würde in eine strenge Betrachtung dieses Gegenstandes kommen durch die Blutbewegung, von welcher dabei durchaus nicht abgesehen werden könnte, da sie hauptsächlich den Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Oertlichkeiten des Körpers vermittelt und mithin überwiegenden Einfluss auf die verschiedenen Localtemperaturen hat. Wir müssen uns daher begnügen, statt einer allgemeinen und strengen Entwickelung einige besondere Sätze aufzustellen.

Es ist erstens klar, dass die Temperatur des arteriellen Blutes im ganzen arteriellen Systeme bis in die nahezu capillaren Aeste hinein überall merklich dieselbe sein muss. In der That muss ja — Gleichgewicht der Temperaturen vorausgesetzt — jede folgende Blutmasse den linken Herzventrikel mit genau derselben Temperatur verlassen wie die vorhergehende. Irgend eine bestimmte Blutmasse aber, welche in einem gegebenen Augenblick den linken Herzventrikel verlässt, ist so schnell in den feineren Verzweigungen des arteriellen Systems angelangt, dass sie nicht Zeit hat, durch Wärmeabgabe, Wärmeaufnahme oder Wärmeerzeugung in sich selbst ihre Temperatur merklich zu ändern.

Je weiter wir nun im arteriellen Systeme vorwärts gehen, um so günstiger werden die Bedingungen für eine Aenderung der Bluttemperatur stromabwärts. Einmal nämlich strömt das Blut immer langsamer, es braucht also ein Bluttheilchen immer mehr Zeit, um eine Längeneinheit weiter zu kommen, kann also z. B. durch dieselbe Intensität des Verbrennungsprocesses in sich selbst (oder auch durch Wärmeaustausch) sich auf diesem Wege mehr erwärmen, als auf einem gleich langen Wege in den grösseren Arterien, den es vielleicht in 20mal kürzerer Zeit durchlief. Zweitens aber bietet eine bestimmte Blutmasse der Umgebung verhältnissmässig um so mehr Oberfläche, in je kleineren Gefässen sie eingeschlossen ist, wodurch der Wärmeaustausch mit der Umgebung in ganz ungeheurem Maasse begünstigt wird. Am Ende der Capillaren, respective in der abführenden Vene können wir also nicht dieselbe Temperatur erwarten wie in der zuführenden Arterie des betreffenden Bezirks. Ferner können wir auch nicht dieselbe Temperatur erwarten in verschiedenen Venen, welche das Blut aus verschiedenen Organen ab-

führen, obgleich in allen Arterien das Blut dieselbe Temperatur hatte. Wärmer als das arterielle Blut wird jedesfalls das venöse Blut solcher Organe sein, deren Eigentemperatur die des arteriellen Blutes übertrifft. Es kann aber auch aus solchen Organen wärmer zurückkommen, deren Eigentemperatur ein wenig tiefer liegt als die des arteriellen Blutes, wenn nur die dadurch vom Blute erlittene Wärmeentziehung überwogen wird von der Wärmeerzeugung, die im Blute selbst statthat, während es das Organ durchströmt. Ob dieser Fall in Wirklichkeit vorkommt, ist eine factische Frage. Die Möglichkeit ist theoretisch unzweifelhaft. Kälter als das arterielle wird das venöse Blut aller der Gefässprovinzen sein, deren Eigentemperatur viel tiefer liegt als die des arteriellen Blutes, wo dann die vom Blute an die Gewebe abgegebene Wärme mehr beträgt als die im Blute selbst durch Verbrennungen entwickelte. Dies wird höchst wahrscheinlich im Hauptgewebe sowie auch in allen dünnen ins Freie vorspringenden Körpertheilen, z. B. den Händen etc., der Fall sein. Es ist gut zu bemerken, dass bei solchen Theilen viel auf kleine Nebenumstände ankommen kann. Es wäre z. B. sehr wohl möglich, dass die Localtemperatur der Hand und mithin des venösen Blutes derselben merklich erhöht wird, wenn man sie zur Faust zusammenballt.

In den grösseren Venenstämmen mischt sich nun das venöse Blut verschiedener Organe, und endlich im rechten Herzen alle venösen Blutarten. Ob die Temperatur dieses Gemisches höher oder tiefer ist als die des arteriellen Blutes, das ist wieder eine rein thatsächliche Frage. Es ist (von G. v. Liebig) versucht worden, diese Frage experimentell zu beantworten, und zwar hat sich gezeigt, dass die Temperatur im rechten Herzen höher ist als im linken. Das heisst mit anderen Worten, die Erwärmung einzelner Blutpartien beim Fliessen durch die Organe hat das Uebergewicht über die Abkühlung anderer. Sehen wir das Versuchsergebniss als richtig an, so ist damit zu gleicher Zeit noch ein anderer wichtiger Umstand aufgedeckt, dass nämlich im Lungenkreislauf die abkühlenden Ursachen wirksamer sind als die erwärmenden, denn das wärmere Blut des rechten Herzens muss einen auf seinem Wege durch die Lungen zum linken Herzen die hier bestehende niedere Temperatur wieder annehmen, da wir einen stationären Zustand aller Wärmeströmungen im Körper, d. h. überall constante Temperaturen voraussetzen. Es ist übrigens schon an sich wahrscheinlich, dass in den Lungen die Wärmeabgabe die Oberhand hat über die Wärmeerzeugung an Ort und Stelle, denn die Verbrennungsprocesse innerhalb des Blutes werden überall nicht so sehr lebhaft sein, und wenn sie auch in den Lungencapillaren am stärksten wären, so wird der Gesammtbetrag doch immer noch nicht sehr beträchtlich sein. Der Wärmegewinn, welcher allesfalls gemacht wird durch die Absorption des Sauerstoffs — Absorption eines Gases in einer Flüssigkeit wird im Allgemeinen Wärme frei machen, — dürfte vollständig aufgewogen werden durch das Uebergehen der Kohlensäure

in den gasförmigen Zustand. Es dürfte daher die mächtige Abkühlung durch die Berührung des Blutes mit der kalten Athmungsluft und durch die Wasserverdunstung entschieden das Uebergewicht behaupten.

Es ist vielleicht gut, hier ausdrücklich zu bemerken, dass die vorstehenden Deductionen, in denen öfter die Rede ist von einem Ueberwiegen der Wärmeableitung über die Wärmeerzeugung an Ort und Stelle und einer daraus folgenden Abkühlung des Blutes, keineswegs dem Stationärsein des Wärmestromes widersprechen. In den letzten Betrachtungen handelt es sich um eine Veränderung der Temperatur eines Bluttheilchens, die es erleidet, indem man von einem Orte zum andern gelangt. An einem bestimmten Orte dagegen — z. B. in einem bestimmten Cubikcentimeter Lungensubstanz — befindet sich zu allen auf einander folgenden Zeiten Blut von derselben Temperatur. In dieses Cubikcentimeter Lungensubstanz muss daher während jeder Zeiteinheit genau ebenso viel Wärme hineingehen und resp. in ihm erzeugt werden, als daraus hervorgeht. Nun ist in unserem Beispiel offenbar der grösste Theil der hineingehenden Wärme, die in dem einströmenden Blute enthaltene und ebenso der grösste Theil der daraus hervorgehenden Wärme die im abströmenden Blute enthaltene, wir wollen die erstere B_e, die letztere B_a nennen. Heisse ferner die in unserem Cubikcentimeter Lunge selbst während der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge W und endlich die daselbst während der Zeiteinheit verlorene Wärmemenge v, dann fordert ein stationärer Zustand die Gleichheit $B_e + W = B_a + v$, und wenn nun $v > W$ ist, wie soeben wahrscheinlich gemacht wurde, so muss $B_e > B_a$ sein, d. h. das abströmende Blut muss weniger Wärme besitzen als das zuströmende, oder, da die Menge des in der Zeiteinheit abströmenden Blutes der Menge des zuströmenden gleich ist, jenes muss eine niedrigere Temperatur haben als dieses. Die vorstehende Betrachtung gilt natürlich für jedes beliebige vollständig abgegrenzte Stück der Körpersubstanz, nur muss man bedenken, dass die Grösse v im Allgemeinen eine Differenz zweier Grössen wäre $v = V - G$, wo V den gesammten Wärmeverlust des betrachteten Körperstückes an die Umgebung durch directe Leitung (d. h. nicht durch Blutströmung) bedeutet und G den gesammten Wärmegewinn von der Umgebung durch directe Leitung; es könnte ja in der That das betrachtete Körperstück auf der einen Seite an wärmere, auf der anderen an kältere Theile grenzen. Es kann auch unter Umständen $G > V$ sein. Da bei einem Stückchen Lunge offenbar ein Ueberschuss zu Gunsten des V vorhanden ist, so haben wir diesen sogleich bestimmt gedacht und mit v bezeichnet. Sollte die Betrachtung ganz allgemein bleiben, so müsste die Gleichung so geschrieben werden:

$$B_e + W = B_a + V - G \text{ oder } B_e + W + G = B_a + V.$$

Es muss nun ganz allgemein das Blut kälter aus einem Körpertheil ausströmen als es einströmt, wenn $V > W + G$ ist, im entgegengesetzten Falle strömt es wärmer aus.

An einem Orte, der von einem reichen arteriellen Capillargefässnetze rings umgeben ist und an welchem weder fortwährend Wärme erzeugt noch vernichtet[1]) wird, muss nothwendig die Temperatur des arteriellen Blutes herrschen. Beispielsweise werden die Kothmassen im Rectum auf die Dauer genau die Temperatur des umspülenden Blutes annehmen und behaupten, sowie auch eine daselbst etwa eingeführte Thermometerkugel, welche Anfangstemperatur sie auch gehabt haben möge. Der allgemeine ohne Weiteres einleuchtende physikalische Lehrsatz, wovon das Gesagte eine besondere Anwendung ist, wurde schon weiter oben angeführt, woselbst auch schon entwickelt wurde, dass auf ihm die Möglichkeit der Messung von Temperaturen im Innern des Körpers beruht.

Irgend eine Körperstelle, die ringsum von weniger warmen Stellen umgeben ist und deren Temperatur die des arteriellen Blutes übersteigt, muss nothwendig ein Herd der Wärmeerzeugung sein. In der That kann ja eine solche Körperstelle durch directe Leitung an die Umgebung nur Wärme verlieren, sie kann aber auch durch das zuströmende Blut nicht mehr Wärme erhalten, als ihr das abströmende entführt, da sich ja in ihr das arterielle Blut sicher nicht abkühlen kann, indem der Voraussetzung nach die Temperatur der Stelle höher ist als die des arteriellen Blutes, und Wärme nie von einem Körper niederer Temperatur (hier dem Blute) zu Körpern höherer Temperatur (hier das zunächst umgebende Gewebe) übergeht. Soll also diese Körperstelle fortwährend ihre Temperatur behaupten, so muss daselbst Wärme erzeugt werden.

Es kann aber auch eine Körperstelle Herd von Wärmebildung sein, die nicht ringsum an kältere Theile grenzt und deren Temperatur die des arteriellen Blutes nicht übersteigt. In der That sind ja höchst wahrscheinlich ausnahmslos alle Körperstellen in höherem oder niederem Grade Herde der Wärmebildung, nur ist es für solche Körperstellen, die theilweise an wärmere angrenzen oder deren Temperatur niedriger als die des arteriellen Blutes ist, nicht ohne Weiteres einleuchtend. Sie könnten ja möglicherweise alle die Wärme, die sie an die kälteren Theile der Umgebung abgeben müssen, von den wärmeren Theilen derselben oder vom arteriellen Blute beziehen. Um sicher zu sein, dass an einer Körperstelle von den fraglichen Temperaturverhältnissen Wärme erzeugt wird, müsste man wissen, dass ihr durch Zuleitung weniger Wärme mitgetheilt wird, als sie durch Ableitung verliert.

Die Localtemperatur ist überhaupt keineswegs ein directer Maassstab für die Intensität der Wärmeerzeugung an den verschiedenen Körperstellen. Wenn es auch, wie wir sahen, ohne Weiteres klar ist, dass die allerwärmsten Körperstellen nothwendig Sitze von Wärmeentwickelung sein müssen, so können doch recht gut andere Stellen von beträchtlich niederer Temperatur Sitze einer viel intensiveren Wärme-

---

[1]) Etwa in Arbeit verwandelt.

entwickelung sein, d. h. es kann an solchen Stellen möglicherweise in der Volumeinheit während der Zeiteinheit viel mehr Wärme frei werden. Dieser Satz ist zwar nur ein leicht ableitbares Corollar der sämmtlichen vorhergehenden Betrachtungen, da er aber doch nicht so ganz unmittelbar von selbst einleuchtet, wollen wir ihn durch ein Beispiel der Anschauung noch näher bringen. Denken wir uns ein Zimmer durch zwei Oefen geheizt, von denen der eine dicht am Fenster steht, der andere mehr in der Tiefe des Zimmers. Es wird alsdann sofort die Möglichkeit davon einleuchten, dass der Ofen am Fenster eine niedrigere Temperatur besitzt, als der in der Tiefe des Zimmers, obwohl im ersteren per Stunde eine grössere Menge Kohle verbrennt als im letzteren. Jener kann nämlich wegen der für ihn weit günstigeren Ableitungsbedingungen selbst bei niederer Temperatur in einer Stunde mehr Wärme abgeben als der andere. Dies Gleichniss passt vielleicht ganz genau auf die oberflächlich gelegenen Muskeln besonders der Extremitäten. In ihnen, wie in den Muskeln überhaupt, ist wahrscheinlich der Verbrennungsprocess am allerlebhaftesten, dennoch sind sie bedeutend kälter als z. B. die Nieren und das Rectum, wo sicher eine weniger intensive Wärmeentwickelung statt hat. Die Extremitätsmuskeln sind aber eben wie ein Ofen am Fenster für die Wärmeabgabe unter sehr günstige Bedingungen gestellt.

Wir behandeln jetzt noch einige Fragen, die sich auf zeitweilige Veränderungen des stationären Zustandes der Wärmeströme und mithin Veränderungen der Temperaturen beziehen.

Zeitweiliges Steigen einer Localtemperatur ist kein sicherer Beweis für eine Steigerung der Verbrennungsprocesse an Ort und Stelle, ebensowenig wie Steigerung der Gesammtkörpertemperatur nothwendig von einer Steigerung der gesammten Verbrennungsprocesse herzurühren braucht. Steigerung der Wärmebildung an Ort und Stelle ist allerdings eine von den Ursachen, durch welche möglicherweise die Localtemperatur erhöht werden kann. Es kann aber auch durch andere Ursachen bewirkt werden, nämlich erstens durch Vermehrung des Wärmezuflusses zu der fraglichen Körperstelle. Diese selbst ist wieder auf zweierlei Weisen möglich, einmal dadurch, dass benachbarte Körperstellen wärmer werden und der betrachteten Stelle direct mehr Wärme zuleiten; oder aber dadurch, dass der Blutstrom beschleunigt wird. Diese letztere Möglichkeit, die aus den früheren Betrachtungen sattsam erhellt, ist jedoch — was wichtig ist zu beachten — nur da gegeben, wo die Localtemperatur niedriger als die des arteriellen Blutes ist, denn nur an solchen Stellen kann das Blut Wärme lassen, von Stellen dagegen, deren Localtemperatur die des arteriellen Blutes übersteigt, nimmt das durchströmende Blut mehr Wärme mit als es hinbringt, an solchen Stellen wird also Beschleunigung des Blutstromes an und für sich eine Ursache der Temperaturerniedrigung sein. Es ist ferner ersichtlich, dass Vermehrung des Blutzuflusses allein die Tem-

peratur eines Ortes niemals über die Temperatur des arteriellen Blutes hinaus steigern könne, wo wir also (z. B. bei Entzündungen, bei Muskeln im Tetanus etc.) die Temperatur über die des arteriellen Blutes steigen sehen, da können wir mit Bestimmtheit sagen, dass ausser einer auffälligen Vermehrung des Blutzuflusses noch irgend eine andere Ursache gewirkt haben muss, entweder eine örtliche Steigerung des Verbrennungsprocesses oder die Ursache, die wir jetzt noch zu untersuchen haben. Es kann nämlich die Localtemperatur auch gesteigert werden dadurch, dass die Wärmeableitungsbedingungen an der betreffenden Stelle ungünstiger werden. Dies kann insbesondere so geschehen, dass benachbarte kältere Körperstellen, nach welchen hin die Wärmeableitung stattfindet, wärmer werden, dann kann natürlich bei der alten Localtemperatur nicht mehr so viel Wärme in der Zeiteinheit dorthin entweichen. Hieraus wird erklärlich, dass Vermehrung der Verbrennungsprocesse in den kälteren Oertlichkeiten des Körpers auch an den sonst schon wärmeren Stellen die Temperatur steigern könne, ohne dass hier selbst die Wärmebildung vermehrt wäre. Jene werden nämlich zunächst wärmer und hemmen dadurch den Wärmeabfluss von den ursprünglich allerwärmsten Orten. Auch das oben schon benutzte Beispiel macht dies anschaulich. Wenn wir in einem Zimmer den am Fenster stehenden und nach der Voraussetzung kälteren Ofen allein stärker heizen, so steigt nicht nur seine eigene Temperatur, sondern auch die des tiefer im Zimmer stehenden Ofens, und kann sogar fortwährend höher bleiben, weil eben seine Wärme jetzt nicht mehr so leichten Abfluss nach dem Fenster hin findet. So kann z. B. durch vermehrte Wärmebildung in den Extremitätenmuskeln sehr wohl die weit höhere Temperatur der innersten Körpertheile gesteigert werden [1]).

Wir wollen zum Schlusse dieses Capitels noch eine Frage genauer erörtern, die für die Lehre von den Entzündungen und den sie begleitenden Fiebern von grosser Wichtigkeit ist, nämlich die Frage: welche Localtemperaturen hätte man zu erwarten, wenn man die öfters vertheidigte Annahme macht, dass die bei einem Entzündungsfieber beobachtete Temperaturerhöhung lediglich durch einen am Orte der Entzündung gebildeten Wärmeüberschuss erzeugt und erhalten wird? Dies würde sich in der That ermitteln lassen, wenn man gewisse Data hätte, die wir allerdings gegenwärtig noch nicht besitzen, über die wir jedoch mehr oder weniger plausibele Annahmen machen können.

Um bestimmte Vorstellungen zu haben, wollen wir annehmen, es ent-

[1]) Obgleich seit dem Erscheinen der zweiten Auflage manche werthvolle Thatsachen über die localen Temperaturunterschiede bekannt geworden sind, glaubte ich doch die vorstehenden Erörterungen unverändert lassen zu dürfen, da sie rein theoretischer principieller Natur sind und es nicht wesentlich darauf ankommt, ob die lediglich als Beispiele benutzten Thatsachen den neuesten oder älteren Untersuchungen entnommen sind.

stehe bei einem Menschen von 60 kg Körpergewicht plötzlich, etwa durch Verwundung, eine Entzündung im Bereiche des Vorderarmes, und im Laufe von drei Stunden steige seine Gesammtkörpertemperatur um 1 Grad. Wir fragen uns nun, welche Temperatur müsste der Vorderarm (in seinem Innern) mindestens zeigen, wenn es denkbar sein sollte, dass jene fieberhafte Temperatursteigerung bloss durch Mehrbildung von Wärme im entzündeten Vorderarm bedingt wäre? Setzen wir die Wärmecapacität der menschlichen Körpersubstanz gleich der des Wassers, so sind 60 Wärmeeinheiten erforderlich, um die Temperatur des 60 kg schweren Menschen um 1 Grad zu steigern. Er muss also mindestens 60 Wärmeeinheiten in der fraglichen Zeit, oder 20 Wärmeeinheiten in einer Stunde **mehr** gebildet haben als sonst. Diese 20 Wärmeeinheiten sollen aber nach der Voraussetzung lediglich im Vorderarm frei geworden und von da aus im Körper verbreitet sein. Offenbar spielt dabei die directe Leitung der Wärme durch die Gewebe des Oberarms etc. eine sehr untergeordnete Rolle. Wir können annehmen, die Einführung jener 20 Wärmeeinheiten in den übrigen Körper sei lediglich durch das aus dem Vorderarm zurückströmende Blut vermittelt. Es muss also das während einer Stunde aus dem Vorderarm zurückgeströmte Blut im Ganzen 20 Wärmeeinheiten **mehr** geführt haben, als es normalerweise führt, daraus ist seine Temperatur zu berechnen, sowie wir seine Menge wissen. Es fliessen nun nach **Vierordt's** Schätzungen etwa 26 ccm per Secunde durch den Querschnitt der Arteria subclavia. Ich nehme willkürlich an, ungefähr der dritte Theil dieses Blutes, also etwa 8 ccm Blut, passire per Secunde den Querschnitt der zum Vorderarm gelangenden Arterien. Ebenso viel kommt natürlich in den Venen zurück. Es würde demnach in einer Stunde $8 \times 60 \times 60 = 28\,800$ ccm Blut, aus dem Vorderarm in den übrigen Körper kommen, welche ungefähr 29 kg wiegen. Dass dies nicht nothwendig lauter verschiedene Bluttheilchen sind, dass vielmehr möglicherweise einzelne bestimmte Blutquanta in dieser Menge mehrere Male zu rechnen sind, wenn sie eben während der betrachteten Stunde öfters durch den Vorderarm gehen, thut für unsere Betrachtung gar nichts zur Sache. Mit den 29 kg Blut sollen nun 20 Wärmeeinheiten **mehr** in den Körper zurückkommen, als sie ihm unter normalen Bedingungen zurückführen, dann muss aber ihre Temperatur um nahezu 0,7° höher sein als sie sonst ist, denn $29 \times 0,7$ giebt ungefähr 20. Wir setzen dabei, wie man sieht, voraus, dass die Wärmecapacität des Blutes gleich der des Wassers ist. Welche Temperatur nun das aus dem entzündeten Arme zurückströmende Blut haben müsste, das hinge ganz davon ab, welche Temperatur im **normalen** Zustande dieses Blut hat. Wir kennen freilich diese Temperatur nicht genau, doch ist anzunehmen, dass sie ziemlich tief unter der im Innern des Körpers herrschenden Temperatur von beiläufig etwa 37,5° liegt. Sie sei beispielsweise 37°, dann brauchte das Blut aus dem entzündeten Vorderarm nur mit einer Temperatur von 37,7°

zurückströmen, um die Erwärmung der Körpermasse um 1° in drei Stunden erklärlich zu machen.

Eine Correction, welche die gefundene Zahl noch erfordert, ist sofort ersichtlich. In den späteren Abschnitten der betrachteten Zeit strömt nämlich das Blut wegen der Erhöhung der Gesammtkörpertemperatur schon wärmer als 37,5 in den entzündeten Vorderarm ein und entzieht mithin dem Körper mehr Wärme als vorher. Davon muss natürlich das zurückströmende Blut wieder verhältnissmässig ebenso viel mitbringen als unter normalen Bedingungen und dazu noch den geforderten Ueberschuss, um die Körpertemperatur weiter zu steigern. In den späteren Abschnitten der betrachteten Stunden muss also die Temperatur des entzündeten Vorderarms jedesfalls noch höher als 37,7 liegen, wenn auch nicht um den ganzen Grad, welchen die Erhöhung der Körpertemperatur beträgt.

Man sieht, dass die vorstehend entwickelten Folgerungen aus der Hypothese über den Ursprung der Wärme bei Entzündungsfiebern keineswegs auf augenscheinlich unmögliche Thatsachen führen. Wir wollen nun auch noch den zweiten Theil der oben aufgestellten Frage behandeln, nämlich welche Temperatur wir der obigen Hypothese zufolge in einem entzündeten Theile zu erwarten hätten, wenn eine abnorme Fiebertemperatur des Gesammtkörpers lediglich durch Mehrproduction von Wärme an der entzündeten Stelle dauernd erhalten werden sollte. Wir nehmen wieder einen 60 kg wiegenden Menschen mit einer Entzündung des Vorderarms. Seine Körpertemperatur sei im Verlaufe einiger Stunden von 37 auf 40° gestiegen und erhalte sich auf dieser Höhe stationär. Wir wollen nun — freilich ziemlich willkürlich — die Annahme machen, die Wärmeableitungsbedingungen während des Fiebers wären im Ganzen dieselben wie im normalen Zustande, dann wäre man wohl berechtigt weiter anzunehmen: die Wärmeabgabe des fiebernden Körpers während der Zeiteinheit verhält sich zur normalen wie die Differenz zwischen der Fiebertemperatur und der Lufttemperatur zur Differenz zwischen der normalen und der Lufttemperatur. Ist also die Lufttemperatur 20° und nehmen wir wie oben (Seite 226) an, der Körper verliere in der Minute 1,87 Wärmeeinheiten, dann müsste das gedachte Individuum in seinem Fieber per Minute eine Wärmemenge x verlieren, die sich berechnet aus der Gleichung $(37 - 20) : 1{,}87 = (40 - 20) : x$ oder $17 : 1{,}87 = 20 : x$. Daraus findet sich $x = 2{,}2$. Es müssten demnach im Fieber auch 2,2 statt 1,87 Wärmeeinheiten jede Minute erzeugt werden, d. h. 0,33 Wärmeeinheiten mehr als gewöhnlich. Diese sollen nun aber nach der Hypothese ausschliesslich im Vorderarm entstehen und durch sein venöses Blut dem Körper zufliessen. Nach den obigen Voraussetzungen kommen jede Minute $8 \times 60 = 480$ g oder 0,480 kg Blut in den Vorderarm und wieder daraus zurück. Nehmen wir wie vorhin an, dass unter normalen Umständen das aus dem Vorderarm zurückströmende Blut um 0,5° kälter wäre als das zuströmende, so hiesse das mit anderen Worten, der Wärmeverlust in Vorderarm und Hand übertrifft die Wärme-

bildung daselbst unter normalen Verhältnissen um 0,240 Wärmeeinheiten in der Minute. Sollte nun der berechnete Mehrverlust an Wärme im Betrage von 0,33 Einheiten durch Wärmeproduction im Vorderarm allein gedeckt werden, so müssten die per Minute aus ihm zurückströmenden 0,48 kg Blut 0,33 Wärmeeinheiten mehr in den Körper zurückführen als unter normalen Verhältnissen. Unter diesen aber brachten sie 0,24 Wärmeeinheiten weniger zurück, als dieselbe Blutmenge beim Zufliessen enthielt. Nennen wir diese W, so muss also jetzt die zurückgebrachte nicht $W - 0{,}24$, sondern $W - 0{,}24 + 0{,}33 = W + 0{,}09$ sein, d. h. das zurückfliessende Blut muss 0,09 Wärmeeinheiten mehr enthalten als das zufliessende oder muss um etwa $0{,}19^0$ wärmer sein, d. h. unter den gemachten Annahmen eine Temperatur von $40{,}19^0$ haben. Dürfte man, was freilich kaum zulässig ist, den normalen Wärmeverlust noch höher anschlagen, so könnte der erhöhte Wärmeverlust beim Fieber durch Production im Vorderarm gedeckt werden mit einer venösen Bluttemperatur, welche noch nicht einmal die arterielle Bluttemperatur erreicht. Man sieht leicht, dass die Localtemperatur eines Entzündungsherdes unter der zu discutirenden Annahme von der localen Entstehung der Fieberwärme um so weniger hoch zu sein braucht, je oberflächlicher der Entzündungsherd liegt und je mehr Blut ihn in der Zeiteinheit durchströmt.

Obgleich heutzutage wohl alle Pathologen die locale Entstehung der Fieberwärme verwerfen, dürfte die vorstehende Erörterung doch einiges Interesse haben als ein Beispiel, wie derartige Untersuchungen zu führen sind.

Fünftes Capitel.

Methoden zur Bestimmung der Muskelwärme.

Eine wichtige Aufgabe der Versuchstechnik auf dem Gebiete der Lehre von der thierischen Wärme besteht darin, die Temperaturerhöhung zu bestimmen, welche ein isolirter Muskel bei seiner Reizung erleidet. Natürlich kann diese Aufgabe nur am Kaltblütermuskel, also insbesondere am Froschmuskel gelöst werden, da der Warmblütermuskel nach seiner Trennung vom übrigen Körper nicht lange genug reizbar bleibt. Da aber die Froschmuskeln sehr wenig Masse haben und da die Temperaturerhöhungen, um deren Bestimmung es sich handelt, sehr klein sind, so können nur thermometrische Apparate angewandt werden, die schon bei Aufnahme überaus kleiner Wärmemengen deutlich sichtbare Angaben liefern. An gewöhnliche Thermometer, bei denen die Ausdehnung einer

Flüssigkeit als Zeichen für Erwärmung benutzt wird, kann darum gar nicht gedacht werden. Man ist auf Anwendung thermoelektrischer Apparate angewiesen. Das Princip thermoelektrischer Temperaturmessung ist in jedem Lehrbuche der Physik (siehe Müller-Pfaundler, Lehrb., 8. Aufl., Bd. III, S. 601) dargestellt, aber die in den Lehrbüchern beschriebenen Apparate bedürfen besonderer Modifikationen, um zu myothermischen Untersuchungen anwendbar zu sein.

Es sind in neuester Zeit vorzugsweise zwei Thermosäulen zu Versuchen über Muskelwärme im Gebrauch. Die von Heidenhain construirte Thermosäule besteht wie die zu den Versuchen über Wärmestrahlung gebrauchten aus kleinen Stäbchen von Wismuth und Antimon. Die beiden Stirnflächen, welche — die eine die ungeraden, die andere die geraden — Löthstellen enthalten, bilden Rechtecke und sind so klein, dass sie vom Musculus gastrocnemius eines mässig grossen Frosches vollständig bedeckt werden. Das Säulenende, welches dem Muskel angelegt zu werden bestimmt ist, steckt in einem Korkrähmchen, dessen Vorderfläche eine Erweiterung der Stirnfläche der Säule bildet, so dass die Sehne eines an diese Fläche gelegten Muskels mit einer Nadel an den Kork angespiesst werden kann.

Die Säule ist an einem Hebelwerke aus zwei Parallelogrammen so befestigt, dass sie sich auf und ab, vor und zurück ein wenig bewegen kann und dass dabei die Stirnfläche stets vertical und einer bestimmten Verticalebene parallel bleibt. Diese Maschinerie hat den Zweck, dass die Säule den Zusammenziehungen des an ihrem vorderen Ende befestigten Muskels folgen kann. Die Enden der Säule laufen in abwärts gebogene Kupferdrähte aus, deren untere Enden in hinlänglich geräumige, oben offene Quecksilbergefässe eintauchen, so dass sie auch bei den grössten vorkommenden Bewegungen weder an die Wände anstossen, noch aus dem Quecksilber auftauchen. Das Quecksilber der Gefässe ist andererseits mit den Enden des Galvanometers verknüpft und damit der Kreis der Thermosäule geschlossen.

Die Thermosäule nebst den erwähnten Hülfsapparaten ist in eine feuchte Kammer eingeschlossen. Am Boden derselben ist ausserdem ein Stativ befestigt, welches eine Knochenklemme trägt, in die der Ursprungsknochen des zu untersuchenden Muskels so gefasst ist, dass er senkrecht herabhängend die vordere Stirnfläche der Säule berührt und vollständig zudeckt. Seine Sehne ist, wie schon erwähnt, unter der Säulenfläche an dem Korkrähmchen derselben festgespiesst. An das darüber hinaushängende Ende der Sehne ist ein Faden angebunden, der durch ein Loch im Boden der feuchten Kammer frei hindurchgeht und mit einer darunter in der freien Luft stehenden myographischen Vorrichtung verknüpft ist, welche gestattet, die mechanische Wirkung der Muskelzusammenziehung zu beobachten.

Zur Vervollständigung der ganzen Vorrichtung gehören natürlich noch einige Stücke, welche es ermöglichen, durch Handgriffe ausserhalb

der feuchten Kammer den Muskel nach Belieben zu reizen. Es dienen hierzu in passender Stellung am Boden der feuchten Kammer befestigte Elektroden, über welche der Nerv des zu untersuchenden Muskels gelegt ist. Mit ihnen verknüpfte Drähte gehen durch Löcher im Boden der feuchten Kammer zu den Polen einer elektromotorischen Vorrichtung — Inductor oder constante Kette — in deren Kreis ein geeigneter Unterbrecher eingeschaltet ist, um dem Nerven einzelne elektrische Schläge, tetanisirende Schlagfolgen oder constante Ströme zuführen zu können.

Der Gang eines Versuches ergiebt sich von selbst. Nachdem das Präparat an seinem Platze aufgehängt und die andere Säulenfläche, was nicht nothwendig aber sehr zweckmässig ist, auch noch mit einem feuchten Körper, etwa einem todten Muskelstückchen bedeckt ist, wartet man zunächst die annähernde Ausgleichung der Temperaturen ab, d. h. man wartet, bis das Galvanometer vollständig in Ruhe oder wenigstens nur noch in sehr langsamer Bewegung ist. Nun kann eine Reizung des Muskels vorgenommen werden und sofort wird man eine Bewegung des Galvanometermagnetes beobachten im Sinne einer Erwärmung der vorderen Säulenfläche, an welcher der gereizte Muskel anliegt. Die Grösse dieser Bewegung giebt auch ein ungefähres Maass für die Temperaturerhöhung desselben, d. h. für die Menge der bei der Reizung in ihm entwickelten Wärmemenge.

Der beschriebene Heidenhain'sche Apparat lässt an Empfindlichkeit nichts zu wünschen übrig, wenn man sich zur Beobachtung des Thermostromes eines hinlänglich empfindlichen Spiegelgalvanometers bedient, wie solche in jedem ausführlichen Lehrbuche der Physik (Müller-Pfaundler, 8. Aufl., Bd. III, S. 465) genau beschrieben sind. Es ist aber mit dieser Vorrichtung principiell unmöglich, auch nur in entfernter Annäherung die Temperaturerhöhung des Muskels und somit die entwickelte Wärmemenge quantitativ zu bestimmen. Die Löthstellen der Säule erstrecken sich nämlich bis zu einer gewissen Tiefe unter ihre Stirnfläche, welcher der Muskel nur anliegt. Wenn also auch diese selbst die Temperatur des Muskels genau annimmt, so bleiben doch die tieferen Schichten der Löthstellen dahinter zurück und der Strom im Galvanometer entspricht also nie der Muskeltemperatur, sondern der mittleren Temperatur der Löthstellen. Dazu kommt noch die verhältnissmässig grosse Metallmasse der Löthstellen der Säule, welche zur Erhöhung ihrer Temperatur dem Muskel eine grosse Wärmemenge entziehen muss.

Von diesen Erwägungen ausgehend, habe ich vor einigen Jahren eine neue Thermosäule construirt, welche von diesen Uebelständen frei ist, und die deshalb auch schon von mehreren anderen Forschern in Gebrauch genommen ist. Sie besteht aus äusserst dünnen Streifchen von Neusilber und Eisenblech. Die ungeraden Löthstellen der Kette stehen in einer Reihe über einander und bilden ein Kämmchen, dessen Zinken nicht viel dicker als Papier sind. Die Mitte der Säule ist der Festigkeit wegen in ein kleines Gypsblöckchen eingegossen, aus dem

vorn das eben erwähnte Kämmchen mit den ungeraden und hinten ein ähnliches mit den geraden Löthstellen vorragt. Die Enden der Kette, durch stärkere Kupferdrähte gebildet, sind gleichfalls durch das Gypsblöckchen gezogen. Sie ragen zu beiden Seiten hervor, sind abwärts gebogen und werden auf den Boden kleiner Quecksilbergefässe aufgestützt, was der ganzen Säule gestattet, kleine Bewegungen mitzumachen, ohne dass die Leitung zum Galvanometer sich ändert, welche selbstverständlich von den beiden erwähnten Quecksilbergefässen zu den Enden der Galvanometerrolle geführt ist.

Die Construction dieser Thermosäule ist nicht wie die der Heidenhain'schen auf Verwendung des Gastrocnemius, sondern auf ein anderes Muskelpräparat berechnet, welches sich aus dem Froschkörper herstellen lässt und sich ganz besonders zu myothermischen und myodynamischen Versuchen eignet. Schneidet man nämlich von beiden Froschbeinen alle Muskeln weg bis auf die Gruppen, welche auf der inneren Seite vom Becken zum Unterschenkelknochen gehen, löst auch noch die Oberschenkelknochen ganz heraus und schneidet die Unterschenkelknochen dicht unter dem Knie, d.h. unter dem Ansatz der erhaltenen Muskelgruppen ab, so hat man das in Rede stehende Präparat. Befestigt man nämlich das Becken jetzt an einem Stativ, so hängen die beiden Muskelgruppen, die rechte und die linke senkrecht so dicht neben einander herab, dass sie gleichsam eine stetige Masse bilden. An die beiden Unterschenkelknochenstücke kann man bequem einen Haken befestigen, durch den sich das Präparat mit einer myographischen Vorrichtung verknüpfen lässt. In den Spalt zwischen den beiden Muskelgruppen lässt sich nun das oben beschriebene vordere Kämmchen der Thermosäule einschieben, so dass es gleichsam in die Muskelmasse versenkt ist, ohne dass auch nur eine Faser verletzt wäre. Erwärmt sich jetzt die Muskelmasse, so wird die von derselben rings umgebene Reihe der Löthstellen bei ihrer verschwindend kleinen Masse augenblicklich die erhöhte Temperatur genau annehmen, und die Stromstärke im Galvanometer entspricht also der Muskeltemperatur resp. der Differenz derselben von der Temperatur des anderen Kammes der Säule. Ist der Apparat empirisch graduirt, so ist man im Stande, damit absolute Messungen der Erhöhung der Muskeltemperatur auszuführen.

Die übrigen Einrichtungen sind natürlich bei Versuchen mit der zuletzt beschriebenen Thermosäule genau dieselben wie bei Versuchen mit der Heidenhain's. Ich habe dieselben jedoch in manchen Punkten abgeändert, die für die myothermische Versuchstechnik nicht unwesentlich sein dürften. Es ist erstens äusserst zweckmässig, die feuchte Kammer, in welche der Muskel mit der Thermosäule eingeschlossen ist, so klein als möglich zu machen. In der grossen Heidenhain'schen feuchten Kammer dauert die Ausgleichung der Temperaturen ausserordentlich lange. Ich habe sie deshalb nicht grösser gemacht als absolut nöthig ist, um die unentbehrlichen Stücke gerade eben unter zu bringen. Die Wände der feuchten Kammer waren bei Heidenhain und allen

bildung daselbst unter normalen Verhältnissen um 0,240 Wärmeeinheiten in der Minute. Sollte nun der berechnete Mehrverlust an Wärme im Betrage von 0,33 Einheiten durch Wärmeproduction im Vorderarm allein gedeckt werden, so müssten die per Minute aus ihm zurückströmenden 0,48 kg Blut 0,33 Wärmeeinheiten mehr in den Körper zurückführen als unter normalen Verhältnissen. Unter diesen aber brachten sie 0,24 Wärmeeinheiten weniger zurück, als dieselbe Blutmenge beim Zufliessen enthielt. Nennen wir diese W, so muss also jetzt die zurückgebrachte nicht $W - 0,24$, sondern $W - 0,24 + 0,33 = W + 0,09$ sein, d. h. das zurückfliessende Blut muss 0,09 Wärmeeinheiten mehr enthalten als das zufliessende oder muss um etwa 0,19° wärmer sein, d. h. unter den gemachten Annahmen eine Temperatur von 40,19 haben. Dürfte man, was freilich kaum zulässig ist, den normalen Wärmeverlust noch höher anschlagen, so könnte der erhöhte Wärme... im Fi... durch Production im Vorderarm gedeckt werden m... ...ratur, welche noch nicht einmal die arterielle ... Man sieht leicht, dass die Localtemperatur ein... ...er der zu discutirenden Annahme von der local... ... um so weniger hoch zu sein braucht, ...ungsherd liegt und je mehr Blut ihn in d...

...l alle Pathologen die locale Entstehung ... ...fte die vorstehende Erörterung doch eini... ...Beispiel, wie derartige Untersuchungen ...

...tes Capitel.

...mmung der Muskelwärme.

... der Versuchstechnik auf dem Gebiete ... Wärme besteht darin, die Temperaturerhö... ... isolirter Muskel bei seiner Reizung er... ...gabe nur am Kaltblütermuskel, also insbeso... ...t werden, da der Warmblütermuskel nach ...gen Körper nicht lange genug reizbar bleibt. ...skeln sehr wenig Masse haben und da die Temp... ...deren Bestimmung es sich handelt, sehr klein si... ...rmometrische Apparate angewandt werden, die sch... ...raus kleiner Wärmemengen deutlich sichtbare A... gewöhnliche Thermometer, bei denen die Ausdehnun...

SECHSTER ABSCHNITT.

OPTIK.

Erstes Capitel.

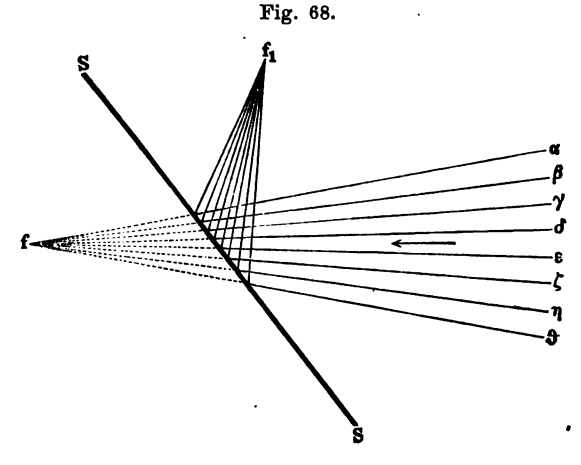
Von der Brechung homocentrischer Strahlenbündel.

Einen Complex von Lichtstrahlen, deren Richtungen sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, nennt man ein homocentrisches Strahlenbündel. Ein solches wird beispielsweise gebildet durch die Strahlen, welche ein leuchtender Punkt im leeren Raume oder in einem einfach brechendem Medium, wie Luft, nach allen Richtungen hin aussendet. Den gemeinsamen Durchschnittspunkt der sämmtlichen Strahlenrichtungen nennen wir das Centrum des Bündels. Es ist in dem angeführten Beispiele der leuchtende Objectpunkt selbst. Diese Bezeichnung verallgemeinernd, kann man das Centrum jedes homocentrischen Strahlenbündels einen Objectpunkt nennen. Man muss aber dann die Unterscheidung reeller und virtueller Objectpunkte einführen. Unter den Begriff homocentrischer Strahlenbündel fallen nämlich auch convergirende Strahlenbündel, deren sämmtliche Strahlen auf einen Punkt zielen, ihn aber vielleicht nicht physisch erreichen, weil sie vorher durch Brechung oder Reflexion aus ihrer Bahn gelenkt werden. In diesem Falle hätte man den Durchschnittspunkt der über ihr physisches Ende hinaus verlängerten Strahlenrichtungen als virtuellen Objectpunkt zu bezeichnen. Gehen dagegen die Strahlen des Bündels physisch von einem leuchtenden Punkte aus, oder wäre dies doch wenigstens bei der Beschaffenheit des Bündels denkbar, so haben wir es mit einem reellen Objectpunkte zu thun. Um den Begriff eines virtuellen Objectpunktes anschaulich zu machen, kann die Fig. 68 (a. f. S.) dienen. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta$ acht Strahlen eines convergirenden Bündels, die sich in der Richtung des Pfeiles fortpflanzen. Es ist zwar fürerst ganz gleichgültig ob und wie ein solches Strahlenbündel entstehen könne. Beiläufig ge-

sagt kann es entstehen durch Brechung eines divergenten Bündels in einer Sammellinse. Wir stellen uns nun vor, dass die Strahlen sämmtlich auf den Punkt f zielen (wie durch die punktirten Fortsetzungen angedeutet ist). Diesen Punkt erreichen die Strahlen aber nicht wirklich, sondern sie werden schon vorher durch die spiegelnde Ebene ss aus ihrer Bahn gelenkt. Nach bekannten Gesetzen würden sie alsdann im Punkte f_1 reell vereinigt werden. Wir nennen in diesem Falle den Punkt f den virtuellen Objectpunkt und f_1 sein (reelles) Spiegelbild.

Ein besonders bemerkenswerther Fall eines homocentrischen Strahlenbündels ist ein solches, dessen sämmtliche Strahlen unter sich parallel sind. Sein Centrum (der Objectpunkt) liegt in unendlicher Ferne. Hier verliert offenbar die Unterscheidung zwischen reell und virtuell ihre Bedeutung, denn es ist gleichgültig, ob man sich den Durchschnittspunkt

Fig. 68.



auf der Seite, von wo die Strahlen kommen, oder auf der, wohin sie gehen, in unendlicher Ferne vorstellt.

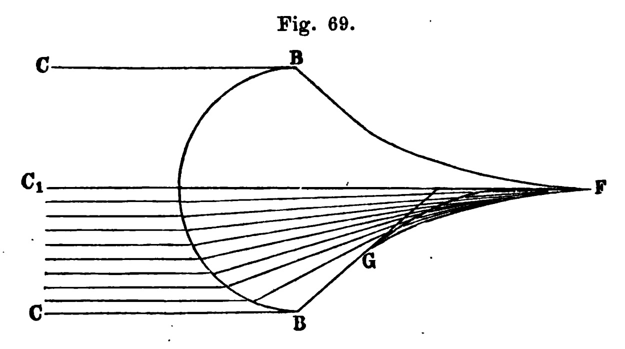
Für die Physiologie und Pathologie des Auges ist es nothwendig, die genaueste Kenntniss davon zu besitzen, was aus einem homocentrischen Strahlenbündel wird, wenn es eine Fläche von gegebener Gestalt passirt, die zwei durchsichtige Medien von einander trennt, oder wenn es eine Zusammenstellung mehrerer solcher Flächen nach einander passirt. In der That sind ja das Auge selbst und alle Werkzeuge, die zu seiner Untersuchung oder zur Unterstützung seiner Leistungen angewandt werden, nichts Anderes als Systeme solcher Flächen.

Die Disciplin der Physik, welche von der Brechung homocentrischer Strahlenbündel an Trennungsflächen verschiedener durchsichtiger Medien handelt, nennt man bekanntlich „Dioptrik“. In voller Allgemeinheit lässt sich das Problem der Dioptrik nicht lösen, d. h. es lässt sich nicht angeben, was aus einem Strahlenbündel von beliebiger Winkelöffnung wird, wenn es eine irgendwie gestaltete Trennungsfläche zweier Medien

passirt. Der allgemeinste Fall, welcher der mathematischen Analyse zugänglich ist, setzt zwar keine beschränkenden Bedingungen für die geometrische Natur der Trennungsfläche der beiden in Betracht kommenden durchsichtigen Mittel, wohl aber über die Beschaffenheit des Strahlenbündels; namentlich muss dessen Winkelöffnung verschwindend klein gesetzt werden. Wir wollen jedoch diesen allgemeinsten Fall noch nicht gleich zu Anfang untersuchen, vielmehr zuerst die wichtigeren speciellen Fälle vorausschicken.

Wenn ein homocentrisches Strahlenbündel auf eine kugelförmige Trennungsfläche zweier brechenden Medien fällt, so wird es durch die Brechung in einen Strahlencomplex verwandelt, dessen Form man in jedem einzelnen Falle genau angeben kann. Wir wollen als Beispiel den Fall betrachten, dass das auffallende homocentrische Bündel parallelstrahlig, der Brechungsindex beim Uebergang aus dem ersten Medium in das zweite $^3/_2$ ist und die Kugelfläche dem schwächer brechenden Medium die convexe Seite zukehrt. *BB* (Fig. 69) sei ein Durchschnitt

Fig. 69.



der Kugelfläche mit der Ebene des Papieres und *CC* die in dieser Ebene verlaufenden Strahlen des Bündels. Ihr Gang nach der Brechung fällt selbstverständlich ebenfalls in die Ebene des Papieres und ist in der Figur gezeichnet. Man sieht, dass der Strahlencomplex nach der Brechung kein homocentrisches Bündel mehr ist. Die übrigen Strahlen schneiden den ungebrochen durchgehenden Strahl (C_1F) um so früher, (d. h. in der Figur um so weiter nach links), je weiter ihre ursprüngliche Lage von C_1F absteht. Die Durchschnittspunkte je zweier benachbarten Strahlen liegen auf einer krummen Linie *GF*, welche man die Brennlinie nennt.

Untersucht man den vorliegenden Fall genauer, so findet sich, dass die C_1F zunächst gelegenen Strahlen des Bündels sich alle nach der Brechung sehr annähernd genau im Punkte *F* (der Spitze der Brennlinie) schneiden. Bestände also das einfallende Bündel aus diesen Strahlen allein und wären die mehr seitlich gelegenen gar nicht vorhanden, so würden wir nach der Brechung wieder s e h r a n n ä h e r n d ein homocentrisches Strahlenbündel haben.

Dieser letztere höchst specielle Fall bildet nun den Ausgangspunkt der physiologischen und praktischen Dioptrik. Der erste Grundsatz dieser Disciplin, der soeben nur angedeutet wurde, kann bestimmter und allgemeiner so ausgesprochen werden: Denken wir uns von einer Kugeloberfläche ein verhältnissmässig kleines Stück[1]) als Trennungsfläche zweier durchsichtigen Mittel, und fällt auf dieselbe ein homocentrisches Strahlenbündel von kleiner Winkelöffnung so auf, dass kein Strahl desselben sehr weit von senkrechter Einfallsrichtung abweicht, dann wird das Bündel durch die Brechung sehr annähernd wieder in ein homocentrisches Bündel verwandelt. Da dieser Satz nur ein annäherungsweise gültiger ist, so können natürlich die oben aufgezählten Bedingungen seiner Gültigkeit nicht numerisch bestimmt angegeben werden. Das heisst, es kann nicht angegeben werden, der wievielte Theil einer ganzen Kugel höchstens die Trennungsfläche sein darf, und wie gross höchstens der Oeffnungswinkel des in Betracht kommenden Strahlenkegels sein darf, und wie weit höchstens die Strahlen des Bündels von senkrechter Incidenz abweichen dürfen. Es lässt sich eben nur sagen, dass die Homocentricität des durch Brechung hervorgebrachten Bündels um so genauer ist, je weniger die Strahlen des einfallenden Bündels von senkrechter Incidenz abweichen. Es ist nämlich gut zu bemerken, dass in dieser einen Bedingung die beiden anderen schon enthalten sind, denn es ist klar, dass stets einige Strahlen des Bündels, es mag beschaffen sein wie es will, weit von senkrechter Incidenz abweichen, sowie ein grosser Bruchtheil einer ganzen Kugel als Trennungsfläche in Betracht kommt (z. B. die Strahlen CB des parallelstrahligen Bündels in Fig. 69). Ebenso ist klar, dass in einem Strahlenbündel von grosser Winkelöffnung stets Strahlen enthalten sein werden, die weit von senkrechter Incidenz abweichen, die Trennungsfläche mag beschaffen sein wie sie wolle[2]).

Im Falle der praktischen Anwendung hat man daher die Grenzen der zulässigen Abweichung der in Betracht kommenden Strahlen um so enger zu stecken, je genauer homocentrisch man die gebrochenen Strahlenbündel verlangt. Bei astronomischen Instrumenten richtet man es daher meist so ein, dass keine Strahlen mitwirken, die mit ihrem Einfallslothe bei der ersten Brechung an der Objectivlinse einen Winkel bilden, der grösser als etwa 15 oder höchstens 30 Minuten wäre. Die Oberflächen der Objectivlinsen astronomischer Fernröhre müssen daher immer sehr kleine Bruchtheile der ganzen Kugelfläche, d. h. sehr wenig gekrümmt sein; und das Gesichtsfeld astronomischer Fernröhre ist stets sehr klein, bei stark vergrössernden z. B. so klein, dass man nicht die ganze Mond-

---

[1]) Der absolute Werth des Stückes Kugeloberfläche darf so gross sein als er will, er darf ganze Quadratmeter betragen; es kommt nur darauf an, dass es ein kleiner Bruchtheil der gesammten Kugeloberfläche ist.

[2]) Abgesehen von dem singulären Falle, dass das Centrum des Strahlenbündels mit dem Centrum der Kugelfläche beinahe zusammenfällt.

scheibe auf einmal übersehen kann. In der That ist die Beschränkung des Gesichtsfeldes eine besondere Bedingung, die sich aus unserer allgemeinen Bedingung entwickeln lässt. Sind nämlich beispielsweise in einem astronomischen Fernrohre zwei diametral gegenüberliegende Punkte des Mondrandes gleichzeitig sichtbar, so müssen jedesfalls schon Strahlen in Betracht gezogen werden, die um $^1/_2$ Grad von senkrechter Incidenz abweichen. Suchen wir nämlich in dem Strahlenbündel, das von einem Punkte des Mondrandes ausgeht, denjenigen auf, der senkrecht auf die Objectivoberfläche trifft, so wird der Strahl des vom anderen Punkte ausgehenden Bündels, der in denselben Punkt der Objectivoberfläche einfällt, mit seinem Einfallsloth einen Winkel von einem halben Grade machen, da ja bekanntlich dies ungefähr der Winkel ist, den zwei Linien von zwei diametral gegenüberliegenden Punkten des Mondes zu irgend einem terrestrischen Punkte mit einander bilden. Man sieht in dieser Weise leicht, dass ganz allgemein Strahlen mit um so grösseren Incidenzwinkeln in Betracht gezogen werden müssen, je grösser das Gesichtsfeld eines optischen Instrumentes sein soll. Es kann dasselbe also nur vergrössert werden auf Kosten der Homocentricität der gebrochenen Strahlenbündel, d. h. auf Kosten der Schärfe des Instrumentes.

Nachdem durch diese vorläufigen Erörterungen hinlänglich hervorgehoben ist, dass wir es mit einem nur annäherungsweise gültigen Satze zu thun haben, wenn wir behaupten, ein homocentrisch einfallendes Strahlenbündel werde durch Brechung an einer sphärischen Trennungsfläche in ein neues homocentrisches verwandelt, wollen wir die Regeln aufstellen, nach denen das Centrum des gebrochenen Strahlenbündels gefunden wird, wenn das des einfallenden gegeben ist.

Das Centrum des gebrochenen Strahlenbündels nennt man das „Bild“ oder den „Bildpunkt“, wenn man das Centrum des einfallenden Bündels das „Object“ oder den „Objectpunkt“ nennt. Es gilt also, die Beziehungen zwischen der Lage des Object- und der Lage des Bildpunktes festzustellen, wenn zwei brechende Medien und zwischen ihnen eine sphärische Trennungsfläche gegeben ist.

Sei KK in Fig. 70 (a. f. S.) der Durchschnitt des die Trennungsfläche darstellenden Kugelabschnittes, c ihr Mittelpunkt. Wir wollen annehmen, linker Hand, also auf der convexen Seite der Trennungsfläche, sei das schwächer brechende Medium — Luft —, rechter Hand, also auf der concaven, sei das stärker brechende Medium — beispielsweise Glas. Wir wollen uns nun drei parallelstrahlige Bündel in der Luft denken, die Strahlen des einen sind in der Figur mit a, die des zweiten mit b und die des dritten mit n bezeichnet. Solche Bündel würde man beispielsweise von drei in einer geraden Linie stehenden Fixsternen erhalten können. Natürlich sendet jeder solche Punkt noch unzählige Strahlen aus, die gar nicht auf unsere Trennungsfläche fallen, sondern allesfalls von einer undurchsichtigen Wand WW aufgefangen werden, in welche unsere Trennungsfläche eingesetzt ist, oder die ganz an der Masse des

zweiten Mediums vorübergehen. Um diesen Punkt dem Leser anschaulich zu halten, sind in der Figur zu jedem der drei Bündel einige solche weiter seitwärts gelegene Strahlen angedeutet. Betrachten wir zuerst das mit a bezeichnete Bündel, ein Strahl desselben $a\,C\,\alpha$ zielt auf den Mittelpunkt C und trifft also senkrecht auf die Trennungsfläche. Er muss deshalb nach dem Brechungsgesetze ohne Ablenkung durchgehen, und seine Richtung nach der Brechung ist $a\,C\alpha$ wie vorher. Diese Linie ist schon ein geometrischer Ort für den gesuchten Bildpunkt des unendlich fernen Objectpunktes, der das Bündel aussendet, dessen Strahlen mit a bezeichnet sind. Denn der Bildpunkt als das Centrum oder der gemeinsame Durchschnitt aller Strahlen des gebrochenen Bündels muss ja auf jedem gebrochenen Strahle liegen, und da wir diesen einen sofort construiren konnten, so haben wir eine gerade Linie, auf der unzweifelhaft der Bildpunkt zu suchen ist. Er liegt nun auf dieser Linie — wie die mathematische Analyse zeigt — in einer Entfernung $K\alpha$ von der brechenden Fläche, die sich zu deren Radius $K\,C$ verhält wie der Brechungsindex des Mediums hinter der Fläche zu demselben um 1 verminderten Brechungsindex. Diese Länge $K\alpha$, die also für eine Fläche vom gegebenen Radius, welche Luft von einem Stoffe von bestimmter Brechkraft scheidet, einen ein- für allemal bestimmten Werth hat, nennt man die „zweite Hauptbrennweite“.

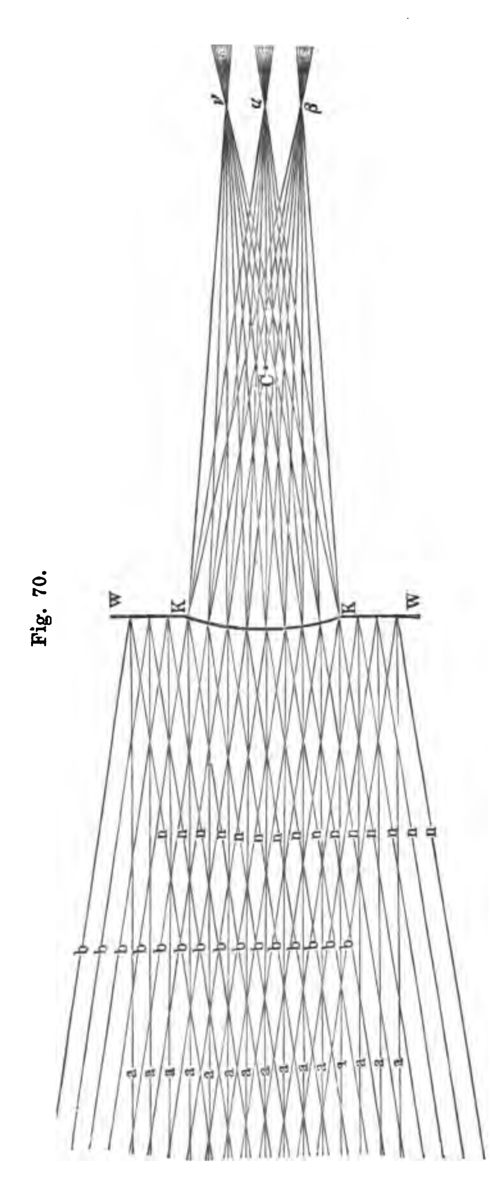


Fig. 70.

Genau wie soeben der Vereinigungspunkt des Strahlenbündels a findet sich für das einfallende Strahlenbündel b der Punkt β als Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen. Er liegt auf dem nach C zielenden Strahle $b\,C\,\beta$ und $K\beta$ ist $= K\alpha$. Für die Strahlen n findet sich der Vereinigungspunkt ν. Offenbar müssen die Vereinigungspunkte α, β, ν auf einer zu KK concentrischen Kugelschale mit dem Radius $C\alpha$ liegen. Da aber niemals Strahlenbündel in Betracht gezogen werden dürfen, die mit den Strahlen a grosse Winkel bilden, so können von der Kugelschale $\beta\,\alpha\,\nu$ keine Theile in Betracht kommen, die um einen namhaften Bruchtheil des Radius von α abstehen. Mit anderen Worten kann als geometrischer Ort der Vereinigungspunkte parallelstrahliger Bündel nur ein sehr kleiner Theil einer um C mit dem Radius $C\alpha$ beschriebenen Kugelfläche in Betracht kommen. Ein kleiner Theil einer Kugelfläche fällt aber nahezu mit einer Ebene zusammen. So können wir also annehmen, dass die Vereinigung parallelstrahliger Bündel oder die Bilder unendlich ferner Objecte in eine bei α auf $a\,C\,\alpha$ senkrecht gestellte Ebene fallen. Diese Ebene soll die zweite Brennebene des Systems heissen.

Fällt jetzt ein divergirendes Strahlenbündel auf unsere Fläche (siehe Fig. 71 a. f. S.), das vom Punkte P in der Luft ausgeht[1]), so können wir wieder vor Allem den Strahl PQ desselben verfolgen, welcher auf den Mittelpunkt C der Kugel KK zielt, dieser Strahl geht wieder ohne Ablenkung hindurch. Wir haben also sofort wieder eine Gerade $P\,Q\,C$, auf der wir den Vereinigungspunkt des gebrochenen Strahlenbündels, d. h. das Bild des Punktes P zu suchen haben. Wo es auf dieser Linie liegt, lehrt folgende einfache Regel: Eins dividirt durch den Abstand des leuchtenden Punktes von der brechenden Fläche, plus dem Brechungsindex, dividirt durch den Abstand des Bildes von der Fläche, ist gleich dem Brechungsindex, dividirt durch die (oben definirte) zweite Hauptbrennweite. Diese Regel schreibt sich als Gleichung kurz so:

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p^*} = \frac{n}{f^*},$$

wenn p die Entfernung (PQ) des Objectpunktes, p^* die Entfernung (P^*Q) des Bildpunktes bedeutet, und wenn ferner n den Brechungsindex des zweiten Mediums bedeutet, den der Luft $= 1$ gesetzt, und wenn endlich die oben definirte zweite Hauptbrennweite mit f^* bezeichnet wird. Nach dieser Regel kann man leicht zu jedem gegebenen Objectabstand den zugehörigen Bildabstand berechnen. Den Objectabstand und den zugehörigen Bildabstand nennt man auch „conjugirte Ver-

[1]) Der Punkt P ist, um die Figur nicht allzusehr auszudehnen, nicht mehr aufgenommen. Der Buchstabe P ist dahin geschrieben, wo die Strahlen des einfallenden Bündels abgebrochen sind, er müsste eigentlich weiter links stehen, an dem Punkte, von welchem die Strahlen ausgehen.

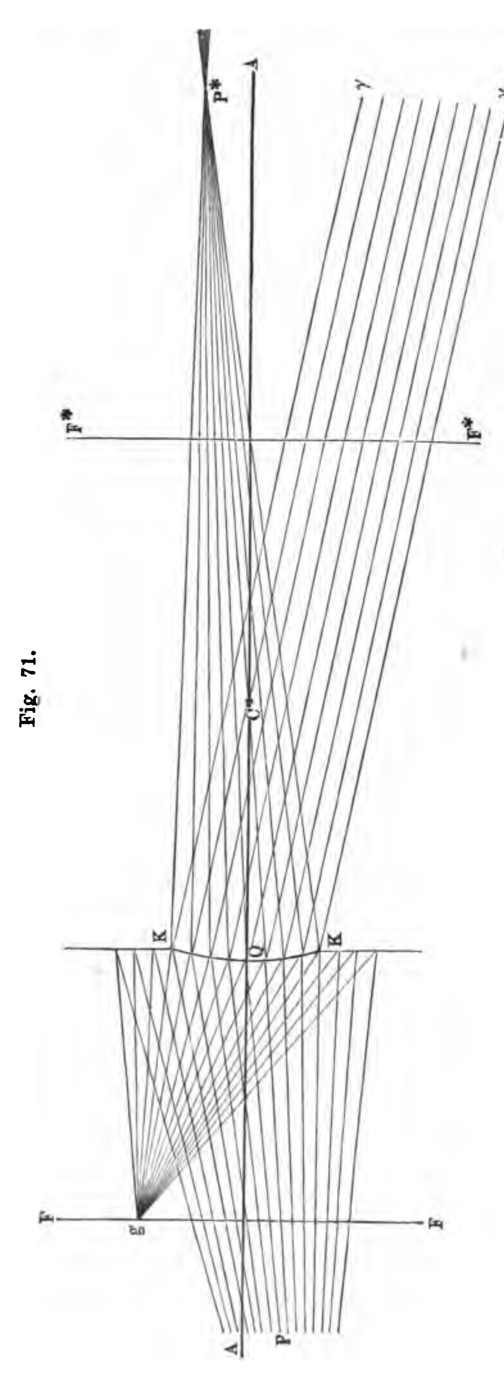


Fig. 71.

einigungsweiten". Man sieht leicht schon ganz allgemein, dass das Bild aus der Brennebene anfangs langsam nach rechts herausrückt, wenn das Object, von unendlicher Ferne kommend, sich der brechenden Fläche nähert; dass dann das Bild bei fortgesetzter Annäherung des Objectes an die Fläche immer rascher nach rechts rückt. Man sieht ferner, dass bei einer gewissen Annäherung des Objectes an die brechende Fläche das Bild nach rechts in unendliche Ferne hinausgerückt sein muss, denn es muss einen Werth von p geben, für welchen $\frac{1}{p} = \frac{n}{f^*}$, mithin $\frac{n}{p^*} = 0$, d. h. $p^* = \infty$ ist. Mit andern Worten, das gebrochene Strahlenbündel wird parallelstrahlig, wenn der leuchtende Objectpunkt in einer gewissen Entfernung vor der Fläche KK liegt. Diese Entfernung wollen wir mit f bezeichnen und die **erste Hauptbrennweite** nennen. In der Entfernung f von der brechenden Fläche können wir nun wieder eine der brechenden Fläche concentrische Kugel-

fläche aufstellen. Da auch von ihr wieder nur ein verhältnissmässig kleines Stück in Betracht gezogen werden darf, so können wir dies Stück als eben betrachten und nennen es die vordere Hauptbrennebene. Die Entfernung der vorderen Hauptbrennebene von der brechenden Fläche, die wir mit f bezeichnet und erste Hauptbrennweite genannt haben, verhält sich zur Entfernung der zweiten Hauptbrennebene von der brechenden Fläche, wie die Einheit zum Brechungsindex. Dies ist aus der obigen Gleichung leicht zu sehen, denn f ist eben derjenige Werth von p, für welchen $\frac{n}{p^*} = 0$ ist, es ist also $\frac{1}{f} = \frac{n}{f^*}$ oder $f:f^* = 1:n$. Die vordere Hauptbrennebene ist der geometrische Ort aller derjenigen leuchtenden Punkte, deren Bilder in unendliche Ferne fallen oder, mit anderen Worten, diejenigen Strahlenbündel, welche von Punkten der vorderen Hauptbrennebene ausgehen, werden durch die Brechung zu parallelstrahligen Bündeln. Die Richtung eines solchen Strahlenbündels kann man wieder leicht finden. Man braucht nur die Gerade vom gegebenen leuchtenden Punkte nach dem Centrum der Fläche zu ziehen. Diese Linie giebt aus dem oben schon angeführten Grunde jedesfalls die Richtung eines gebrochenen Strahles und folglich, da im jetzt gedachten Falle alle Strahlen parallel sind, die Richtung aller Strahlen. Man sieht in Fig. 71 diesen Fall veranschaulicht, g ist ein Punkt der mit FF bezeichneten vorderen Hauptbrennebene, welcher ein Strahlenbündel auf die Fläche KK sendet. Die gebrochenen Strahlen werden daher alle parallel sein (siehe $K\gamma$) und die Richtung aller ist gegeben durch die Richtung des Strahles gC, welcher auf das Centrum C der Fläche zielt, mithin senkrecht auffällt und ungebrochen weiter geht.

Liegt der Objectpunkt noch näher an der brechenden Fläche als die vordere Brennebene, dann kann das Strahlenbündel nicht einmal mehr in ein parallelstrahliges verwandelt werden, es bleibt vielmehr nach der Brechung immer noch divergent. Homocentrisch bleibt aber darum das gebrochene Strahlenbündel doch; nur liegt das Centrum nicht mehr auf dem wirklichen Wege der physischen Strahlen, sondern auf ihren rückwärts verlängerten Richtungen im ersten Medium, aus dem die Strahlen kommen. Es entsteht also in diesem Falle nicht ein wirkliches Bild des leuchtenden Punktes, das man auf einem Schirme auffangen kann. Man nennt daher den bloss geometrischen gemeinsamen Durchschnitt aller rückwärts verlängerten Strahlenrichtungen das „virtuelle“ Bild des leuchtenden Punktes. Es ist gut zu bemerken, dass die Lage der virtuellen Bilder und ihre Beziehung zur Lage der Objectpunkte sich denselben Gesetzen fügt, wie die Lage der reellen Bilder. Die oben aufgestellte Gleichung zeigt selbst an, ob das Bild eines beliebig angenommenen leuchtenden Punktes reell oder virtuell ist. Wenn sich nämlich bei Einsetzung eines gewissen Werthes für den Objectabstand p der Bildabstand negativ ergiebt, so bedeutet dies, dass das Bild ein virtuelles ist. Es begreift sich ferner leicht, dass auch ein virtuelles Bild stets

auf der vom Object nach dem Mittelpunkt der Fläche gezogenen Geraden liegt. Hat man ein zusammengesetztes Object, bestehend aus lauter leuchtenden Punkten, die in einer zur brechenden Fläche parallelen Ebene liegen, so liegen die Bilder alle gleichfalls in einer solchen Ebene und stellen ein zusammengesetztes Bild dar, das dem Objecte geometrisch ähnlich ist. Seine Dimensionen verhalten sich zu den entsprechenden Dimensionen des Objectes wie sein Abstand vom Mittelpunkte (C Fig. 71) der Fläche zum Abstande des Objectes von diesem Mittelpunkte.

Die oben angegebene Grundgleichung der Dioptrik, welche die Abhängigkeit des Bildabstandes (p^*) vom Objectabstande (p) für ein System zweier brechenden Medien darstellt, kann noch in eine andere Form gebracht werden. Wir sahen, dass die als Hauptbrennweiten f und f^* definirten Grössen sich verhalten wie die Brechungsindices oder, da wir den Brechungsindex der Luft $= 1$ gesetzt, wie $1:n$, es ist also $n = \frac{f^*}{f}$ und wenn wir diesen Werth einsetzen in die Grundgleichung:

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p^*} = \frac{n}{f^*},$$

so erhalten wir:

$$\frac{1}{p} + \frac{f^* f}{p^*} = \frac{f^* : f}{f^*}$$

oder wenn wir diese Gleichung mit f multipliciren:

$$\frac{f}{p} + \frac{f^*}{p^*} = 1.$$

In Worten: die erste Brennweite dividirt durch den Objectabstand plus der zweiten Brennweite dividirt durch den entsprechenden Bildabstand muss stets die Summe 1 geben.

Der mathematische Beweis für die soeben gegebenen Grundlehren der Dioptrik findet sich in jedem ausführlichen Lehrbuche der Physik, z. B. in Müller-Pouillet's Lehrbuch, 8. Auflage von Pfaundler, Bd. II, Abth. I, S. 103 u. flgd.

Die vorgetragenen Lehren über die Brechung an einer einzigen Kugelfläche kann man sich sehr schön an einem einfachen Apparate anschaulich machen. Er besteht aus einer inwendig schwarzen Blechrinne von quadratischem Querschnitte, die etwa 30 cm lang ist. In die eine Endfläche ist ein stark gewölbtes Uhrglas, in die andere ist eine ebene Glasplatte eingesetzt. Die Rinne wird nun mit Wasser gefüllt, und vor dem Uhrglase werden in der Luft geeignete stark leuchtende Objecte aufgestellt, wie Lichtflammen und dergleichen. Die Brechung der Vorderfläche des Uhrglases, die man wegen des Parallelismus der beiden Glasoberflächen geradezu als vordere Grenzfläche des Wassers ansehen kann, erzeugt nun bei passender Lage von den leuchtenden Objecten in der Wassermasse physische Bilder, die man auf einer senkrecht in die Rinne

zu stellenden matten Glastafel auffangen und von hinten her durch die in der hinteren Endfläche befindliche Glasplatte betrachten kann. Befindet sich vor der Vorderfläche nur ein einziger stark leuchtender Punkt, so kann man im dunklen Zimmer das ganze Strahlenbündel im Wasser von obenher gleichsam körperlich vor sich sehen, wenn im Wasser ein fluorescirender Körper gelöst ist, um die ganze Bahn eines in ihm fortgepflanzten intensiven Lichtstrahles ein wenig leuchtend erscheinen zu lassen. Für Demonstrationszwecke macht man auch die eine Langseite der Rinne von Glas, so dass man das fluorescirende Strahlenbündel von der Seite her sehen kann.

Wir wollen uns nun ein System von beliebig vielen brechenden Medien vorstellen[1]). Jedes folgende sei vom vorhergehenden getrennt durch einen Kugelabschnitt, welcher nur einen sehr kleinen Bruchtheil der gesammten Kugeloberfläche ausmacht. Die sämmtlichen Centra dieser Kugeloberflächen sollen auf einer geraden Linie liegen, welche die Axe des Systems heissen mag. Endlich setzen wir noch fest, dass die wirklich durchsichtigen Theile der Kugelabschnitte in ihren Mitten oder „Scheiteln" von der Axe durchsetzt werden, so dass jeder Kugelabschnitt nahezu gelten kann als ein Stück einer zur Axe senkrechten Ebene. Ein solches System nennt man ein „centrirtes System" sphärischer Trennungsflächen zwischen einer Reihe von brechenden Medien.

Stellen wir uns nun im ersten Medium ein einfallendes, d. h. auf die erste Trennungsfläche zugehendes homocentrisches Strahlenbündel vor, dessen Centrum in einigem Abstande von der ersten Fläche und nicht weit seitwärts von der Axe liegt, so entspricht dasselbe den Bedingungen, welche zur Anwendung der soeben entwickelten Gesetze auf die erste Brechung, die es erleiden wird, genügen. Nehmen wir also ein ganzes System solcher Strahlenbündel an, deren Centra alle in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen, so wird durch die erste Brechung ein System von Strahlenbündeln entstehen, deren Centra ebenfalls in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Kurz ausgedrückt wird die erste Brechung von einem ebenen zur Axe senkrechten Objecte ein (reelles oder virtuelles) Bild erzeugen. Auch werden Object und Bild zu einander perspectivisch sein bezüglich zu einem in der Axe gelegenen Punkte, nämlich zum Centrum der ersten Fläche, d. h. die Geraden, welche jeden Objectpunkt mit seinem Bildpunkte verbinden, gehen alle durch den Mittelpunkt der Fläche. Dies Bild, d. h. das System der Centra der im zweiten Medium sich fortpflanzenden Strahlenbündel kann man aber offenbar auffassen als (reelles oder virtuelles) Object für die zweite Brechung, welchen die Strahlen beim Uebergange aus dem zweiten ins dritte Medium erleiden. Da das für den neuen Standpunkt als Object zu be-

[1]) Die nachstehende ebenso elegante als einfache Beweisführung rührt her von Carl Neumann. Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Leipzig, 1866.

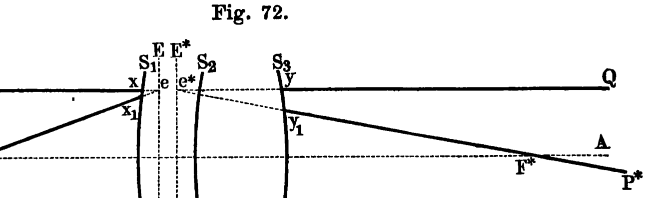
handelnde Bild unter den gemachten Voraussetzungen auch den Bedingungen entsprechen muss, welche die Anwendung der obigen Regeln auf die zweite Brechung gestatten, so wird durch die zweite Brechung abermals ein Bild entstehen, dessen Punkte in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen und das perspectivisch zu seinem Objecte, also zum ersten Bilde ist, bezüglich zu einem ebenfalls in der Axe gelegenen Punkte, nämlich zum Centrum der zweiten Fläche. Es gilt nun folgender geometrische Satz, der so leicht einzusehen ist, dass der Beweis nicht ausgeführt zu werden braucht: Wenn von drei Punktsystemen A, B, C, welche in drei einander parallelen Ebenen liegen, das erste und das dritte zum zweiten perspectivisch sind, bezüglich zu zwei Punkten, welche beide in ein und derselben zu den drei Ebenen der Punktsysteme A, B, C senkrechten Geraden liegen, dann ist auch das zweite zum ersten perspectivisch gelegen, bezüglich auf einen in derselben Geraden gelegenen Punkt. Es ist also das durch die zweite Brechung erzeugte Bild zum ursprünglichen Objecte perspectivisch gelegen, bezüglich auf einen in der Axe befindlichen Punkt. Durch weitere Anwendung desselben Satzes auf die folgenden Brechungen kommen wir zu dem Schlusse: Das Ergebniss der sämmtlichen auf einander folgenden Brechungen, so viele ihrer auch stattfinden mögen, ist ein Bild, dessen Punkte in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen und welches perspectivisch liegt zum ursprünglichen Objecte und da auch dies in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt, sind das letzte Bild und das ursprüngliche Object auch geometrisch ähnlich. Schon nach diesem Resultate kann man den Begriff der Hauptbrennebenen auf das System beliebig vieler brechenden Medien übertragen. Man kann nämlich als zweite Hauptbrennebene diejenige zur Axe senkrechte Ebene definiren, welche das Bild eines unendlich fernen Objectes enthält und als erste Hauptbrennebene diejenige, in welcher das Object liegen muss, wenn das schliessliche Bild in unendlicher Entfernung liegen soll. Die Schnittpunkte dieser beiden Ebenen mit der Axe sollen die Hauptbrennpunkte heissen und durch F^* und F bezeichnet werden. Wir schliessen den Fall, wo F und F^* in unendlicher Ferne liegen, von den folgenden Betrachtungen aus. Wir können auch sogleich noch den Satz aussprechen, dass das Bild jedes in der Axe gelegenen Objectpunktes ebenfalls in der Axe liegen muss, denn der mit der Axe zusammenfallende Strahl eines von einem solchen Objectpunkte ausgehenden Bündels geht ohne Aenderung der Richtung durch das ganze System, da er auf alle Flächen senkrecht trifft, einer der gebrochenen Strahlen fällt also mit der Axe zusammen und auf ihr muss der Bildpunkt liegen, da er ja auf jedem der gebrochenen Strahlen liegt.

Es soll jetzt bewiesen werden, dass in dem Systeme, mag es sonst beschaffen sein, wie es wolle, wenn es nur den vorhin ausgesprochenen Bedingungen genügt, zwei zur Axe senkrechte Ebenen existiren, deren erster als Objectebene, die zweite als Bildebene so entspricht, dass zu einem in der ersten beliebig angenommenen Objectpunkte ein Bildpunkt

gehört, der in der zweiten Ebene und mit dem Objectpunkte auf derselben zur Axe parallelen Geraden liegt, dass die beiden Punkte sich in derselben durch die Axe gelegten Ebene finden müssen, versteht sich von selbst, weil es von jedem als Object und Bild zusammengehörigen Paare von Punkten wegen der allgemeinen perspectivischen Beziehung gilt.

Zum Zwecke des Beweises der Existenz zweier solcher Ebenen stellen wir uns vor, es sei AA (Fig. 72) die Axe des Systems, und die Kreisbogen $S_1 S_1$, $S_2 S_2$, $S_3 S_3$ seien die Schnitte der brechenden Flächen mit der Ebene der Zeichnung, deren Zahl natürlich auch grösser als drei gedacht werden darf. Das erste Medium haben wir uns also links von $S_1 S_1$ zu denken, das letzte (hier das vierte) rechts von $S_3 S_3$. Die Punkte F und F^* seien der erste und zweite Brennpunkt des Systems. Wir denken uns nun einen einfallenden Strahl Px parallel zur Axe. Diesem muss als gebrochener im letzten Medium ein Strahl entsprechen, dessen Richtung nothwendig durch den Brennpunkt F^* geht, da der Strahl Px betrachtet werden kann als Bestandtheil eines Bündels, das von einem in der Axe unendlich weit abstehenden Punkte ausgegangen ist, und

Fig. 72.



dessen Bild folglich F^* ist. Ferner liegt der gebrochene Strahl nothwendig mit dem einfallenden und mit der Axe in einer Ebene, d. h. in der Ebene der Zeichnung, die für die sämmtlichen vorkommenden Brechungen „Einfallsebene“ ist. Die Richtung dieses Strahles muss demnach die Richtung des einfallenden Strahles nothwendig irgendwo im Endlichen schneiden, da wir den Fall ausdrücklich ausgeschlossen haben, wo das System die Besonderheit hätte, dass einem parallelstrahligen einfallenden Bündel ein parallelstrahliges im letzten Medium entspräche. Der endlich gelegene Schnittpunkt sei e^*.

Wir denken uns nun zweitens die fortgesetzte Richtung des einfallenden Strahles Px von der letzten Fläche an als einen physischen gebrochenen Strahl yQ und sehen sogleich, dass diesem als einfallender Strahl einer entsprechen muss, der durch den Punkt F geht und der ebenfalls in der Ebene der Zeichnung liegt, da der angenommene gebrochene Strahl yQ Bestandtheil eines nach einem unendlich fernen Bildpunkte in der Axe convergirenden Bündels sein könnte, welcher dem Punkte F als Objectpunkt entsprechen würde. Der zu yQ gehörige einfallende Strahl muss aber aus den schon angeführten Gründen die Rich-

tung $y\,Q$ resp. $P\,Q$ im Endlichen treffen. Der Schnittpunkt sei beispielsweise e. Es kann also nicht bezweifelt werden, dass auf irgend einer zur Axe parallelen Richtung $P\,Q$ zwei Punkte e und e^* zu finden seien, von denen der eine e Durchschnittspunkt zweier einfallender Strahlen ist und von denen der andere e^* der Durchschnittspunkt der jenen beiden entsprechenden gebrochenen Strahlen ist. Es bedarf wohl nicht der Ausführung des logischen Beweises dafür, dass zwei solche Punkte in der Beziehung von Objectpunkt und Bildpunkt zu einander stehen, d. h. dass alle Strahlen, welche sich als einfallende im Punkte e schneiden, nach erlittenen Brechungen ein homocentrisches Bündel bilden, dessen Centrum e^* ist.

Legen wir nun durch e und e^* zwei zur Axe senkrechte Ebenen $E\,E$ und E^*E^*, so sind es diejenigen, welche in der vorhin angekündigten Wechselbeziehung stehen. Denn wenn man von einem Punkte einer zur Axe senkrechten Ebene weiss, dass sein Bildpunkt in einer bestimmten zweiten zur Axe senkrechten Ebene enthalten ist, so müssen alle Bildpunkte in der letzteren liegen, welche in der ersteren gelegenen Objectpunkten entsprechen. Die allgemein gültige perspectivische Beziehung zwischen Object und Bild ergiebt aber sofort noch den Satz, dass einem Punkte der Ebene E als Objectpunkt derjenige Punkt der Ebene E^* als Bildpunkt entsprechen muss, welcher auf einer durch den Objectpunkt zur Axe parallelen Geraden liegt. In der That kann ja der Punkt der Axe, wo sich alle Verbindungslinien der Objectpunkte und ihre Bildpunkte schneiden, hier nur der unendlich ferne Punkt der Axe sein, da sich in ihm zwei dieser Verbindungslinien, nämlich $P\,Q$ und die Axe selbst schneiden. Die beiden soeben definirten Ebenen sollen die erste und zweite „Hauptebene“ und ihre Durchschnittspunkte mit der Axe der erste und zweite Hauptpunkt heissen. Diese beiden Punkte sollen gleichfalls mit den Buchstaben E und E^* bezeichnet werden.

Der Abstand des ersten Brennpunktes F von der ersten Hauptebene E heisse die „erste Hauptbrennweite“ und werde mit f bezeichnet, ebenso heisse die Entfernung E^*F^* die zweite Hauptbrennweite des Systems und werde mit f^* bezeichnet, f und f^* sind offenbar Grössen, welche für ein bestimmtes System ein- für allemal angebbare constante Werthe besitzen. Ferner wollen wir auch alle anderen Objectabstände, die wie früher mit p bezeichnet werden sollen, von E aus messen und zwar mit der Bestimmung, dass ein positiver Werth von p die Lage des Objectpunktes auf der Seite von E andeute, von wo die Strahlen kommen, ein negativer die Lage auf der Seite von E, wohin die Strahlen gehen, diese Bestimmung gilt auch für die Brennweite f. Andererseits sollen die mit p^* zu bezeichnenden Bildabstände von E^* aus gemessen werden und hier soll ein positiver Werth von p^* andeuten, dass der Bildpunkt auf der Seite von E^* liegt, nach welcher die Strahlen hingehen, ein negativer, dass er auf der Seite liegt, von wo die Strahlen kommen, diese letztere Bestimmung ist auch für das Vorzeichen von f^* maass-

gebend. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass zwischen den soeben definirten Grössen, nämlich den Constanten f und f^* und den Variabeln p und p^* dieselbe Gleichung gilt, welche wir für die weiter oben in einem Medienpaare definirten Grössen ähnlicher Bedeutung gültig gefunden haben.

In der That, es sei AA (Fig. 73) die Axe des Systems E, und E^* seine Hauptebenen resp. Hauptpunkte, F und F^* seine Brennpunkte. Es sei ferner P ein beliebig gewählter, nur den allgemeinen Grundbedingungen entsprechender Objectpunkt. Von den einfallenden Strahlen, welche in ihm ihr Centrum haben, wählen wir zwei aus, nämlich denjenigen Pe, welcher der Axe parallel geht, und denjenigen, PF, welcher den ersten Brennpunkt F enthält. Der erstere könnte einerseits Bestandtheil eines Bündels sein, das den Punkt e, wo er die erste Hauptebene trifft, zum Centrum hat. Da nun dem Punkte e der in der Verlängerung von Pe gelegene Punkt e^* der zweiten Hauptebene als Bildpunkt entspricht, so muss der entsprechende gebrochene Strahl durch den Punkt e^* gehen. Pe kann aber auch als Bestandtheil eines Bündels betrachtet werden,

Fig. 73.

dessen Strahlen der Axe parallel verlaufen, es muss ihm also als gebrochener ein Strahl entsprechen, dessen Richtung durch den zweiten Brennpunkt F^* geht. Durch diese zwei Bestimmungen ist der zu Pe als einfallendem gehörige gebrochene Strahl vollständig gegeben, er muss in die Richtung der Verbindungslinie von e^* und F^* fallen.

Der zweite gewählte einfallende Strahl PF treffe gehörig verlängert die Ebene E in e_1; dann muss die Richtung des gebrochenen Strahles gemäss der Beziehungen der Hauptebenen durch denjenigen Punkt e_1^* der Ebene E^* gehen, welcher mit e_1 auf einer zur Axe parallelen Geraden liegt. Sie muss aber mit dieser Geraden selbst überdies zusammenfallen, da der einfallende Strahl durch F geht und ein von F ausgehendes Bündel nach erlittenen Brechungen aus lauter zur Axe parallelen Strahlen besteht. Der Punkt P^* also, wo die durch e_1^* zur Axe parallel gezogene Gerade die zuerst construirte Linie e^*F^* schneidet, ist der Bildpunkt für den Objectpunkt P, denn wo sich zwei gebrochene Strahlen schneiden, welche zweien demselben homocentrisch einfallenden Bündel angehörenden entsprechen, da müssen sich alle schneiden, da ja das gebrochene Bündel ein homocentrisches sein soll.

Man bemerkt nun leicht, dass die Dreiecke Fe_1E und Pe_1e einander ähnlich sind und ebenso die Dreiecke $E^*e^*F^*$ und $e_1^*e^*P^*$. Es gelten daher die beiden Gleichungen:

$$\frac{e_1E}{e_1e}=\frac{F.E}{Pe} \quad \text{und} \quad \frac{e^*E^*}{e_1^*e^*}=\frac{E^*F^*}{e_1^*P^*}$$

oder da gemäss der verabredeten Bezeichnungsweise $FE=f$, $E^*F^*=f^*$, $eP=p$ und $e_1^*P^*=p^*$ ist

$$\frac{e^1E}{e_1e}=\frac{f}{p} \quad \text{und} \quad \frac{e^*E^*}{e_1^*e^*}=\frac{f^*}{p^*},$$

addirt man diese beiden Gleichungen zu einander, so ergiebt sich

$$\frac{e_1E}{e_1e}+\frac{e^*E^*}{e_1^*e^*}=\frac{f}{p}+\frac{f^*}{p^*},$$

da aber offenbar $e_1e=e^*e_1^*$ ist, sowie $e^*E^*=eE$, so ist die Summe linker Hand $=1$ und die Gleichung geht über in

$$1=\frac{f}{p}+\frac{f^*}{p^*} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2^*)$$

Bezeichnet man die senkrechte Entfernung des Objectpunktes von der Axe $eE=e^*E^*$ (siehe Fig. 73) mit l und die senkrechte Entfernung des entsprechenden Bildpunktes $e_1E=e_1^*E^*$ mit l^*, so erhält man durch Division der soeben zu einander addirten Gleichungen noch die Beziehung:

$$\frac{l}{l^*}=\frac{pf^*}{p^*f} \quad \text{oder} \quad l\frac{f}{p}=l^*\frac{f^*}{p^*}.$$

Man kann aber auch aus der Aehnlichkeit der beiden Dreieckspaare noch folgern:

$$\frac{l}{l^*}=\frac{p-f}{f}=\frac{f^*}{p^*-f^*}$$

und da, wenn man die Summe der Dividenden durch die Summe der Divisoren zweier gleichen Quotienten dividirt, ein ihnen gleicher Quotient entsteht:

$$\frac{l}{l^*}=\frac{p+(f^*-f)}{p^*-(f^*-f)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Differenz der beiden Brennweiten spielt in dieser Formel offenbar eine ähnliche Rolle wie der Halbmesser einer einzigen trennenden Kugelfläche in der Beziehung zwischen der Grösse des Objects und des Bildes (siehe S. 258). Wir wollen sie mit q bezeichnen und wollen diese Länge von E und E^* aus auf der Axe abtragen in der Richtung, nach welcher die Strahlen gehen. Wir erhalten so die beiden Punkte K und K^* (siehe Fig. 73), welche wir die Knotenpunkte des Systems nennen wollen. Diese Punkte haben offenbar zufolge der Gleichung (3)

die Eigenschaft, dass irgend eine lineare Erstreckung eines zur Axe senkrechten Objects sich zur entsprechenden Erstreckung des Bildes verhält wie der Abstand des Objects vom ersten zum Abstande des Bildes vom zweiten Knotenpunkte. Man sieht ferner leicht, dass K^* das Bild von K ist, denn der Werth von q für p und p^* in die Grundgleichung eingesetzt, genügt derselben, nur muss man beachten, dass für p die Grösse q mit negativen Vorzeichen einzusetzen ist, da K, als Objectpunkt betrachtet, hinter der ersten Hauptebene liegt. Hieraus in Verbindung mit der ersten Eigenschaft der Knotenpunkte ergiebt sich noch die Folgerung, dass jedem im ersten Medium auf K zielenden Strahle im letzten Medium ein durch K^* gehender, dem einfallenden paralleler Strahl entspricht. Der Beweis ist so einfach, dass er nicht ausführlich gegeben zu werden braucht.

Schliesslich mag noch auf ein merkwürdiges Verhältniss der als Brennweiten des Systems (f und f^*) definirten Grössen aufmerksam gemacht werden. Es ist erstens klar, dass die obige Gleichung

$$l\,\frac{f}{p} = \cdot\, l^*\,\frac{f^*}{p^*}$$

auch für den Fall nur einer einzigen brechenden Fläche Geltung haben muss, in welchem Falle dann die Entfernungen f, p, f^*, p^* sämmtlich von dem Scheitel der brechenden Fläche selbst nach beiden Seiten hin zu messen sind. Wenden wir sie auf die Brechung an der ersten Fläche unseres Systems an, indem wir die dabei geltenden Werthe der Brennweiten mit f_1 und f_2 bezeichnen. Ebenso sollen die jetzt an die Stelle von l, l^*, p und p^* tretenden Grössen mit l_1, l_2, p_1 und p_2 bezeichnet werden. Beziehen wir nun alle Punkte auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung O ein willkürlich gewählter Punkt der als x-Axe angenommenen Axe des Systemes ist und dessen xy-Ebene diejenige Ebene ist, welche ausser der Axe noch den betrachteten Objectpunkt und mithin auch den Bildpunkt enthält. Gemäss diesen Verabredungen drücken sich die Grössen l_1, l_2, p_1 und p_2 in den Coordinaten $x_1 y_1$ des Objectpunktes und den Coordinaten $x_2 y_2$ des Bildpunktes folgendermaassen aus. Wenn die Abscisse des Scheitels der Fläche mit S bezeichnet wird $l_1 = y_1$, $l_2 = -y_2$, $p = S - x_1$, $p_2 = x_2 - S$ und es gilt also zwischen diesen Coordinaten einerseits die Gleichung

$$\frac{f_1}{S - x_1} - \frac{f_2}{S - x_2} = 1,$$

andererseits

$$\frac{f_1 y_1}{S - x_1} = \frac{f_2 y_2}{S - x_2}.$$

Sind $\xi_1 \eta_1$ die Coordinaten eines anderen Objectpunktes und $\xi_2 \eta_2$ die des entsprechenden Bildpunktes bezogen auf denselben Ursprung und dieselben Axen, dann gelten ebenso die Gleichungen:

$$\frac{f_1}{S - \xi_1} \cdot - \frac{f_2}{S - \xi_2} = 1 \text{ und } \frac{f_1 \eta_1}{S - \xi_1} = \frac{f_2 \eta_2}{S - \xi_2}.$$

Wenn man jetzt von der ersten Gleichung in xy die erste in $\xi_1 \eta_1$ subtrahirt, so ergiebt sich:

$$\frac{f_1 (x_1 - \xi_1)}{(S - x_1)(S - \xi_1)} = \frac{f_2 (x_2 - \xi_2)}{(S - x_2)(S - \xi_2)}.$$

Durch Multiplication der beiden anderen Gleichungen jener Paare erhält man:

$$\frac{f_1^2 y_1 \eta_1}{(S - x_1)(S - \xi_1)} = \frac{f_2^2 y_2 \eta_2}{(S - x_2)(S - \xi_2)},$$

und wenn man endlich die beiden gefundenen Gleichungen durch einander dividirt, so hat man:

$$\frac{f_1 y_1 \eta_1}{x_1 - \xi_1} = \frac{f_2 x_2 \eta_2}{x_2 - \xi_2}.$$

Nun haben wir oben (S. 258) gesehen, dass die beiden Brennweiten eines Medienpaares ein Verhältniss zu einander haben, welches dem Brechungsindex n beim Uebergange vom ersten ins zweite maassgebend ist. Bekanntlich ist aber $n = \frac{v_1}{v_2}$, wenn v_1 und v_2 beziehentlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes im ersten und im zweiten Medium bedeuten, also: $\frac{f_2}{f_1} = \frac{v_1}{v_2}$.

Durch Einsetzen dieses Werthes geht die letzte Gleichung über in

$$\frac{y_1 \eta_1}{v_1 (x_1 - \xi_1)} = \frac{y_2 \eta_2}{v_2 (x_2 - \xi_2)}.$$

Gehen wir nun zur Brechung an der zweiten Fläche über, indem wir die von der ersten gelieferten Bildpunkte für die zweite als Objectpunkte ansehen, so müssen offenbar die auf denselben Coordinatenursprung bezogenen Coordinaten x_3, y_3, ξ_3, η_3 des neuen Bildpunktes zu x_2, y_2 und ξ_2, η_2 in derselben Beziehung stehen wie diese zu x_1, y_1 und ξ_1, η_1, d. h. wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im dritten Medium $= v_3$ setzt, muss die Gleichung gelten:

$$\frac{y_2 \eta_2}{v_2 (x_2 - \xi_2)} = \frac{y_3 \eta_3}{v_3 (x_3 - \xi_3)},$$

also auch:

$$\frac{y_1 \eta_1}{v_1 (x_1 - \xi_1)} = \frac{y_3 \eta_3}{v_3 (x_3 - \xi_3)}.$$

Wendet man dieses Verfahren der Reihe nach auf sämmtliche Brechungen an, bezeichnet die auf Strahlen im letzten Medium bezüglichen Grössen mit dem Index * und lässt bei den Grössen, die sich auf Strahlen im ersten Medium beziehen, die Indices ganz fort, so kommt man auf eine Gleichung, welche eine directe Beziehung zwischen den auf das erste und letzte Medium bezüglichen Grössen herstellt, nämlich:

$$\frac{y \eta}{v (x - \xi)} = \frac{y^* \eta^*}{v^* (x^* - \xi^*)}.$$

Hier sind $x\, y$ und $\xi\, \eta$ die Coordinaten zweier ganz beliebiger Objectpunkte, x^*, y^* und ξ^*, η^* die der entsprechenden Bildpunkte. Wir wählen nun den einen der beiden willkürlichen Objectpunkte in der ersten Hauptebene E, deren Abscissenwerth auch mit dem Buchstaben E bezeichnet werden soll, so dass $x = E$ wird. Seine Ordinate y sei h, dann sind offenbar die Coordinaten des Bildpunktes $x^* = E^*$ (wenn der Buchstabe E^* ebenfalls zur Bezeichnung des Abscissenwerthes der Ebene E^* gebraucht wird) und $y^* = h$. Die Coordinaten ξ und η des zweiten Objectpunktes wollen wir nun durch die anderen früher gebrauchten Grössen ausdrücken und haben dann:

$$\xi = E - p,\ \eta = l \text{ und } \xi^* = E^* + p^*,\ \eta^* = - l \frac{p^* f}{p f^*}.$$

Dass die Ordinate des anderen Bildpunktes nicht $= - h$, sondern $= h$ zu setzen ist, hat darin seinen Grund, dass wir sie nicht erst als ein l^* aus dem

entsprechenden l berechnet haben. Durch Einsetzen dieser 8 Werthe in die Formel ergiebt sich

$$\frac{h \cdot l}{v(E - E + p)} = - \frac{h\,l\,\frac{p^* f}{p f^*}}{v^*(E^* - E^* - p^*)} \text{ oder } v f = v^* f^*$$

in Worten, die beiden Brennweiten des Systems verhalten sich umgekehrt wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes im ersten und letzten Medium. Sind also diese beiden Medien ein und dasselbe, wie das bei Fernrohren, Mikroskopen etc. der Fall ist, wo die Strahlen aus Luft kommen und zuletzt wieder in Luft gehen, so sind die beiden Brennweiten einander gleich.

Bei einem der directen Beobachtung überall zugänglichen Systeme kann man die Lage der optischen Cardinalpunkte auf der Axe leicht empirisch bestimmen. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Entfernungen der vier Punkte F, E, E^*, F^* von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkte in der Axe zu finden. Man muss also für zwei Objectpunkte die Coordinaten x, y und ξ, η, sowie auch die Coordinaten ihrer Bildpunkte x^*, y^* und ξ^*, η^* bezogen auf einen willkürlichen Ursprung und die Axe des Systems als x-Axe bestimmen, indem man die Bildpunkte auf geeignet gestellten Schirmen zur Darstellung bringt. Man beachte nun, dass, wenn man die Abscissen der Cardinalpunkte durch die Buchstaben F, E, E^*, F^* wie sie selbst bezeichnet, die Gleichung:

$$\frac{f}{p} + \frac{f^*}{p^*} = 1$$

für das erste Paar von conjugirten Punkten übergeht in

$$\frac{E - F}{E - x} + \frac{F^* - E^*}{x^* - E^*} = 1$$

und die Gleichung:

$$l\,\frac{f}{p} = l^*\,\frac{f^*}{p^*} \quad \text{in} \quad \frac{(E - F)\,y}{E - x} + \frac{(T^* - E^*)\,y^*}{x^* - E} = 0.$$

Zwei entsprechende Gleichungen ergeben sich für den zweiten Object- und Bildpunkt. Aus diesen vier Gleichungen, in welchen x, y und x^*, y^*, sowie ξ, η und ξ^*, η^* als empirisch bestimmt und mithin bekannt gelten, können die vier gesuchten Grössen F, E, E^*, F^* berechnet werden. Wenn man mehr als zwei Object- und Bildpunkte empirisch bestimmt, ergeben sich einander gegenseitig controlirende Bestimmungen der gesuchten Grössen.

Wenn man in dem brechenden Systeme nicht überall bildauffangende Schirme in genau messbaren Lagen aufstellen kann, so ist die zuletzt angedeutete empirische Ermittelung der Brenn- und Hauptpunkte unausführbar. Man kann aber ihre Lage auch durch Rechnung finden, wenn die maassgebenden Constanten des Systems bekannt sind. Es sind dies offenbar folgende Grössen: erstens die Brechungsindices der einzelnen Medien, und zwar soll unter dem Brechungsindex eines Mediums

derjenige verstanden werden, welcher beim Uebergang von Luft in dies Medium Geltung hat, so dass der Brechungsindex der Luft (die gemeiniglich das erste Medium des brechenden Systems bildet) $= 1$ zu setzen ist. Diese Brechungsindices sollen der Reihe nach mit n_0, n_1, $n_2 \dots n^*$ bezeichnet werden. Zweitens sind es die Entfernungen der Scheitel der brechenden Flächen in der Axe von irgend einem darin gewählten Anfangspunkte. Diese Grössen wollen wir der Reihe nach mit S_1, $S_2 \dots S^*$ bezeichnen, ihre Anzahl ist um 1 kleiner als die Anzahl der Grössen n. Drittens müssen bekannt sein die Grössen $C_1 - S_1$, $C_2 - S_2 \dots C^* - S^*$, wo unter C_1, C_2 etc. die Entfernungen der Mittelpunkte der einzelnen Kugelflächen von dem willkürlich gewählten Anfangspunkte verstanden sind. Die Differenz $C_u - S_u$ ist also ihrem absoluten Werthe nach der Halbmesser der $u$ten Trennungsfläche. Die Differenz hat aber ein charakteristisches Vorzeichen und zwar das positive, wenn der Mittelpunkt hinter, das negative, wenn er vor dem Scheitel liegt, oder mit anderen Worten, der Radius ist in die Rechnung mit positivem Zeichen einzuführen, wenn die ankommenden Strahlen auf die convexe Seite der Fläche, mit negativem, wenn dieselben auf die concave Seite fallen. Sind alle diese Grössen gegeben, so ist offenbar das System optisch vollständig charakterisirt und es muss also auch möglich sein, die Lage der Hauptpunkte und Brennpunkte in der Axe zu bestimmen, deren Existenz durch die früheren Betrachtungen erwiesen ist.

Die Art, wie die Lage der Cardinalpunkte aus den gegebenen Constanten zu berechnen ist, hat Gauss[1]) in seinen berühmten „Dioptrischen Untersuchungen" sehr elegant entwickelt. Die Wiedergabe dieser Entwickelnng würde indessen hier zu viel Raum in Anspruch nehmen und kann um so mehr hier unterlassen werden, als diese Entwickelung mit aller Ausführlichkeit und Strenge in dem in medicinischen Fachkreisen weit verbreiteten Handwörterbuch der Physiologie von Listing[2]) dargestellt ist. Wir begnügen uns daher damit, die Rechnungsregel unbewiesen hier wiederzugeben. Man schreibe sich die charakteristischen Constanten des Systems in folgender Ordnung nieder, wobei die Anzahl der Flächen m und also die der Medien $m + 1$ sein soll,

$$\begin{array}{lll}
n_0 & & \\
 & C_1 - S_1 & \\
n_1 & & S_2 - S_1 \\
 & C_2 - S_2 & \\
n_2 & & S_3 - S_2 \\
 & C_3 - S_3 & \\
n_3 & & \\
\vdots & & S^* - S_{m-1} \\
n_{m-1} & C^* - S^* & \\
n^* & &
\end{array}$$

---

[1]) Gauss, Dioptrische Untersuchungen, besonderer Abdruck der Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft. Göttingen 1841. Neuere Darstellungen der Berechnungsweise der Cardinalpunkte finden sich in verschiedenen monographischen Darstellungen. Zehender, Anleitung zum Studium der Dioptrik des Auges. Erlangen 1856. Matthiessen, Grundriss der Dioptrik etc. Leipzig 1877.

[2]) Wagner's Handb. Bd. IV, Artikel „Dioptrik des Auges."

Hierauf bilde man daraus folgende Grössen:

$$u_0 = -\frac{n_1 - n_0}{C_1 - S_1} \qquad t_1 = \frac{S_2 - S_1}{n_1}$$

$$u_1 = -\frac{n_2 - n_1}{C_2 - S_2} \qquad t_2 = \frac{S_3 - S_2}{n_2}$$

$$u_2 = -\frac{n_3 - n_2}{C_3 - S_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u_{m-1} = -\frac{n_{m-1} - n_{m-2}}{C_{m-1} - S_{m-1}} \qquad t^* = \frac{S^* - S_{m-1}}{n_{m-1}}$$

$$u^* = -\frac{n^* - n_{m-1}}{C^* - S^*}.$$

Diese Grössen sind hierauf in die Reihenfolge

$$u_0,\ t,\ u_1,\ t_2,\ u_2 \ldots \ldots u_{m-1},\ t^*,\ u^*$$

zu bringen, und aus den Elementen dieser Reihe sind vier Euler'sche Kettenfunctionen folgendergestalt zu bilden. Im Allgemeinen bildet sich eine solche aus einer beliebigen Reihe von Elementen, indem mit dem Producte der sämmtlichen Elemente multiplicirt wird, eine Summe, welche aus einer Reihe von Summandengruppen gebildet ist. Die erste Gruppe ist die 1, die zweite besteht aus den reciproken Werthen der Producte von je zwei benachbarten Elementen; die dritte Gruppe aus den reciproken Werthen der Producte derjenigen Paare von Nennern der zweiten Gruppe, die kein gemeinsames Element haben, die vierte aus den reciproken Werthen der Producte von je drei Nennern der zweiten Gruppe ohne gemeinsames Element, in den ferneren Gruppen würden die Producte von je 4, je 5 etc. jener Nennner als Nenner auftreten. Offenbar bricht die Bildung dieser Gruppen einmal von selbst ab, wenn nicht mehr die erforderliche Anzahl von Producten ohne gemeinschaftliches Element zu finden ist.

Wenn wir eine solche Function einfach durch die eingeklammerte Reihe der Elemente bezeichnen, so hätten wir beispielsweise

$$(a) = a$$

$$(a, b) = a\,b\left(1 + \frac{1}{a\,b}\right)$$

$$(a, b, c) = a\,b\,c\left(1 + \frac{1}{a\,b} + \frac{1}{b\,c}\right)$$

$$(a, b, c, d) = a\,b\,c\,d\left(1 + \frac{1}{a\,b} + \frac{1}{b\,c} + \frac{1}{c\,d} + \frac{1}{a\,b\,c\,d}\right)$$

$$(a, b, c, d, e,) = a\,b\,c\,d\,e\left(1 + \frac{1}{a\,b} + \frac{1}{b\,c} + \frac{1}{c\,d} + \frac{1}{d\,e} + \frac{1}{a\,b\,c\,d} + \frac{1}{b\,c\,d\,e} + \frac{1}{a\,b\,d\,e}\right).$$

Für die Rechnung ist es indessen bequemer, die Klammer aufzulösen, indem man das Product der sämmtlichen Elemente mit 1 und den sämmtlichen Brüchen multiplicirt.

Nach diesem Schema bilde man aus den mit u und t bezeichneten Grössen folgende 4 Kettenfunctionen

$$g = (u_0, t_1, u_1, t_2, u_2 \ldots\ldots (u_{m-1}, t^*)$$
$$h = (t_1, u_1, t_2, u_2 \ldots\ldots (u_{m-1}, t^*)$$
$$k = (u_0, t_1, u_1, t_2, u_2 \ldots\ldots (u_{m-1}, t^*, u^*)$$
$$l = (t_1, u_1, t_2, u_2 \ldots\ldots (u_{m-1}, t^*, u^*).$$

Mit Hülfe dieser vier Grössen berechnet sich die Entfernung, in welcher die erste Hauptebene hinter der ersten Trennungsfläche des Systems liegt:

$$E - S_1 = - \frac{n_0 \ (1 - l)}{k}$$

und die Entfernung, in welcher die zweite Hauptebene vor der letzten Fläche des Systems liegt

$$S^* - E^* = - \frac{n^* \ (1 - g)}{k},$$

sowie ferner die Entfernung, in welcher der erste Brennpunkt vor der ersten Trennnungsfläche zu finden ist, nämlich:

$$S_1 - F = - \frac{n_0 \cdot l}{k}$$

und die Entfernung, in welcher der zweite Brennpunkt hinter der letzten Trennungsfläche liegt:

$$F^* - S^* = - \frac{n^* \cdot g}{k}.$$

Die Lage der Knotenpunkte ergiebt sich dann leicht nach der oben gegebenen Definition derselben.

Zweites Capitel.

Das Mikroskop.

Bekanntlich besteht das Mikroskop wesentlich aus zwei collectiv brechenden Vorrichtungen. Die eine, Objectiv genannt, ist dem Gegenstande zugekehrt, der vergrössert werden soll. Sie entwirft von ihm, da er ein wenig weiter als ihr Hauptbrennpunkt davon absteht, im Inneren des Rohres ein verkehrtes physisches Bild. Dies wird durch die zweite Vorrichtung — Ocular genannt — wie durch eine Lupe betrachtet. Das Ocular muss demnach so gestellt werden, dass jenes physische Bild in seiner Brennebene liegt und dass also von dem physischen Bilde ein virtuelles Bild in unendlicher Ferne entsteht; mit anderen Worten, dass die von einem Punkte des Objectes ausgehenden Strahlenbündel als parallelstrahlige die letzte Fläche des Oculars verlassen, und somit geeignet sind, auf der Netzhaut eines normalen Auges wieder in Punkte vereinigt zu werden. Das Objectiv ist entweder eine Linse von kurzer Brennweite oder ein System aus zwei oder drei solchen. Am besten ist es, wenn sie sämmtlich möglichst achromatisch sind. Die Principien, auf

denen die Achromasie beruht, sind in jedem Lehrbuche der Physik (s. Müller-Pfaundler, 8. Aufl., Bd. II, 1. S. 194) auseinandergesetzt, es mag genügen, darauf zu verweisen; ein näheres Eingehen in das Detail der Rechnung über Achromasie kann hier unterbleiben.

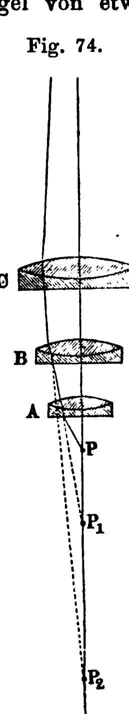
Dass man als Objectiv nicht eine einfache Linse, sondern ein Linsensystem benutzt, hat nicht etwa seinen Grund darin, dass dadurch eine höhere Vergrösserung erzielt würde. Man könnte vielmehr durch eine einfache Linse ebenfalls jede beliebige Vergrösserung erzielen. Da man aber beim Mikroskop wegen der Nähe des Objects am Objectiv Strahlenbündel von grosser Oeffnung, mithin Strahlen unter grossem Einfallswinkel benutzen muss, so würden dieselben nach Brechung in einer einzigen Linse nicht mehr hinlänglich homocentrisch sein, um ein scharfes Bild zu geben. Dieser Uebelstand kann bei einem Linsensystem von gleicher collectiver Kraft geringer sein, als bei einer einzelnen Linse.

Die Anwendung von Doppellinsen aus Flint- und Crownglas dient nicht nur dazu, die chromatische Abweichung zu vermindern, sondern es kann dadurch zugleich auch die sphärische Abweichung bedeutend vermindert werden. Diese beruht bekanntlich darauf, dass in einer Linse die Randstrahlen eines auffallenden homocentrischen Bündels stärker gebrochen werden als die mittleren. In der concaven Flintglaslinse eines achromatischen Paares werden also die Randstrahlen stärker von der Axe entfernt als die mittleren, in der convexen Crownglaslinse werden sie stärker nach der Axe hingelenkt. Es ist demnach die Möglichkeit ersichtlich, die Krümmungen beider Linsen só zu wählen, dass die stärkere Zulenkung zur Axe in der Crownglaslinse die stärkere Weglenkung in der Flintglaslinse für eine bestimmte Zone von Strahlen genau compensirt, so dass diese Zone von Randstrahlen, durch beide Linsen hindurchgegangen, sich in demselben Punkte vereinigt, wie die mittleren Strahlen. Eine Linsencombination, bei welcher dies der Fall ist und die stets zugleich auch relativ achromatisch sein kann, nennt man „aplanatisch“. Es lässt sich übrigens zeigen, dass ein Linsenpaar stets nur aplanatisch sein kann für homocentrische Bündel, welche von zwei bestimmten Punkten der Axe, den sogenannten aplanatischen Brennpunkten, ausgehen. Wenn die auffallenden Strahlen von einem zwischen den aplanatischen Brennpunkten liegenden Punkte der Axe ausgehen, so werden die mittleren Strahlen des Bündels früher vereinigt als die Randstrahlen. Das Linsenpaar erscheint überverbessert für Abstände zwischen den aplanatischen Brennpunkten. Gehen dagegen die auffallenden Strahlen aus von einem Punkte jenseits des ferneren und diesseits des näheren aplanatischen Brennpunktes, so werden die Randstrahlen früher vereinigt — die Linsencombination erscheint für solche Abstände unterverbessert. Es sei noch einmal ausdrücklich hervorgehoben, dass die Beseitigung der sphärischen Abweichung in einem Linsenpaare sich streng genommen immer nur auf eine bestimmte unendlich schmale Zone von Strahlen beziehen kann, d. h. dass Strahlen, die unter einem bestimmten endlichen Winkel

rings um die Axe liegen, im selben Punkte vereinigt werden, wie diejenigen Strahlen des Bündels, die der Axe unendlich nahe liegen. Strahlen, welche andere Zonen der Linse treffen, werden sich dann immer noch in mehr oder weniger verschiedenen Punkten vereinigen, selbst wenn das Bündel von einem der aplanatischen Brennpunkte ausgeht.

Um nun den letzterwähnten Fehler möglichst zu verkleinern, combinirt man eben mehrere achromatische Linsenpaare im Objectiv des Mikroskopes. Man bringt es auf diese Weise dahin, äusserst scharfe Bilder zu erzeugen von Punkten, die Strahlenbündel von 60° Oeffnung und darüber auf die erste Linsenfläche werfen, d. h. man bringt Strahlenkegel von etwa 60° Oeffnung zur fast genauen Vereinigung in einem Punkte. Aus dem Vorhergehenden lässt sich Einiges in dieser Beziehung entnehmen. Seien A, B, C, Fig. 74, die drei Linsenpaare eines Objectivsystems und P einer von den beiden aplanatischen Brennpunkten der ersten Linse A. Es ist nun offenbar das Günstigste, wenn das Object in P liegen kann, und wenn zugleich die Linsenpaare des Objectivs so angeordnet sind, dass ein aplanatischer Brennpunkt von B in P_1 liegt, wo sich das durch die Linse A entworfene virtuelle Bild des Punktes P befindet, und wenn endlich das von P_1 durch das zweite Linsenpaar B entworfene virtuelle Bild mit einem aplanatischen Brennpunkte P_2 des Linsenpaares C zusammenfällt. Man sieht hieraus, dass die Abstände der drei Linsenpaare von einander grossen Einfluss auf die Beseitigung der sphärischen Abweichung haben.

Fig. 74.

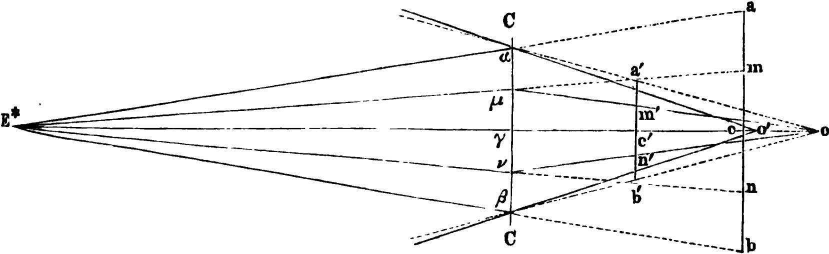


Als Ocular wendet man im Mikroskope gewöhnlich eine Combination zweier Linsen an, die so gestellt sind, dass die untere von den noch convergirenden Strahlenbündeln getroffen wird. Das reelle Bild des betrachteten Objectes entsteht also über ihr im Oculareinsatz. Man nennt diese Einrichtung das „Campani'sche“ Ocular und die untere Linse desselben „Collectiv“. Es ist leicht ersichtlich, dass wegen des Collectivs das physische Bild früher, d. h. näher am Objectiv schon zu Stande kommt, als es ohnedies zu Stande käme und dass es mithin auch kleiner ist. Da, wo das physische Bild zu Stande kommen muss, um durch die obere Ocularlinse wie durch eine Lupe betrachtet zu werden, ist im Oculareinsatz eine schwarze Blendung mit kreisförmiger Oeffnung angebracht, die das Gesichtsfeld umrahmt. Wird ein auf unendliche Ferne eingerichtetes beobachtendes Auge angenommen, so muss die Blendung genau in der Hauptbrennebene der oberen Ocularlinse stehen und der Beobachter muss das Object gerade so weit vom Objectiv entfernen, dass sein durch Objectiv und Collectiv erzeugtes physisches Bild

genau in jener Ebene entsteht, denn alsdann fallen die Strahlenbündel so auf die letzte Ocularlinse, dass sie als parallelstrahlige aus derselben hervortreten. Ist der Beobachter kurzsichtig, so muss er das Object ein wenig näher ans Objectiv bringen, dann entsteht nämlich offenbar das physische Bild ein wenig höher oben, d. h. näher an der letzten Ocularlinse als ihre Brennebene, und diese kann die jetzt stärker divergenten Strahlenbündel nicht mehr in parallelstrahlige verwandeln, sie gehen also aus ihr noch als divergentstrahlige hervor, wie es die Einrichtung eines kurzsichtigen Auges verlangt.

Zu eigenthümlichen Erscheinungen giebt die sphärische Abweichung der Ocularlinsen Veranlassung. Diese Abweichung kann, wenn sie auch noch so stark ist, keine merkliche Verwischung der einzelnen Bildpunkte bewirken, denn die zu einem einzelnen Bildpunkte beitragenden Strahlenbündel füllen nicht die ganze Oeffnung der Ocularlinsen aus. Sie sind im Niveau der Ocularlinsen (wenigstens bei hohen Vergrösserungen) so dünn,

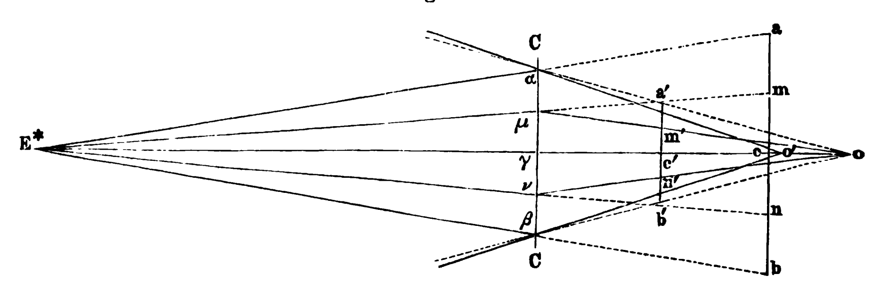
Fig. 75.



dass ihr Querschnitt vielleicht kaum ein Quadratmillimeter beträgt. Es kann also nicht wohl die Rede davon sein, dass verschiedenen Strahlen eines solchen Bündels wegen sphärischer Abweichung der Ocularlinsen verschiedene Vereinigungsweiten zukommen sollten, sie fallen eben gar nicht auf verschiedene Zonen der Ocularlinsen. Dagegen muss die sphärische Abweichung der Ocularlinsen Einfluss haben auf die gegenseitige Lage der verschiedenen Bildpunkte, mit einem Worte, sie muss eine Verzerrung des ganzen Bildes hervorbringen. Die schematische Fig. 75 wird dies erläutern. E^* sei der zweite Hauptpunkt des Objectivs (der mit seinem zweiten Knotenpunkte zusammenfällt). Es sei ferner ab der Ort, welchen das vom Objectiv erzeugte reelle Bild einnehmen würde, wenn die Collectivlinse CC nicht vorhanden wäre. Diese bringt nun aber die nach den Punkten von ab zielenden Strahlenbündel schon früher, etwa in der Ebene $a'b'$, zur Vereinigung. Es fragt sich jetzt, wo in dieser Ebene die einzelnen den Punkten a, m, c, n, b entsprechenden Bildpunkte wirklich zu Stande kommen. Wir wollen, um diese Frage zu beantworten, den nach a, m, c, n, b zielenden auf der letzten Fläche des Objectivs als Basis stehenden Strahlenkegeln die Richtungsstrahlen E^*a, E^*m, E^*c, E^*n, E^*b substituiren. Dies ist in der That erlaubt, da, wie vorhin gezeigt

wurde, die fraglichen Strahlenkegel in der Höhe von CC schon so dünn sind, dass sie die Ebene CC fast nur in je einem Punkte schneiden. Wäre das Collectiv vollkommen aplanatisch, so würden die sämmtlichen Strahlen $E^*\alpha$, $E^*\beta$ .... einen Vereinigungspunkt in der Axe haben, etwa O und die Vereinigungspunkte der unendlich dünnen Strahlenkegel, an deren Stelle jene Strahlen gesetzt werden, wären also jedesfalls zu suchen auf den Linien $O\alpha$, $O\mu$, $O\gamma$, $O\nu$, $O\beta$. Es wären mithin die Punkte a', m', c', n', b', wofern sie überall in der Ebene $a'b'$ lägen. Ihre gegenseitigen Abstände $a'm'$, $m'n'$ etc. ständen daher vermöge leicht zu übersehender Beziehungen ähnlicher Dreiecke in denselben Verhältnissen, wie die entsprechenden Abstände der Bildpunkte am, mn etc. resp. wie die Abstände entsprechender Objectpunkte. Mit einem Worte, das reelle Bild $a'b'$ wäre dem Objecte geometrisch ähnlich. Ist nun aber das Collectiv mit sphärischer Abweichung behaftet, dann werden die am Rande, z. B. die bei α und β auftreffenden Strahlen stärker abgelenkt und wer-

Fig. 76.



den die Ebene $a'b'$ näher an c etwa wie die ausgezogenen nach O' zielenden Linien schneiden. Die Abstände der Bildpunkte werden daher nicht mehr in den Verhältnissen zu einander stehen, welche die geometrische Aehnlichkeit mit dem Bilde ab und resp. mit dem Objecte erfordert.

Eine radial gestellte Reihe von Objectpunkten, in der je zwei benachbarte gleich weit von einander abstehen, würde also eine radiale Reihe von Bildpunkten liefern, in welcher die Abstände zwischen je zwei benachbarten von der Mitte nach der Peripherie abnehmen. Ein Quadratnetz, wie Fig. 77, als Object würde daher ein Bild liefern, wie Fig. 78.

Die entgegengesetzte verzerrende Wirkung muss eine Linse hervorbringen, wenn die Bilder auf der anderen Seite liegen und virtuell sind. Man kann dies schon aus der Construction der Fig. 75 entnehmen, läge nämlich die Ebene der Bildpunkte links von CC, so würde sie von den rückwärts verlängerten Linien $O'\alpha$ und $O'\beta$ weiter von der Axe weg geschnitten, als von den rückwärts verlängerten punktirten Linien $O\alpha$ und $O\beta$. In einem virtuellen Bilde würden also die Randpunkte verhältnissmässig weiter aus einander gerückt erscheinen als die mehr in der Mitte

gelegenen Punkte. Das virtuelle Bild eines Quadratnetzes würde demnach in der Weise verzerrt erscheinen, wie es Fig. 79 zeigt.

Die vorstehend entwickelte Bildverzerrung kann durch geschickte Combination zweier Linsen zum Campani'schen Ocular bis zum Unmerklichen herabgedrückt werden, da eben die erste Linse des Campani'schen Oculars — das Collectiv — reelle, die zweite Linse desselben virtuelle Bilder liefert und, wie soeben gezeigt wurde, virtuelle Bilder im entgegengesetzten Sinne verzerrt werden wie reelle. Daher kann im Campani'schen Ocular stets Compensation der beiden Verzerrungen erzielt werden. Ist im gegebenen Falle die Compensation nicht vollständig erreicht und eine merkliche Verzerrung des Bildes, sei es nach dem Schema von Fig. 78, sei es nach dem von Fig. 79, übrig, so sprechen viele Mikroskopiker von „Krümmung des Gesichtsfeldes". Dies ist jedoch, wie sich aus den vorstehenden Erörterungen ergiebt, ein irriger Sprachgebrauch.

Fig. 77.

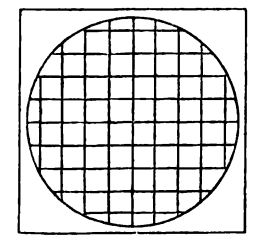


Fig. 78.

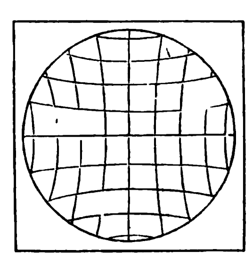
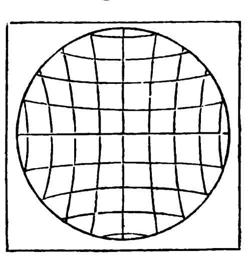


Fig. 79.



Es giebt aber ausserdem allerdings eine wahre Krümmung des Gesichtsfeldes, d. h. die Bildpunkte liegen nicht in einer Ebene. Diese Krümmung hängt theils davon ab, dass die Punkte eines ebenen Objectes nicht alle gleich weit abstehen von der nächsten brechenden Kugelfläche, auf welche sie ihre Strahlenbündel werfen. Wenn nun dies ebene Object nahe bei der Hauptbrennebene der nächstfolgenden Linse liegt, so muss offenbar ein kleiner Unterschied der Entfernungen seiner Punkte von der ersten Fläche dieser Linse, ganz abgesehen von der sphärischen Abweichung, einen grossen Unterschied der entsprechenden conjugirten Vereinigungsweiten bedingen, und das Bild wird also eine bedeutende Krümmung zeigen, die durch die sphärische Abweichung der zweitfolgenden Linse noch vermehrt werden kann. Man bemerke, dass bei dieser Betrachtung allemal das reelle oder virtuelle Bild, was die eine Linse erzeugt, für die nächstfolgende als Object zu behandeln ist. Sofern begreiflicherweise die folgende Linse möglicherweise eine Bildkrümmung im entgegengesetzten Sinne hervorbringen kann, wie die vorhergehende, so kann auch in dieser Beziehung eine schliessliche Compensation stattfinden, d. h. die sogenannte „Ebenung des Gesichtsfeldes" in der eigentlichen Bedeutung des Wortes. Es wird hoffentlich aus den

vorstehenden Erörterungen zur Genüge erhellen, dass die Bildkrümmung und die Bildverzerrung zwei wesentlich verschiedene Erscheinungen sind, die zwar vereinigt vorkommen können, aber durchaus nicht nothwendig vereinigt sein müssen. Wäre in einem gegebenen Falle am schliesslichen virtuellen Bilde des Mikroskopes die Krümmung allein vorhanden, so würde das Bild zwar dem Objecte geometrisch ähnlich sein, aber ein Auge würde nicht alle Punkte desselben gleichzeitig deutlich sehen können, weil sie sich in verschiedenen Abständen davon befänden und folglich verschiedene Accommodation zum deutlichen Sehen erforderten. Umgekehrt wird ein verzerrtes aber ebenes Bild in allen Punkten gleichzeitig deutlich gesehen.

Sehen wir nun ab von den verschiedenen Abweichungen, die, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, auf wenig störende kleine Beträge herabgebracht werden können, und betrachten den schliesslichen optischen Gesammteffect des Mikroskopes. Es wird am einfachsten anschaulich, wenn wir das ganze Mikroskop mit allen seinen Linsen nach den Grundsätzen des ersten Capitels als ein brechendes System behandeln und die Cardinalpunkte desselben aufsuchen. Nägeli und Schwendner[1]) haben dies für einen bestimmten Fall ausgeführt. Die zu Grunde gelegten optischen Constanten (Brechungsindices, Krümmungsradien, Scheitelabstände) schliessen sich in etwas abgerundeten Zahlen den Verhältnissen an, die bei den jetzt gebräuchlichen stark vergrössernden Instrumenten mit drei achromatischen Objectivlinsen und Campani'schem Oculare wirklich vorkommen. Insbesondere ist die gesammte Tubuslänge, d. h. der Abstand von der ersten Fläche des Objectivs bis zur letzten Fläche des Oculars, gleich 200 mm angenommen. Die Rechnung ergiebt nun folgende Lage der optischen Cardinalpunkte: der erste Hauptpunkt liegt 1,128 mm vor der ersten Fläche des Objectivs, der erste Brennpunkt liegt 0,517 mm vor derselben Fläche. Der zweite Hauptpunkt liegt 6,727 mm hinter der letzten Fläche des Oculars und der zweite Brennpunkt liegt 6,116 mm hinter derselben Fläche. Wir stellen noch die Lagen der wichtigen Punkte in der Axe des Mikroskops tabellarisch zusammen, indem wir den ersten Hauptpunkt, der am weitesten vorn liegt, zum Ausgangspunkte wählen, so dass alle Abstände ein positives Vorzeichen erhalten.

---

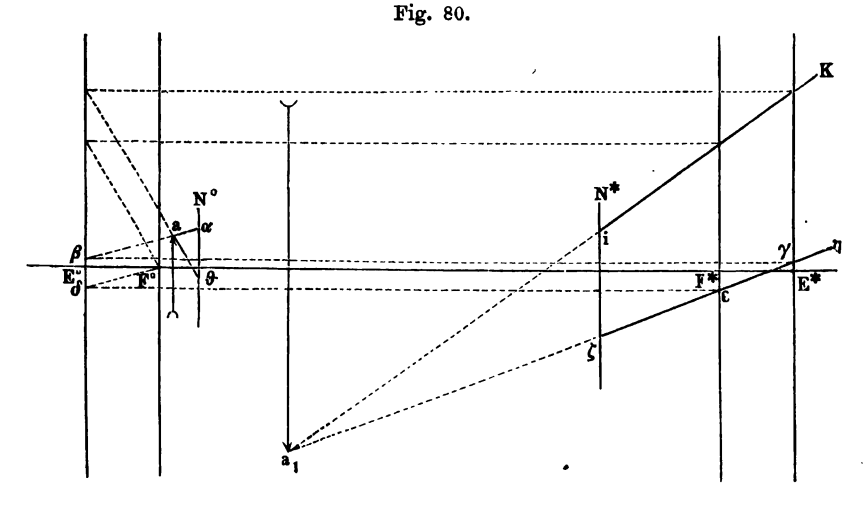
[1]) Das Mikroskop. Theorie und Anwendung desselben von Nägeli und Schwendner. Leipzig 1865. In diesem ausgezeichneten Werke ist die Theorie des Mikroskopes und der mikroskopisehen Wahrnehmung zum ersten Male in der dem Gegenstande allein angemessenen streng physikalischen Weise ausführlich dargestellt. Wir können daher das Studium dieses Werkes allen Denen, die sich mit dem Mikroskope beschäftigen, nicht dringend genug empfehlen. Auch die vorhergehenden Erörterungen des Textes über die Correction der Abweichungen sind dem citirten Werke im Wesentlichen entnommen.

Erster Hauptpunkt. . . .	$E^0 =$	0
Erster Hauptbrennpunkt . .	$F^0 =$	0,611
Erste Fläche des Objectivs .	$N^0 =$	1,128
Letzte Fläche des Oculars .	$N^* =$	201,128
Zweiter Hauptbrennpunkt .	$F^* =$	207,244
Zweiter Hauptpunkt . . .	$E^* =$	207,855

Die beiden Hauptbrennweiten sind daher: $E^0 - F^0 = -0{,}611 = F^* - E^*$. Sie sind beide einander gleich, wie es bei einem Systeme von der Art des Mikroskops, wo die Strahlen zuletzt in demselben Medium (Luft) verlaufen, aus welchem sie gekommen sind, der Fall sein muss.

In Fig. 80 ist die Art und Weise, wie die Cardinalpunkte gegen einander und gegen die beiden äussersten brechenden Flächen des

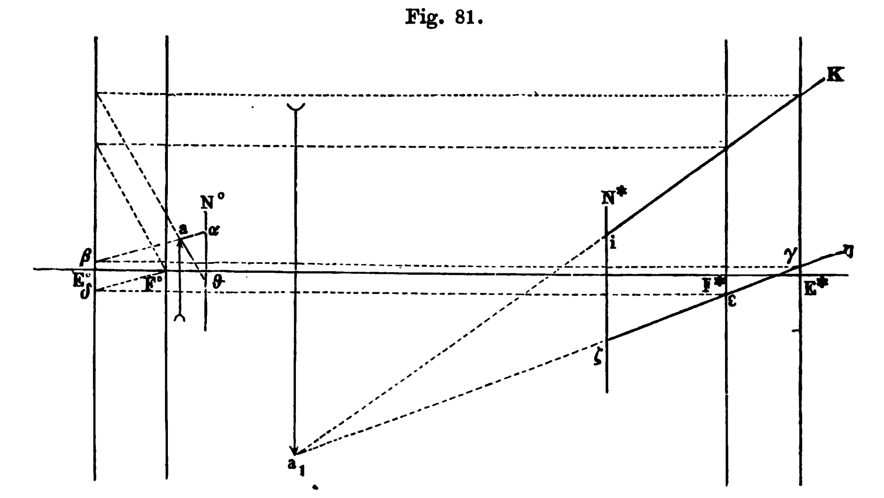
Fig. 80.



Systems liegen, anschaulich gemacht, jedoch sind die in der Tabelle angegebenen Verhältnisse nicht eingehalten, weil sonst die Figur zu gross hätte werden müssen, um deutlich zu bleiben. Es wird sofort auffallen, dass die Vertheilung der optischen Cardinalpunkte in unserem Systeme eine sehr ungewohnte ist. Keiner der vier Punkte liegt in dem Raume zwischen der ersten und letzten Fläche des Systems und, was besonders charakteristisch ist, die Brennpunkte liegen zwischen den Hauptpunkten. Gleichwohl sind die Constructionsregeln und Formeln des ersten Capitels ohne die geringste Aenderung anwendbar. Einige Beispiele mögen zur näheren Erläuterung dienen. Ein Strahl, vom leuchtenden Punkte a ausgehend, falle in der Richtung $a\alpha$ auf die erste brechende Fläche. Um seine Richtung nach dem Austritte aus der letzten Fläche zu construiren, haben wir erstens die Richtung des Strahles (hier rückwärts) zu verlängern, bis sie die erste Hauptebene (in β) schneidet, von

hier haben wir zweitens eine Parallele zur Axe zu ziehen. Ihr Durchschnittspunkt γ mit der zweiten Hauptebene ist ein Punkt auf dem gesuchten Wege des ausfahrenden Strahles; wir haben drittens zur Richtung des einfallenden Strahles eine Parallele $F^0\delta$ durch den ersten Brennpunkt zu ziehen, und endlich viertens von ihrem Durchschnitte δ mit der ersten Hauptebene eine Gerade parallel zur Axe. Ihr Durchschnittspunkt ε mit der zweiten Brennebene ist ein zweiter Punkt des gesuchten ausfahrenden Strahles. Dieser ist also (von der letzten brechenden Fläche an ausgezogen) $\zeta\eta$. Construirt man noch einen zweiten vom leuchtenden Punkte a ausgehenden Strahl etwa $a\vartheta$, so wird man finden, dass seine Richtung nach allen Brechungen $\iota\varkappa$ ist, welche die Richtung des Strahles $\zeta\eta$ rückwärts verlängert in a' schneidet, von dem Punkte a wird also bei a' ein virtuelles Bild entstehen. Man sieht auch sogleich,

Fig. 81.



dass das Bild eines ebenen Gegenstandes, der bei a senkrecht zur Axe steht, ein verkehrtes sein wird, denn das Bild des in unserer Figur über der Axe liegenden Punktes a liegt unter der Axe.

Wir wollen nun berechnen, wo ein Object liegen muss, wenn das virtuelle Bild desselben um die conventionelle Sehweite, d. h. 200 mm, von dem durch das Mikroskop sehenden Auge abstehen soll. Wir denken uns das Auge geradezu in der zweiten Hauptebene aufgestellt, was von der vortheilhaftesten Lage des Auges nicht viel abweicht. Wir können also jetzt den Werth 200 als Bildabstand von der zweiten Hauptebene, von welcher ja (S. 262) die Bildabstände zu rechnen sind, in die dioptrische Grundformel $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{f}$ einführen, jedoch müssen wir dem fraglichen Werthe von p^* natürlich das negative Vorzeichen geben, da das Bild (ein virtuelles) vor, nicht hinter der zweiten Hauptebene

liegen soll. Für f haben wir den Werth $-0{,}611$ zu setzen und haben also zur Bestimmung von p die Gleichung $\frac{1}{p} - \frac{1}{200} = -\frac{1}{0{,}611}$. Sie ergiebt mit Beibehaltung dreier Stellen $p = -0{,}613$; das Minuszeichen bedeutet, dass das Object hinter die erste Hauptebene zu stellen ist. Es käme also ganz nahe hinter die vordere Brennebene zu stehen und 0,515 mm vor die erste Fläche (N^0) des Objectivs. Ich warne noch ausdrücklich vor einem Missverständnisse, dem unser Resultat ausgesetzt sein könnte, dass das Object, um ein virtuelles Bild in mittlerer Sehweite zu erzeugen, hinter die erste Brennebene gestellt werden muss. Es muss nämlich bekanntlich vor der ersten Brennebene des Objectivs liegen, aber die erste Brennebene des Objectivs ist eben etwas Anderes als die erste Brennebene des ganzen Mikroskops, und mit dieser letzteren haben wir es hier zu thun.

Fragen wir jetzt, welche Linearvergrösserung das Mikroskop in dem berechneten Falle hervorbringt. Wir benutzen zu diesem Ende den Satz, dass bei einem brechenden Systeme, wo das erste und letzte Mittel identisch sind, die Knotenpunkte in die respectiven Hauptebenen fallen und dass mithin die Durchmesser von Bild und Object im Verhältnisse der conjugirten Vereinigungsweiten stehen, die von den Hauptebenen aus zu rechnen sind. Wir haben also die Proportion, Durchmesser des Bildes zum Durchmesser des Objects $= 200 : 0{,}613 = 326 : 1$. Wir hätten also eine 326 fache Linearvergrösserung.

Wollte jetzt ein kurzsichtigeres Auge von etwa 100 mm Sehweite ein Object deutlich sehen, so müsste dasselbe (wofern wieder das Auge in der hinteren Hauptebene gedacht wird) in eine Entfernung p von der vorderen Hauptebene gestellt werden, dass man $\frac{1}{p} - \frac{1}{100} = -\frac{1}{0{,}611}$ hätte. Diese Gleichung ergiebt nahezu $p = -0{,}615$. Man sieht also, der zweite Beobachter müsste das Object um etwa 0,002 mm weiter von E^0 wegrücken als der erste, d. h. um etwa 0,002 mm der ersten Objectivfläche N^0 nähern, resp. den Tubus des Mikroskops um 0,002 mm senken, oder die geeignete Objectdistanz für das jetzt gedachte Auge wäre 0,513 mm. In der That ist es jedem Mikroskopiker bekannt, dass ein kurzsichtiger Beobachter, um deutlich zu sehen, die erste Objectivfläche näher ans Object bringt als ein weniger kurzsichtiger.

Bei der neuen Objectdistanz wird sich aber verhalten der Durchmesser des Bildes zum Durchmesser des Objectes $= 100 : 0{,}615 = 162 : 1$. Das Bild wird also jetzt ziemlich genau halb so gross sein, als im erstgedachten Falle, da es aber jetzt auch nur halb so weit vom Auge absteht, so wird es unter demselben Gesichtswinkel erscheinen wie das erste Mal, oder mit anderen Worten, eine perspectivische Projection des Bildes vom Standpunkte des Auges auf eine Ebene, die soweit absteht, wie die Ebene des Bildes im ersten Falle, wird ebenso gross sein, wie das erstere Bild. Hierin liegt die Berechtigung, einem gegebenen Mikroskope eine

bestimmte Vergrösserungszahl beizulegen. Man muss eben nur einen bestimmten Abstand verabreden, in welchem allemal das Bild projicirt werden soll.

Man sieht aus dem Vorstehenden, dass die Vergrösserungszahl des Mikroskopes durch Rechnung gefunden werden kann, wenn man alle optischen Constanten des Mikroskopes (Brechungsindices, Krümmungshalbmesser, Scheitelabstände) kennt. In der Praxis wird man indessen nicht leicht in den Fall kommen, diese Berechnung auszuführen. In der That würde es eine enorme Arbeit sein, die sämmtlichen optischen Constanten eines Mikroskopes zu bestimmen, und das Schlussergebniss würde dennoch ein sehr unsicheres sein, da der kleinste Fehler in der Bestimmung der Brechungsindices und Krümmungshalbmesser der Objectivlinsen bei der Kleinheit der letzteren auf das Schlussergebniss einen ausserordentlichen Einfluss üben würde. Man pflegt daher in der Praxis die Vergrösserungszahl empirisch zu bestimmen, was sehr leicht mit grosser Genauigkeit ausgeführt werden kann. Es kommt ja nur darauf an zu bestimmen, unter welchem Gesichtswinkel der Durchmesser eines Objectes von bekannter Grösse durch das Mikroskop erscheint, und dann die Länge einer Linie zu finden, welche in dem ein- für allemal verabredeten Abstande — der mittleren Sehweite — ohne Linsen gesehen, unter demselben Gesichtswinkel erscheint, die Länge dieser Linie, dividirt durch den bekannten Objectdurchmesser, ist die Vergrösserungszahl. Die ohne Linsen zu sehende Linie kann man entweder dem anderen Auge darbieten, oder man sieht durch das Mikroskop nur mit einem Theile der Pupille und benutzt den Rest der Pupille desselben Auges zum Sehen nach der Vergleichslinie. Um das Letztere zu bewerkstelligen, bedient man sich am einfachsten des sogenannten Sömmering'schen Spiegels. Dies ist ein Spiegelchen, kleiner als eine gewöhnliche Pupille. Es wird über dem Ocular des Mikroskopes an der Stelle befestigt, wo sonst das Auge des Beobachters zu stehen pflegt. Die spiegelnde Ebene muss dem Mikroskop zugewandt sein und mit seiner Axe einen Winkel von 45° machen. Das Auge des Beobachters kommt nun dicht vor das Spiegelchen und seine Sehrichtung wird senkrecht gegen die Mikroskopaxe gestellt (also wagerecht, wenn diese letztere senkrecht ist). Das Spiegelchen wirft folglich die aus dem Ocular austretenden Strahlenbündel ins Auge in dessen Sehrichtung. Man sieht aber gleichzeitig eine dem Auge gegenüberliegende Fläche durch Vermittelung von Strahlen, welche von ihren einzelnen Punkten neben dem Spiegelchen vorbei ins Auge gehen. Es macht dann den Eindruck, als ob das mikroskopische Bild durchsichtig wäre und man die Fläche dadurch sähe. Es giebt noch einige andere Veranstaltungen, wo mit Hülfe von Prismen derselbe Zweck erreicht wird.

Erläutern wir das Princip des in Rede stehenden Verfahrens zur Bestimmung der Vergrösserungszahl durch ein fingirtes Beispiel. Als Object liege unter dem Mikroskope ein Glasmikrometer mit hundert

Theilstrichen auf dem Millimeter. Man sehe nun mit dem linken Auge durch das Mikroskop und sehe mit dem rechten daneben vorbei. Man lege endlich auf den Tisch neben das Mikroskop an die Stelle, auf welche die Sehrichtung des rechten Auges zielt, einen in Millimeter getheilten Maassstab, natürlich so, dass seine Theilstriche denen des Mikrometers auf dem Objecttische parallel sind. Man rückt Alles so zurecht, dass das Bild des Maassstabes im rechten Auge mit dem mikroskopischen Bilde des Mikrometers im linken Auge zu binocularer Deckung kommt. Nun merke man sich, welche zwei Theilstriche des Mikrometers am genauesten zusammenfallen mit zwei Theilstrichen des direct gesehenen Maassstabes. Nehmen wir an, die beiden gemerkten Theilstriche des Mikrometers seien durch sieben Zwischenräume getrennt, d. h. ihr Abstand wäre 0,07 mm und die beiden Theilstriche des direct gesehenen Maassstabes ständen 28 mm von einander ab. Dann wissen wir, 0,07 mm erscheinen durch das Mikroskop gesehen unter demselben Gesichtswinkel wie 28 mm geradezu gesehen. Aber es ist jetzt noch nicht $\frac{28}{0,07}$ die gesuchte Vergrösserungszahl des Mikroskopes, denn wir hatten nicht den Maassstab in die verabredete Sehweite gelegt. Auf diese lässt sich indessen der gefundene Abstand leicht reduciren. Nehmen wir an, die Entfernung des geradezu gesehenen Maassstabes vom rechten Auge wäre $= 304$ mm gewesen und die verabredete mittlere Sehweite betrüge 250 mm. In dieser letzteren Entfernung würde offenbar die Länge von $28 \times \frac{250}{304} = 23$ unter demselben Gesichtswinkel erscheinen, wie die Länge von 28 in der Entfernung von 304 mm. Wir haben also schliesslich das Resultat, das virtuelle Bild im Mikroskope von einem 0,07 mm langen Objecte erscheint unter demselben Gesichtswinkel wie 23 mm im verabredeten Abstande von 250 mm mit freiem Auge gesehen. Die Vergrösserungszahl wäre also $\frac{23}{0,07} = 326$. Bei Anwendung des Sömmering'schen Spiegels oder eines anderen Reflectionsapparates ist natürlich der Gang der Rechnung genau derselbe.

Die eben beschriebenen Verfahrungsweisen können, wenn einmal die Vergrösserungszahl des Mikroskopes bestimmt ist, umgekehrt benutzt werden, um unbekannte Objecte zu messen. Nehmen wir beispielsweise an, wir hätten Blut unter dem Mikroskope, das rechte Auge sehe gleichzeitig nach einer Millimeterscala, welche diesmal 315 mm davon abstehen mag. Der Durchmesser eines bestimmten Blutkörperchens decke nun binocular 3,1 mm des mit dem rechten Auge gesehenen Maassstabes. Läge also der Maassstab bloss 250 mm vom Auge entfernt, so würde der Durchmesser des Blutkörperchens $3,1 \times \frac{250}{315} = 2,5$ mm davon decken. Wir wissen nun, dass die Vergrösserungszahl unseres Instrumentes $= 326$ ist, d. h. wir wissen: ein Gegenstand, dessen Bild unter demselben Ge-

sichtswinkel erscheint wie eine bestimmte in 250 mm Abstand gesehene Linie, muss 326 mal kleiner sein als diese Linie. Der Durchmesser des Blutkörperchens muss also $= \frac{2,5}{326}$ oder etwa $= 0,0077$ sein. Es ist gut zu bemerken, dass solche Bestimmungen mit Hülfe der binocularen Deckung zu ebenso genauen Resultaten führen, als jede beliebige mikrometrische Methode mit noch so feinen Hülfsmitteln. Zwar ist die Genauigkeit einer einzelnen Bestimmung nicht sehr gross, wohl aber die Mittelzahlen aus einer einigermaassen grossen Anzahl von Bestimmungen derselben Grösse.

Ueber die scheinbare Helligkeit mikroskopischer Bilder sind, wie es scheint, noch immer in weiten Kreisen Vorurtheile verbreitet, welchen zu begegnen hier der Ort ist. Es glauben Viele, auch mit dem praktischen Gebrauche des Mikroskops wohl Vertraute, man könne durch das Mikroskop einen Gegenstand heller sehen als mit freiem Auge. Dieser Irrthum dürfte besonders dadurch veranlasst sein, dass man meist durch das Mikroskop und sein Object auf eine ungewöhnlich helle Fläche, nämlich den starkes Licht reflectirenden Spiegel hinschaut, während man dasselbe Object vorher mit freiem Auge auf einem dunkeln Grunde bei mässig auffallendem Lichte betrachtet hat. Wenn man einmal durch den Tubus des Mikroskops und das Object nach Beseitigung der Gläser den richtig gestellten Spiegel anblickt, so wird man bald gewahr, dass durch die Gläser die Lichtmenge nicht vermehrt wird.

Es lässt sich folgender Satz mit aller mathematischen Strenge beweisen. Durch das Mikroskop — und beiläufig sei gesagt, durch irgend welchen optischen Apparat — lässt sich n i e ein Object h e l l e r sehen als mit freiem Auge. Jedes Mikroskop zeigt den Gegenstand bis zu einer gewissen Vergrösserungszahl ebenso hell als es mit freiem Auge erscheint. Diese Grenzvergrösserung wollen wir die Normalvergrösserung nennen und mit N_0 bezeichnen.

Unter der Voraussetzung, dass die erste Objectivfläche des Instrumentes Strahlenbündel von sehr grosser Oeffnung aufnehmen (und in der That erreichen die neueren Objectivsysteme nahezu die Grenze von zwei Rechten), ist die Normalvergrösserung N_0 gleich der Sehweite, für welche die Vergrösserungen bestimmt werden sollen, dividirt durch den Radius der Pupille. Nehmen wir den letzteren zu 1,5 mm an, so wäre, da man die Vergrösserungsziffern auf eine Sehweite von 250 mm bezieht, die Normalvergrösserung $= \frac{250}{1,5} = 166,7$. Für höhere Vergrösserungen nimmt die Helligkeit rasch ab, sie ist:

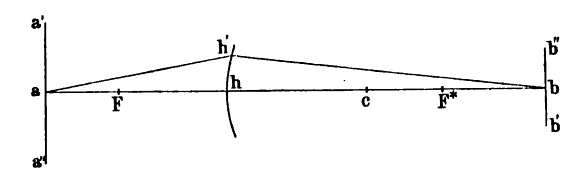
für	333,3 fache	Vergrösserung	$^1/_4$,
„	500,0 „	„	$^1/_9$,
„	666,7 „	„	$^1/_{16}$

der Helligkeit mit freiem Auge.

Für Leser, welchen die mathematische Zeichensprache geläufig ist, geben wir den strengen Beweis dieses Satzes nach Helmholz[1]).

Es sei hh' (Fig. 82) die erste brechende Fläche eines Systems, c ihr Mittelpunkt, ihr Radius $hc = r$. Das Medium vor ihr habe zum Brechungsindex n_1, das hinter

Fig. 82.



ihr n_2. Die Hauptbrennweiten für diese Brechung seien $Fh = f_1$ und $hF^* = f_2$. Object und Bildabstände bezeichnen wir ähnlich wie in früheren Fällen mit p_1 und p_2, ab sei die Axe des optischen Systems, und a der Mittelpunkt eines Objects, dessen Durchmesser $a'a'' = \beta_1$ ist. b sei der dem Objectpunkte a entsprechende Bildpunkt im 2. Medium und $b'b'' = \beta_2$ der Durchmesser des Bildes von $a'a''$. Es ergiebt sich zunächst, da a'', c und b'' auf einer Geraden liegen müssen:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = -\frac{ac}{bc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(das — Zeichen deutet auf die Umkehrung des Bildes). Wir nehmen nun einen beliebigen Strahl ah' aus dem von a ausgesandten Bündel, welches wir so dünn voraussetzen, dass es den oben (S. 252) entwickelten Voraussetzungen homocentrischer Brechung entspricht, und nennen seinen „Divergenzwinkel" $h'ac$, den es mit der Axe bildet α_1, der entsprechende gebrochene Strahl bildet mit der Axe den Winkel $\alpha_2 = -h'bc$. Da wir das kleine Bogenstück hh' als gerade betrachten können, so ist:

$$hh' = ah\, tg\, \alpha_1 = -bh\, tg\, \alpha_2$$

oder:

$$hh' = p_1\, tg\, \alpha_1 = -p_2\, tg\, \alpha_2$$

und da α_1 sowie α_2 nach der Voraussetzung sehr kleine Winkel sind:

$$p_1 \alpha_1 = -p_2 \alpha_2 \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Multiplication der Gleichungen (1) und (2) ergiebt:

$$\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} = \frac{ac \cdot p_2}{bc \cdot p_2} = \frac{(p_1 + r) \cdot p_2}{(p_2 - r)\, q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nun ist aber nach den bekannten Gesetzen der Brechung dünner Strahlenbündel an einer Kugelfläche:

$$f_1 = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1} = hF_1$$

$$f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1} = hF_2$$

also:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{und} \quad f_2 - f_1 = r$$

sowie:

---

[1]) Poggendorf's Annalen. Jubelband 1874, S. 557.

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{f_2}{p_1 + r} + \frac{f_1}{p_2 - r} = 1\text{[1]}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2 - f_2}{f_1} \quad \text{und} \quad \frac{p_2 - r}{p_1 + r} = \frac{(p_2 - r) - f_1}{f_2}.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so erhält man:

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1 + r}{p_2 - r} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{p_2 - f_2}{(p_2 - r) - f_1}$$

nun ist aber, weil:

$$r = f_2 - f_1, \; p_2 - r - f_1 = p_2 - f_2,$$

folglich:

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1 + r}{p_2 - r}$$

oder nach (3):

$$\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1},$$

d. h.:

$$\alpha_1 \beta_1 n_1 = \alpha_2 \beta_2 n_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Betrachtet man nun die Brechung an der zweiten Fläche, so erhalten wir nach demselben Verfahren bei entsprechender Bezeichnung:

$$\alpha_2 \beta_2 n_2 = \alpha_3 \beta_3 n_3.$$

Wenn wir so den Strahl durch das ganze System verfolgen und die auf das letzte Medium bezüglichen Grössen durch * bezeichnen, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\alpha_1 \beta_1 n_1 = \alpha_2 \beta_2 n_2 = \text{etc.} = \alpha^* \beta^* n^*.$$

Diese Reihe von Gleichungen giebt in Worte übersetzt folgenden Lehrsatz. Das Product aus dem Divergenzwinkel eines beliebigen Strahles, dem Brechungsverhältnisse des Mediums, in welchem er sich bewegt, und der Grösse des Bildes, welchem die durch das betreffende Medium sich bewegenden Strahlen angehören, bleibt in einem centrirten Systeme kugeliger brechender (oder spiegelnder) Flächen bei jeder Brechung ungeändert, wenn überhaupt die Bedingungen für Entwerfung genauer Bilder eingehalten sind.

Dieser Satz gilt insbesondere natürlich auch für die Strahlen, welche den Rand der relativ engsten Blendung des optischen Werkzeuges streifen. Ihr Divergenzwinkel ist aber der halbe Oeffnungswinkel desjenigen Strahlenbündels, welches überhaupt das ganze Werkzeug bis zum Austritt wirksam durchläuft.

Um hiervon auf die Verhältnisse der Lichtstärke zur Vergrösserung Anwendung zu machen, erinnern wir uns an den bekannten ersten Grundsatz der Photometrie, welcher so lautet: Die Lichtmenge L, welche ein leuchtendes Flächenelement dS einem in der Entfernung r befindlichen Flächenelemente ds zusendet, ist, wenn mit $(r_1 N)$ und $(r_1 n)$ die Winkel zwischen r und der Normalen auf dS und ds bezeichnet werden und J die Dichtigkeit der von dS ausgesandten Strahlenbündel bedeutet:

$$L = J \frac{d S_1 \cdot ds}{r_2} \cos(r_1 N_1) \cdot \cos(r_1 n).$$

Verstehen wir unter ds die kreisförmige Oeffnung einer brechenden Fläche eines optischen Werkzeuges und unter dS_1 ein von der Axe geschnittenes leuchtendes Flächenelement, dann ist r auf ds senkrecht, also $\cos(r_1 n) = 1$.

---

[1]) Diese Gleichung erhält man durch geeignete Combination der beiden vorhergehenden.

Nennt man α den Divergenzwinkel der Strahlen zum (kreisförmigen) Umfange von ds, so ist der Flächenraum von $ds = \pi (r \sin \alpha_1)^2$, oder da α_1 wie oben immer noch klein vorausgesetzt wird

$$ds = \pi r^2 \alpha_1^2 \quad \text{und} \quad L = J \pi \alpha^2 d S_1 \cos (r_1 N_1).$$

Dieselbe Lichtmenge muss aber im folgenden Medium in dem gebrochenen Strahlenkegel enthalten sein. Als leuchtendes Flächenelement ist aber jetzt das Bild $d S_2$ von $d S_1$ zu betrachten und wenn wir unter α_2 den halben Oeffnungswinkel des neuen Strahlenkegels, unter J_2 seine Dichtigkeit, sowie unter $(r_1 N_2)$ den Winkel zwischen der Axe und der Normale zu $d S_2$ verstehen, so muss auch $L = \pi \alpha_2^2 d S_2 \cos (r_1 N_2)$ sein. Und da die Projectionen von Object und Bild auf zur Axe senkrechten Ebenen in dem oben mit $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ bezeichneten Verhältnisse stehen, so ist:

$$\frac{d S_1 \cos (r_1 N_1)}{d S_2 \cos (r_1 N_2)} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Daraus folgt $J_1 \alpha_1^2 \beta_1^2 = J_2 \alpha_2^2 \beta_2^2$ und mit Benutzung von Gleichung (4):

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{J_1}{n_1^2} = \frac{J_2}{n_2^2}.$$

Diese Gleichung gilt natürlich für alle auf einander folgenden Brechungen des Systems, das heisst in Worten: die Dichtigkeit des Strahlenbündels, dividirt durch den Brechungsindex des Mediums, in welchem es sich gerade bewegt, bleibt bei seinem ganzen Gange durch das System eine constante Grösse, und wenn das Object und das schliessliche Bild in demselben Medium liegen ($n_1 = n^*$), so wird das letztere aus Strahlenbündeln bestehen, deren Dichtigkeit (von Verlusten durch Absorption und Reflexion abgesehen) allerhöchstens der Dichtigkeit der vom Objecte ausgesandten Bündeln gleich sein kann.

Der vorstehende Beweis dieses Satzes ist unter der Voraussetzung geführt worden, dass die Strahlenbündel von vornherein eine sehr kleine Oeffnung haben. Er muss aber auch richtig sein, wenn, wie dies bei den neueren Mikroskopen der Fall ist, die von den Objectpunkten in das Objectiv eindringenden Strahlenbündel grosse Oeffnungswinkel haben. Man sieht dies sofort ein, wenn man statt an die erleuchtende an die erwärmende Wirkung der Strahlen denkt. Wenn man sich nämlich das Object $d S_1$ und das Bild $d S^*$ von gleicher Temperatur und das ganze System mit Object und Bild in eine Hülle von derselben Temperatur eingeschlossen vorstellt, so kann dies Temperaturgleichgewicht nach bekannten Grundsätzen durch die gegenseitige Zustrahlung nicht gestört werden. Wenn aber die von $d S_1$ ausgesandten Strahlenbündel verdichtet auf $d S^*$ fielen, so würde sich $d S_1$ abkühlen und $d S^*$ erwärmen.

Hiernach können wir auch das in Gleichung (4) ausgesprochene Gesetz über die Divergenzwinkel so modificiren, dass es auch für grosse Werthe derselben Geltung hat. Es sei die leuchtende Fläche $d S_1$ senkrecht zur Axe und α_1 der Divergenzwinkel der Randstrahlen zur Oeffnung der ersten Objectivfläche, dann ist die auf diese ganze Fläche von $d S$ gesandte Lichtmenge leicht zu berechnen, sie ist nämlich offenbar gleich der Lichtmenge, welche $d S$ auf eine Kugelkappe werfen würde, welche aus einer mit dem Radius 1 um den Mittelpunkt von $d S_1$ beschriebenen Kugel ausgeschnitten wäre durch einen Kegel, dessen Spitze gleichfalls der Mittelpunkt von $d S_1$ und dessen Oeffnungswinkel $2 \alpha_1$ wäre. Diese Kugelkappe können wir nun durch eine Schaar von Kugeln mit den Oeffnungswinkeln $2 d\alpha$, $4 d\alpha$, $6 d\alpha$ . . . . $2 \alpha_1$ in unendlich schmale Zonen zerlegen. Der Inhalt einer solchen Zone zwischen den Kegeln von der Oeffnung 2α und $2 (\alpha + d\alpha)$ ist $= 2 \pi \sin \alpha \, d\alpha$. Die auf ihn senkrecht treffenden Strahlen gehen von $d S_1$ unter dem Winkel α aus. Nach dem

oben angezogenen Grundsatz der Photometrie erhält also diese Zone die Lichtmenge $2\pi J_1 \cos\alpha . \sin\alpha\, d\alpha$ und die ganze auf die gedachte Kugelkappe mithin auch auf die Objectivöffnung treffende Lichtmenge ist gleich

$$L = 2\pi J_1\, dS_1 \int_0^{\alpha_1} \cos\alpha\, \sin\alpha\, d\alpha = \pi J_1\, dS_1 \sin^2\alpha_1.$$

Ebenso muss, wenn wir die auf das letzte Bild bezüglichen Grössen mit * bezeichnen, dieselbe Lichtmenge $L = \pi J^* dS^* \sin^2\alpha^*$ sein. Nun ist aber andererseits der Satz von der im Verhältniss zur optischen Dichtigkeit des Mediums constanten Dichtigkeit der Strahlenbündel jetzt auch für solche von grosser Oeffnung bewiesen, es ist also

$$\frac{J_1}{n_1} = \frac{J^*}{n^*} \quad \text{oder} \quad J^* = \frac{J_1 n^*}{n_1}$$

und mithin

$$\pi J_1\, dS_1 \sin^2\alpha_1 = \pi J_1 \frac{n^{*2}}{n_1^2}\, dS^* \sin^2\alpha^*,$$

woraus mit Beachtung von $\frac{dS_1}{dS^*} = \frac{\beta_1^2}{\beta^{*2}}$ folgt

$$n_1 \beta_1 \sin\alpha_1 = n^* \beta^* \sin\alpha^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Bei Zulassung von Strahlenbündeln mit endlich grossem Oeffnungswinkel immer aber unter Voraussetzung vollkommen scharfer Bilder, deren Linearausdehnung durch β bezeichnet wird, lautet also der Satz vom Divergenzwinkel dahin, dass das Product aus seinem Sinus, der Grösse des Bildes, dem es angehört, und dem Brechungsindex des Mediums, in dem es sich bewegt, durch das ganze System constant bleibt.

Bezüglich der Helligkeit der Bilder lässt sich aus den vorstehenden Entwickelungen Folgendes ableiten. Wenn die aus dem Instrumente austretenden Strahlenbündel die ganze Pupille ausfüllen, so sieht man das Bild in gleicher Helligkeit wie das Object mit freiem Auge, denn in welchem Medium sich dies auch befindet, immer würden in das Auge auch bei freier Beobachtung in Luft fortgepflanzte Strahlenbündel eintreten, und die Dichtigkeit wäre nach dem Satze $\frac{J_p}{n_p} = \frac{J_q}{n_q}$ dieselbe. Füllen aber die austretenden Strahlenbündel, wie dies bei hohen Vergrösserungen immer der Fall ist, die Pupille nicht aus, so ist die Helligkeit H der Netzhautbilder kleiner als seine Helligkeit H_0 bei Betrachtung mit freiem Auge, wo die Pupille mit Strahlenbündeln von gleicher Dichtigkeit stets ganz gefüllt ist. Ist nämlich s die Sehweite, in welcher das mikroskopische Bild liegt und in welcher wir auch das Object mit freiem Auge betrachtet denken wollen, und ist p der Halbmesser der Pupille, dann fällt bei Betrachtung mit freiem Auge von jedem Objectpunkte ein Strahlenbündel ins Auge, welches die ganze Pupillenfläche πp^2 ausfüllt, der also eine Erleuchtung H_0 im Auge hervorbringt $= \frac{\pi p^2}{s^2} \cdot J$, wenn mit J die Dichtigkeit der Strahlenbündel auf die Entfernung 1 bezogen bedeutet. Die aus dem Mikroskope austretenden Strahlenkegel haben aber am Auge einen Kreis zur Basis, dessen Halbmesser $= s \sin\alpha^*$ ist, wenn wir wie bisher immer unter α^* den Divergenzwinkel der Randstrahlen des letzten Bildes verstehen. Dieser Strahlenkegel bringt also im Auge eine Erleuchtung H hervor $= \frac{s^2 \sin^2\alpha^*}{s^2} J$, da seine Dichtigkeit J dieselbe ist wie bei Betrachtung mit freiem Auge. Man hat also:

$$H : Ho = s^2 \sin^2 \alpha^* : p^2$$

und mit Beachtung von Gleichung (5)

$$H = Ho \frac{s^2}{p^2} \cdot \frac{n_1^2}{n^{*2}} \cdot \frac{\beta_1^2}{\beta^{*2}} \cdot \sin^2 \alpha_1.$$

Das letzte Medium vor dem Auge ist nothwendig Luft, also $n^* = 1$. Das erste Medium, aus welchem die Strahlenbündel zum Objectiv treten, ist allerdings bei Immersionsobjecten von Luft und folglich n_1 von 1 verschieden. Wir können aber doch den ersten Divergenzwinkel auch in Luft gemessen denken. Nennen wir ihn alsdann α_0, so ist $\sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1$. Setzen wir ferner die lineare Vergrösserung $\frac{\beta^*}{\beta_1} = N$, so haben wir

$$H = H_0 \frac{s^2 \sin^2 \alpha_0}{p^2 . N^2} \dots \dots \dots \dots \dots (6)$$

Es giebt nun offenbar eine Vergrösserung N_0, bei welcher gerade noch eben die Strahlenbündel die Pupille ausfüllen und bei welcher mithin $H = H_0$ ist, also $N_0 = \frac{s}{p} \sin \alpha_0$.

Für ein constantes α_0 ergiebt sich ferner $H : H_0 = N_0^2 : N^2$. Diese Gleichung gilt aber nur für $N > N_0$, denn für $N < N_0$ kann H nicht grösser als H_0 werden, da ja die Pupille, auch wenn die austretenden Strahlenkegel am Auge eine grössere Fläche deckten, doch nicht mehr davon aufnehmen kann als ihrer Weite entspricht. H wird also höchstens $= H_0$ für $N \gtreqless N_0$.

Aus der Gleichung (6) sieht man, dass die Helligkeit des Bildes wächst mit dem Sinus des Divergenzwinkels α_0. Sein Grenzwerth ist 1 für $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$. In den neueren Instrumenten ist dieser Grenzwerth (mit $\alpha_0 = 87$) nahezu erreicht. Es ist für solche Instrumente daher $N_0 = \frac{s}{p}$ und es ergeben sich unter den sonst gebräuchlichen Voraussetzungen für solche Instrumente die schon oben (S. 282) angeführten Folgerungen.

Die mathematische Entwickelung hat ergeben, dass die Helligkeit mit freiem Auge nur dann erreicht werden kann, wenn jedes von einem Objectpunkte ausgegangene Strahlenbündel nach seinem Austritte aus dem Ocular die ganze Pupille ausfüllt, und dies findet unter den gewöhnlich gemachten Voraussetzungen gerade noch statt bei der oben als „Normalvergrösserung“ mit N_0 bezeichneten Vergrösserung. Bei weiterer Steigerung der Vergrösserung werden die Strahlenbündel dünner als die Pupille und im gleichen Verhältnisse nimmt dann eben die scheinbare Helligkeit ab.

Der Querschnitt der aus dem Ocular in die Pupille eintretenden Strahlenbündel lässt sich beim Mikroskope leicht durch directe Beobachtung ermitteln. Man stelle das Instrument auf eine helle Fläche ein und entferne das Auge in der Axenrichtung vom Ocular. Man sieht dann über demselben ein sehr helles kreisrundes Fleckchen auf tief dunklem Grunde schweben. Dies ist das reelle Bild, welches das Ocular vom Objectiv resp. von dessen relativ engster Blendung entwirft und folglich ist seine Fläche der Querschnitt aller Strahlenkegel, welche von den Punkten des Objectes ausgegangen sind. Um alles dies Licht aufzufangen und somit ein möglichst grosses und möglichst helles Gesichts-

feld zu haben, muss die Pupille an den Ort dieses Bildchens gebracht werden. Das Verhältniss zwischen der Fläche dieses hellen Bildchens und der Fläche der Pupille ergiebt also unmittelbar das Verhältniss, in welchem die Helligkeit des Bildes kleiner ist als die des direct gesehenen Objectes. Nur wenn jenes Bildchen gleich oder grösser ist als die Pupille, hat man volle Helligkeit.

Die nach vorstehenden Betrachtungen von der Steigerung der Vergrösserung unzertrennliche Verengerung der in die Pupille eintretenden Strahlenbündel und die dadurch bedingte Verdunkelung des Bildes scheint auf den ersten Blick einer Steigerung der Vergrösserung ins vorerst Unabsehbare kein Hinderniss in den Weg zu legen, da wir ja die Beleuchtung des Objectes selbst immer weiter steigern können, nöthigesfalls bis zur Anwendung directes Sonnenlichtes. Es treten aber noch zwei andere Umstände hinzu, welche einer solchen Steigerung Grenzen setzen und Helmholtz hat durch ihre Zergliederung gezeigt, dass bei den neueren Mikroskopen die äusserste Grenze der Vergrösserung schon sehr nahezu erreicht ist.

Je dünner die in die Pupille eintretenden Strahlenkegel sind, desto störender mischen sich natürlich die Schatten entoptischer Objecte ein. Dieser Uebelstand ist für die höchsten Vergrösserungen unserer gegenwärtigen Instrumente bei sehr intensiver Beleuchtung schon sehr bemerkbar. Ein ganz absolutes Hinderniss für Entstehung vollkommen deutlicher Bilder über eine gewisse Grenze der Vergrösserung hinaus bilden aber die Beugungserscheinungen, welche um so merklicher auftreten, je dünner die ausfahrenden Strahlenbündel sind.

Die Grösse der entstehenden Beugungsfransen kann man folgendermaassen berechnen. Wir betrachten die Oscillationen der Aethertheilchen in der Ebene dicht über dem Ocular, wo das vorhin erwähnte reelle Bildchen der relativ engsten Blendung schwebt. Hier ist jeder von einem Punkte des Objectes herkommende Strahlenkegel kreisförmig scharf begrenzt. Andererseits ist nach einem bekannten Satze der Dioptrik die „optische“ Länge aller Strahlen eines Bündels zwischen conjugirten Vereinigungsweiten gleich, und da die Punkte des gedachten Kreises von einem Punkte des letzten (virtuellen) Bildes gleich weit abstehen, so werden alle Strahlen, die von einem Punkte des Objectes ausgegangen sind, in der gedachten Ebene dicht über dem Ocular in gleicher Schwingungsphase eintreffen. Im Auge des Beobachters werden also um jeden Punkt des Objectes herum Beugungsfransen genau so entstehen, als ob er das mikroskopische Bild, in der conventionellen Sehweite gelegen, durch ein dicht vor das Auge gehaltenes kreisförmiges Loch von der Grösse des mehr erwähnten kreisförmigen Bildchens der engsten Blendung betrachtete.

Die in jedem Lehrbuch der Physik entwickelte Theorie der Beugung des Lichtes lehrt, dass bei Betrachtung eines Lichtpunktes durch ein dicht vor das Auge gesetztes enges kreisförmiges Loch der Gesichts-

winkel, unter welchem der Abstand zwischen zwei auf einander folgenden Maximis der Helligkeit in der Beugungsfigur erscheint $= \frac{\lambda}{2\varrho}$ ist, wenn man unter λ die Wellenlänge der wirkenden Strahlen und unter 2ϱ den Durchmesser des kreisrunden Loches versteht. Der Abstand zwischen dem ersten Maximum und dem Mittelpunkte der ganzen Erscheinung ist noch ein klein wenig grösser.

Denkt man sich also die Beugungsfransen in der conventionellen Sehweite s, auf welche die Vergrösserungszahlen bezogen werden, so wäre ihre Breite $= s\frac{\lambda}{2\varrho}$ zu setzen, $\frac{\varrho}{s}$ ist aber der Sinus des Winkels α^*, unter welchem die äussersten Randstrahlen des mittelsten Bildpunktes von der Axe divergiren. Also ist die Fransenbreite von Maximum zu Maximum in der Sehweite s gedacht $= \frac{\lambda}{2 \sin \alpha^*}$. Die oben in kleinem Drucke gegebenen mathematischen Entwickelungen stellen aber eine Beziehung zwischen einem Abstande β_1 im Objecte und dem entsprechenden Abstande β^* im letzten Bilde fest, in welche ausserdem die Brechungsindices n_1 und n^* des ersten und letzten Mediums, sowie die Divergenzwinkel der äussersten Randstrahlen gegen den Mittelstrahl der Bündel im ersten und letzten Medium α_1 und α^* eingehen. Diese Beziehung spricht sich aus in der Gleichung:

$$n_1 \beta_2 \sin \alpha_1 = n^* \beta^* \sin \alpha^*$$

(siehe (5) S. 286). Setzt man in diese Gleichung für β^* den gefundenen Werth der Breite einer Beugungsfranse, so hat man

$$n_1 \beta_1 \sin \alpha_1 = n^* \frac{\lambda}{2 \sin \alpha^*} \cdot \sin \alpha^*$$

oder

$$\beta_1 = \frac{n^*}{n_1} \frac{\lambda}{2 . \sin \alpha_1}.$$

Diese Grösse β_1 ist nun offenbar der Abstand zweier Punkte des Objectes, welche im Bilde in gleichem Abstande wie zwei Beugungsfransen erscheinen und deren Unterscheidung also durch die Beugung schon unmöglich gemacht wird. Diese Grösse bezeichnet folglich eine äusserste Grenze der Kleinheit mikroskopisch erkennbarer Objecte. Es ist leicht, die Grenze, unter welche der Werth von β_1 nicht sinken kann, numerisch zu bestimmen. Wir können nämlich n^* und n_1 beide $= 1$ setzen, da das letzte Bild immer in Luft liegt und da der Divergenzwinkel der vom Object selbst ausgehenden Bündel, auch wenn dasselbe in Wasser liegt, doch in Luft gemessen wird. Dieser Divergenzwinkel kann aber höchstens einem Rechten nahe kommen, also $\sin \alpha_1$ höchstens $= 1$ werden. Für diesen äussersten Grenzwerth wird also $\beta_1 = \frac{\lambda}{2}$, d. h. gleich der halben Wellenlänge des wirksamen Lichtes.

Für weisse Beleuchtung können wir die Wellenlänge der hellsten Strahlen des Spectrums als maassgebend betrachten, sie ist $= 0{,}00055$ mm also:

$$\beta_1 = \frac{\lambda}{2} = 0{,}000275\,\text{mm} = \frac{1}{3636}\,\text{mm}.$$

Diese Grenze ist nun bei den besten neueren Instrumenten in der That schon fast erreicht. Es haben nämlich Harting und Dippel noch helle Gitterstäbe unterschieden, deren Mitten um $\frac{1}{3313}$, resp. um $\frac{1}{3600}$ mm von einander abstanden. Man sieht also, dass von Vervollkommnung des optischen Apparates unserer Mikroskope nicht mehr viel zu erwarten ist. Höchstens könnte die Anwendung von blauem Lichte die Grenze der Unterscheidbarkeit feiner Objecte noch ein wenig hinausrücken. Der Linie G im Spectrum entspricht z. B. die Wellenlänge 0,0004282, welche für β_1 den Werth $\frac{1}{4654}$ mm ergiebt. Sehr günstig stellt sich natürlich die Sache bei der Photographie, wo hauptsächlich Strahlen von kurzen Wellen zur Wirkung kommen. So sind in der That auf Photographien, die bei 1000facher Vergrösserung von Stinde aufgenommen sind, Linien sichtbar, von denen 3800 bis 4000 auf 1 mm gehen.

Die obige Entwickelung lässt auch leicht sehen, unter welchen Bedingungen überhaupt die Beugungserscheinungen zuerst sichtbar werden. Dies hängt einfach davon ab, welchen Durchmesser das Bildchen der engsten Blendung über dem Ocular hat. In der That sahen wir, dass die Breite einer Beugungsfranse unter dem Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{2\varrho}$ erscheint, wo 2ϱ eben den Durchmesser jenes Bildchens bedeutet. Der kleinste Gesichtswinkel, unter welchem ein Object erscheinen muss, wenn es erkennbar sein soll, ist aber etwa eine Minute. Die Beugungsfransen werden also sichtbar, wenn $\frac{\lambda}{2\varrho} = 1$ Bogenminute oder $= 0{,}00029$ ist. Setzen wir für λ die Wellenlänge der hellsten Strahlen 0,00055, so erhalten wir $2\varrho = 1{,}89$ mm, d. h. wenn das Ocularbild der engsten Blendung 1,89 mm Durchmesser hat, fangen die Beugungsfransen an sichtbar zu werden.

Die bisherigen Erörterungen über das Mikroskop geben einen kurzen Abriss der eigentlichen Theorie dieses Instruments, d. h. sie lassen sehen, wie von einem ebenen Objecte ein ebenes, scharfes, vergrössertes, optisches Bild zu Stande gebracht und in welcher Helligkeit dasselbe gesehen wird. Im Folgenden sollen nun noch einige Nebenumstände besprochen werden, die für die Praxis ebenfalls von grosser Wichtigkeit sind.

In weitaus den meisten Fällen pflegt man bekanntlich die mikroskopisch zu betrachtenden Objecte in eine Flüssigkeitsschicht einzuschliessen und ein dünnes Glasplättchen darüber zu decken. Hierdurch wird der Gang der Strahlen nicht unbedeutend modificirt. Ein von irgend einem leuchtenden Punkte des Objects (wir wollen den in der Axe des Mikroskopes liegenden ins Auge fassen) ausgehendes homocentrisches Strahlenbündel fällt nämlich jetzt nicht streng genommen als homocentrisches auf das Objectiv. Die sehr schräg aus der Oberfläche des Deckgläschens austretenden Strahlen werden nämlich so verlaufen, wie wenn sie von einem höher oben gelegenen Punkte der Axe kämen, als diejenigen, welche mehr senkrecht austreten. Diese übrigens verlaufen selbst immer noch so, als kämen sie von einem höher gelegenen Punkte, als der wirkliche Objectpunkt. Jedesfalls wird also der Objectpunkt durch das Deckgläschen gleichsam scheinbar gehoben, so dass das Mikroskop weiter von ihm entfernt werden muss, als wenn es in Luft läge. Dies ist die einzige merkliche Wirkung des Deckgläschens, sobald überall nur sehr enge Strahlenkegel das Objectiv treffen, d. h. wenn die Entfernung des Objectes vom Objectiv gross ist gegen den Durchmesser des letzteren. Da aber in vielen Fällen, namentlich bei hohen Vergrösserungen, die Objectdistanz durchaus nicht gross gegen den Durchmesser des Objectivs ist, da im Gegentheil oft Oeffnungswinkel von 120⁰ bis 160⁰ vorkommen, so macht sich der Unterschied zwischen den scheinbaren Ausgangspunkten der Randstrahlen und der mittleren Strahlen sehr bemerklich. Es gilt daher — wofern die Punkte des virtuellen Bildes den Punkten des wirklichen Objectes entsprechen sollen — Strahlencomplexe schliesslich zur Vereinigung zu bringen, welche nicht homocentrische Bündel darstellen, in denen vielmehr die (scheinbaren) Ausgangspunkte der Randstrahlen näher liegen als die der mittleren Strahlen. Um solche Strahlencomplexe zur Vereinigung zu bringen, darf, wie man leicht sieht, die sphärische Abweichung des Objectivs nicht vollständig corrigirt sein, denn sonst würden die hier verhältnissmässig stärker divergirend einfallenden Randstrahlen später vereinigt werden als die mittleren. Ist dagegen dem Objectiv ein gewisses Maass von sphärischer Abweichung geblieben und bricht es daher, ähnlich einer einfachen Linse, Randstrahlen verhältnissmässig stärker als mittlere, so kann es sich offenbar treffen, dass die Randstrahlen und mittleren Strahlen des nicht homocentrischen Strahlencomplexes im selben Punkte vereinigt werden. Wir haben nun oben gesehen, dass auf den Grad des Aplanatismus des Objectivsystems die Abstände seiner Linsen von einander von Einfluss sind. Es ist daher klar, dass ein Objectivsystem, was bei einer gewissen Stellung seiner Linsen vollkommen aplanatisch, d. h. frei von sphärischer Aberration ist, bei einer anderen gegenseitigen Stellung derselben mit einem gewissen Grade sphärischer Abweichung behaftet sein kann. Bei der ersteren Einrichtung würde es daher ein Object in Luft deutlich zeigen, bei der zweiten würde es für ein bestimmtes Deckgläschen vortheilhafter sein. Die in

Rede stehende Differenz der scheinbaren Ausgangspunkte verschiedener Strahlenzonen desselben Bündels hängt, wie man leicht sieht, mit ab von der Dicke des Deckgläschens, und verschiedene Deckgläser fordern daher verschiedene Grade sphärischer Abweichung des Objectivs, oder wenn diese Grade durch veränderte Stellung der Objectivlinsen hervorgebracht werden sollen, verschiedene gegenseitige Stellungen dieser Linsen. Bei vielen neueren Mikroskopen ist aus diesem Grunde dafür gesorgt, dass man die gegenseitige Stellung der Objectivlinsen verändern kann, und es ist angegeben, welche Stellung für diese oder jene Dicke des Deckgläschens erforderlich ist.

Fig. 83.



Die vorstehenden Bemerkungen machen auch den Vorzug der heutzutage bei hohen Vergrösserungen gebräuchliche Immersion des Objectivs verständlich. Man sieht nämlich, wenn das Medium, in welchem das Object liegt, bis an die erste Fläche des Objectivs reicht, so fällt auf dieselbe von jedem Punkte des Objects ein wirklich homocentrisches Bündel. Die Immersion giebt aber noch einen Vortheil für die Helligkeit. Es kann nämlich der auf Luft bezogene Divergenzwinkel der äussersten Randstrahlen vom Axenstrahl beim Immersionssysteme einem Rechten näher gebracht werden, als wenn die Strahlen wirklich aus Luft in die erste Objectivfläche eintreten.

Wenn man die Pupille des beobachtenden Auges punktförmig annimmt, so kann das ganze Gesichtsfeld nur von e i n e m Punkte aus gleichzeitig übersehen werden; von allen anderen Punkten aus würde das Auge nur e i n e n sehr kleinen Theil des Objectes sehen. Da indessen die Pupille in Wirklichkeit noch immer einen endlich grossen Durchmesser besitzt, so ist um den gedachten Punkt herum ein kleiner Spielraum, innerhalb dessen sich das Auge bewegen kann, ohne einen Theil des Gesichtsfeldes zu verlieren. Der gedachte Punkt ist derjenige, in welchem sich die von den Objectpunkten kommenden Richtungsstrahlen nach ihrem Austritt aus dem Ocular kreuzen.

Sie müssen sich aber wirklich und zwar in e i n e m Punkte kreuzen, da sie von einem Punkte ausgehen, der jedesfalls weiter vom Ocular absteht als sein Hauptbrennpunkt. Ihr Ausgangspunkt wäre der zweite Knotenpunkt des Objectivs, wenn keine Collectivlinse vorhanden ist. Wenn aber eine solche vorhanden ist, so weicht der (nunmehr virtuelle) Ausgangspunkt noch weiter vom Ocular. Ein Blick auf die Fig. 83 lässt über unseren Satz keinen Zweifel. Wegen der Kleinheit der Objectivlinsen sind die von den einzelnen Punkten des Objectes zum Auge

kommenden Strahlenbündel sämmtlich sehr dünn, und man kann geradezu die Richtungsstrahlen an ihre Stelle treten lassen und, ohne einen grossen Fehler zu begehen, annehmen, dass überhaupt nur diejenigen Punkte des Objectes Strahlen zum Auge senden, von denen die Richtungsstrahlen die Pupille erreichen. Es seien nun in Fig. 83 ab und cd die Richtungsstrahlen von den Grenzpunkten des Gesichtsfeldes, die gerade noch den Rand der Blendung streifen. Nach ihrer Brechung im Ocular durchkreuzen sie sich in O. Hier muss die Pupille des Beobachters sich befinden, wenn er diese beiden äussersten Richtungsstrahlen und folglich alle in sein Auge haben will. Befände sich seine Pupille bei O' oder bei O_1, so würde er nur den Theil ef des physischen Bildes, also den Theil $e'f'$ des Objectes übersehen; denn die Richtungsstrahlen aller weiter auswärts gelegenen Punkte könnten nicht mehr in seine Pupille eindringen.

Am einfachsten findet sich der Punkt, von welchem aus das ganze Gesichtsfeld des Mikroskopes zu übersehen ist — er mag der „Augenpunkt" heissen — wenn man die vier Cardinalpunkte des ganzen Mikroskopes sowie die Lage der ersten Fläche des Objectivs und der letzten Fläche des Oculars kennt. Der Augenpunkt ist alsdann das Bild vom Mittelpunkte der ersten Fläche des Objectivs. In der That befindet sich eine Pupille, die selbst punktförmig oder unendlich eng gedacht werden darf, am Orte dieses Bildes, so wird von jedem Punkte des Gesichtsfeldes Licht in sie eindringen, da ja jedesfalls derjenige Strahl jedes Objectpunktes in die fragliche Pupille gelangt, welcher den Mittelpunkt der ersten Objectivfläche getroffen hat. Für das oben (S. 277) als Beispiel gegebene System von Cardinalpunkten findet sich das Bild vom Mittelpunkte der ersten Objectivfläche im Abstande von nahezu — 1.3 mm von der zweiten Hauptebene, d. h. das fragliche Bild liegt nahezu 1.3 mm vor der zweiten Hauptebene, oder etwa 5.4 mm hinter der letzten Fläche des Oculars. Dies wäre also die zweckmässigste Lage des beobachtenden Auges. Man überzeugt sich von dem Gesagten leicht durch einen Blick in das erste beste Mikroskop; es braucht nicht einmal ein Gegenstand auf dem Objecttische zu liegen, wenn nur der Beleuchtungsspiegel so gestellt ist, dass er dem Objective reichliches Licht zukommen lässt. Befindet sich das Auge gerade im richtigen Punkte O, so sieht es einen hellen Kreis mit vollkommen schwarzer Umgebung scharf gegen dieselbe abstechend, die Grösse des hellen Kreises ist von der Pupillenöffnung unabhängig. Sein Umfang ist nichts Anderes als das virtuelle Bild des Blendungsrandes. Entfernt man jetzt das Auge vom Ocular, so legt sich, von der Peripherie herkommend, ein schwarzer Schatten über den hellen Kreis und macht denselben immer kleiner, je weiter man sich vom Ocular entfernt, zuletzt sieht man in demselben nur noch ein helles Pünktchen. Man wird leicht gewahren, dass die Grösse des hellen Kreises bei mittlerem Abstande des Auges von der Grösse der Pupille abhängt. Nähert man sich umgekehrt dem Oculare über den Punkt O hinaus, so sollte in ähnlicher Weise das Gesichts-

feld verkleinert werden. Doch ist dies in der Regel nicht der Fall, weil der Punkt O zu nahe am Ocular liegt und die Pupille zu weit ist; man berührt in der Regel eher das Ocular mit dem Scheitel der Hornhaut, als die Beschränkung des Gesichtsfeldes durch die Iris eintritt. Sehr häufig bemerkt man hingegen in diesen Fällen eine Besckränkung des Gesichtsfeldes durch ein Augenlid, dessen Schatten an den in den hellen Kreis hineinragenden Wimpern leicht kenntlich ist. Befindet sich das Auge in der richtigen Stellung O, so kann man die Augenlider bis auf einen ganz engen Spalt zusammenkneifen, ohne dass ihr Schatten in den hellen Kreis des Gesichtsfeldes hineinragt.

Das von einem Mikroskope dargebotene schliessliche virtuelle Bild ist ein Complex von leuchtenden Punkten, welche sämmtlich in einer Ebene liegen. Es kommt nur zu Stande, wenn in der gehörigen Entfernung vom Objectiv — auf welche eben das Instrument „eingestellt" ist — ebenfalls ein in einer Ebene begriffener Complex von leuchtenden Punkten liegt. Leuchten diese Punkte mit verschiedenfarbigem oder mit verschieden starkem Lichte, so thun es die entsprechenden Punkte des Bildes auch, und es ist eben deswegen möglich, durch das Mikroskop Aufschluss über gewisse Eigenschaften eines Gegenstandes zu erhalten. Die Gegenstände, welche man unter dem Mikroskope betrachtet, sind nun meist der Art, dass ihre Oberfläche nicht vollkommen eben ist, und dass deren Punkte, von gewöhnlichem Tageslichte beleuchtet, keineswegs viel Licht aussenden. Bei hohen Vergrösserungen wenigstens würden sie also nicht wohl brauchbare Bilder im Mikroskope geben. Man muss daher für eine besondere Beleuchtung Sorge tragen. Beleuchtet man einen Gegenstand von oben oder schräg von unten derart, dass keine Strahlen von der benutzten Lichtquelle direct ins Objectiv fallen, so bedarf die Sache keiner weiteren optischen Discussion; denn es kommt nur von jedem Punkte der Oberfläche des Gegenstandes ein Bündel diffuses Lichtes in das Instrument. Die Oberfläche des Gegenstandes ist gewissermaassen stärker selbstleuchtend gemacht als in freier Tagesbeleuchtung; es versteht sich von selbst, dass alsdann das Mikroskop ein Bild liefert, das um so brauchbarer ist, je kleiner im Vergleich mit der Objectdistanz die Abweichungen der fraglichen Oberfläche von der Ebene sind. In den meisten Fällen wird aber bei „durchfallendem Lichte" beobachtet, d. h. man bringt eine reichliche Lichtquelle unter dem Objecte an, so dass ihre Strahlen durch das Object direct auf das Objectiv fallen. Das von der Oberfläche des Gegenstandes diffus zurückgeworfene Licht verschwindet in diesem Falle ganz gegen das direct von der Lichtquelle ausgehende, und die eigentlich zu sehenden Einzelheiten erscheinen als Schatten auf einem hellen Hintergrunde. Das Zustndekommen dieser Schatten erfordet, namentlich da sie in der Regel von fast vollständig durchsichtigen Körpern herrühren, eine optische Begründung.

Als Lichtquelle dient ein in die Strahlung des hellen Himmels eingetauchter Spiegel. Sehen wir ab von der ungleich starken Zurückwerfung

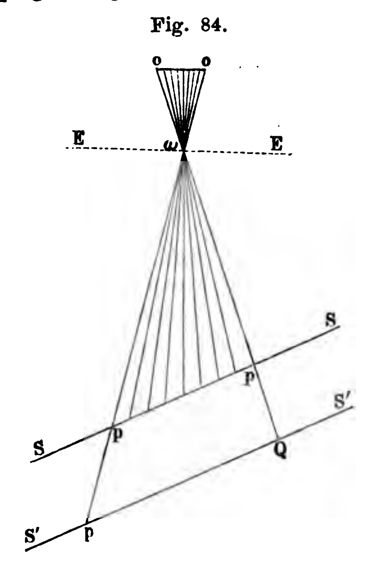
des Lichtes in verschiedenen Richtungen — das wird erlaubt sein, da in unserem Falle doch schliesslich nur unter annähernd gleichen Winkeln zurückgeworfene Strahlen in Betracht kommen —, nehmen wir ferner die Strahlung von allen Punkten des Himmels als merklich gleich stark an, so wird ein in diese eingetauchter Spiegel genau so wirken, wie eine in allen Punkten gleichmässig leuchtende Fläche, deren Helligkeit zu der des Himmels in dem durch die Zurückwerfung bedingten Schwächungsverhältnisse steht. Mag übrigens der Spiegel eben, hohl oder erhaben sein, die Helligkeit, in welcher er erscheint, ist genau dieselbe. Nicht so würde es sein, wenn nur parallele oder sonst von einem Punkte oder von einer wenig ausgedehnten Lichtquelle kommende Strahlen den Spiegel träfen. In der That, in unserem erstgedachten Falle empfängt ja jedes Element der spiegelnden Fläche aus allen Richtungen Lichtstrahlen und sendet also auch solche nach allen Richtungen aus, da das unendlich kleine Element als eben gedacht werden darf. Das Element der spiegelnden Fläche ist demnach genau so wirksam, wie ein selbstleuchtender Punkt, dessen Leuchtkraft überdies von seiner Neigung gegen irgend eine im Raume feste Gerade (z. B. die Axe des Instruments) unabhängig[1]) ist. Der ganze Spiegel muss also auch in derselben Helligkeit erscheinen; mögen seine einzelnen Elemente dieselbe Neigung gegen die Axe des Instruments haben oder mag diese Neigung von Element zu Element sich stetig ändern, d. h. mag er eben oder gekrümmt sein. Der Vorzug eines ebenen, hohlen oder erhabenen Spiegels kann also, wenn man in diffuser Tagesbeleuchtung beobachtet, nach dieser Betrachtung jedesfalls nicht in einer grösseren Lichtstärke, die der eine oder der andere liefert, gesucht werden. Mir ist es überhaupt sehr zweifelhaft, ob die Form des Spiegels nicht absolut gleichgültig ist. Es ist mir dies um so wahrscheinlicher, da von den berühmtesten Mikroskopikern die einen dem ebenen, die anderen dem Hohlspiegel den Vorzug geben, die Wahl also vielleicht auf Liebhaberei hinausläuft. Wenn man freilich eine punktförmige oder überhaupt nur relativ kleine Lichtquelle, z. B. eine einigermaassen entfernte Lampenflamme anwenden wollte, so hätte jedesfalls ein Hohlspiegel den Vorzug in Beziehung auf Stärke der Beleuchtung, und zwar müsste er so gestellt sein, dass die Lichtquelle und das zu beleuchtende Object in conjungirten Vereinigungsweiten davon abständen.

Ein in die Strahlung des hellen Himmels eingetauchter Spiegel erleuchtet ferner ein mikroskopisches Gesichtsfeld gleich gut, mag er demselben näher oder ferner stehen, wofern seine Oberfläche nur eine gewisse

[1]) Wenn diese Neigung sich ändert, so wird das Flächenelement nach gewissen Richtungen hin vielleicht gar keine Strahlen mehr aussenden, aber innerhalb des überhaupt zu Stande kommenden Strahlenkegels bleibt die Helligkeit dieselbe. Nach allen in der ganzen über der spiegelnden Seite befindlichen Hälfte des Raumes möglichen Richtungen strahlt natürlich das Element nur dann aus, wenn es horizontal unter der Himmelshalbkugel liegt.

Grenze der Kleinheit nicht überschreitet. Um dies einzusehen, werfen wir einen Blick auf Fig. 84. Sei $O\,O$ die erste Fläche des Objectivs, und sei das Mikroskop eingestellt auf eine Ebene $E E_1$. Sei $S S$ die Spiegelfläche (wir denken sie uns unbeschadet der Allgemeinheit eben, da bereits der Unterschied zwischen ebenem und gekrümmtem Spiegel gefallen ist). Von jedem ihrer Punkte geht, wie von einem selbstleuchtenden, ein divergentes Strahlenbündel aus. Zur Beleuchtung des unendlich kleinen Flächenelementes ω in der Objectebene tragen nun von denjenigen Bündeln unendlich schmale Theile wirksam bei, welche von den Punkten zwischen p und q ausgehen, und zwar unendlich kleine Theile, die in Kegeln mit der unendlich kleinen Basis ω liegen. Einige dieser Kegel sind in der Figur (als Linien) bezeichnet. Alle anderen vom Spiegel ausgehenden Strahlen, welche nicht in den bezeichneten unendlich schmalen Kegeln begriffen sind, treffen entweder das Objectiv gar nicht oder kreuzen sich nicht innerhalb des Flächenelements ω, tragen also zu seinem Bilde im Mikroskope nicht bei. Rückt man jetzt den Spiegel ferner, etwa nach $S' S'$, so werden allerdings die auf ω fallenden Elementarlichtkegel dünner, und zwar im quadratischen Verhältnisse der Entfernung. Dagegen kommen in demselben Verhältnisse ihrer mehr zur Wirksamkeit, denn es senden jetzt alle zwischen P und Q begriffenenen Punkte der Spiegelfläche Elementarkegel durch ω nach OO. Sobald natürlich die Winkelöffnung des Objectivs, d. h. der Winkel $O\,\omega\,O = p\,\omega\,q$ so gross ist, dass der Spiegel dieselbe bei einem gewissen Abstande nicht mehr ganz ausfüllt (wäre z. B. der Spiegel kleiner als pq), so würde eine weitere Entfernung die Beleuchtung bei ω im quadratischen Verhältnisse schwächen. Ebenso wurde bereits gelegentlich darauf hingedeutet, dass die Entfernung des Spiegels sofort aufhört gleichgültig zu sein, sowie man nicht mehr eine relativ unbegrenzte ursprüngliche Lichtquelle — wie den hellen Himmel — hat[1]).

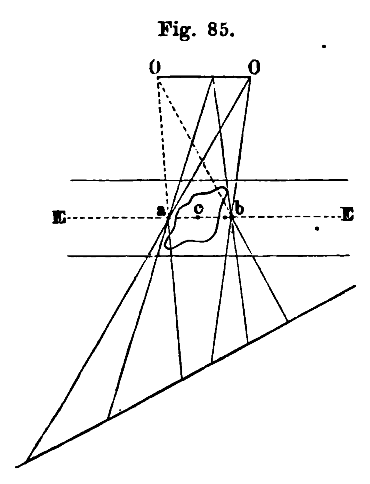
Fig. 84.



[1]) Die in der ersten Auflage gleichlautend enthaltenen Entwickelungen dieses Paragraphen habe ich, obgleich sie den Angaben mancher erfahrener Mikroskopiker widersprechen, um so weniger zu ändern Veranlassung gehabt, als ich jetzt die Autorität eines der anerkanntesten praktischen Mikroskopikers dafür anführen kann. (Siehe das mehrfach citirte Werk von Nägeli und Schwendener.)

Das vom Spiegel herkommende Strahlensystem hat nach diesen Auseinandersetzungen offenbar folgende Eigenschaft: Wenn man eine Ebene senkrecht zur Axe des Mikroskops irgendwo zwischen das Objectiv und den Spiegel legt, so kann man durch jeden Punkt derselben ein Strahlenbündel legen, das auf dem ganzen Spiegel als Basis steht, und das System dieser Bündel wird alsdann die wirklich vorhandenen Strahlen alle und nur diese enthalten [1]). Geben wir unserer Ebene eine solche Lage, dass gerade das Mikroskop darauf eingestellt ist, so ist der im Gesichtsfelde liegende Theil derselben ein Object, im optischen Sinne, und zwar ein gleichmässig leuchtender Kreis, dessen Bild ein eben solcher sein muss, wie man sich auch leicht durch den Augenschein überzeugt. Wir bringen jetzt an diese Stelle allerlei kleine durchsichtige und undurchsichtige Gegenstände, ausgebreitet in einer sehr dünnen ebenen Schicht, deren obere Grenzebene über, deren untere Grenzebene eben so viel unter unserer Einstellungsebene gedacht werden mag. Ganz undurchsichtige Gegenstände in dieser ebenen Schicht werden, ihrem Umfange und ihrer Form entsprechend, einigen unserer Lichtbündel den Durchgang nach dem Objectiv verwehren. Sie bringen folgeweise in dem Bilde des hellen Kreises einen stellenweisen Lichtausfall hervor — ein Schattenbild, dem grössten Horizontalschnitt des Gegenstandes ähnlich und im Verhältniss der Vergrösserung grösser als jener. Ganz vollkommen scharf begrenzt erscheint das Schattenbild des undurchsichtigen Gegenstandes jedoch nur dann, wenn sein grösster Horizontalschnitt genau mit der Einstellungsebene zusammenfällt. In jedem anderen Falle ist am Saume des Schattens ein Halbschatten. Ein Blick auf die Fig. 85 lässt dies sehen. Die Strahlenbündel z. B., die in *a* und *b* ihr Centrum haben, werden nur zum Theil vom Objectiv *O O* abgehalten, daher an den *a* und *b* entsprechenden Stellen im Bilde Halbschatten statthaben wird; die zwischenliegenden Bündel (z. B. das bei *c*) werden ganz abgefangen, daher ist an den entsprechenden Stellen des Bildes Kernschatten.

Fig. 85.

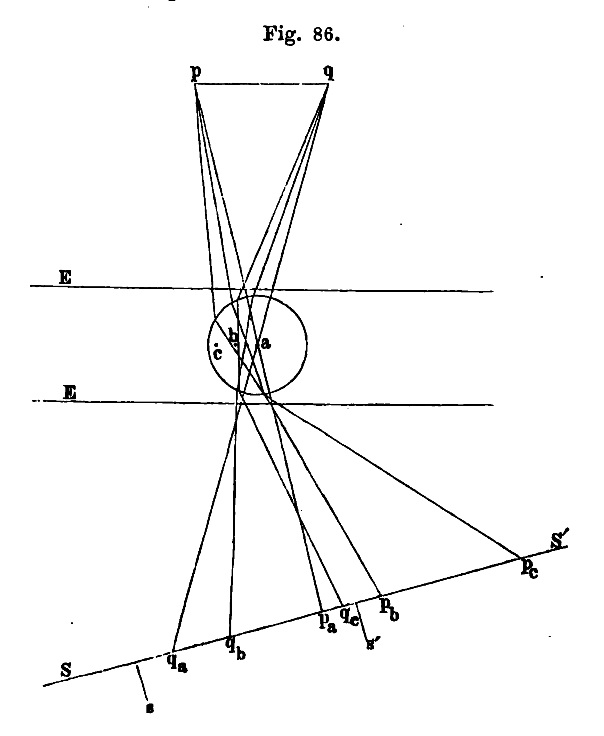


[1]) Streng genommen würde dieser Satz nur dann gelten, wenn die ganze über der Ebene des Spiegels gelegene Halbkugel des Himmels Licht zu ihm könnte gelangen lassen. Diese Bedingung ist zwar in Wirklichkeit nie erfüllt, dafür haben wir aber auch in wirklichen Fällen immer nur ein sehr kleines Stück der gedachten Ebene um die Axe herum in Betracht zu ziehen; für deren Punkte bei geeigneter Stellung des Spiegels unser Satz unzweifelhaft gültig ist.

Fiele dagegen der grösste Horizontalschnitt genau mit der Einstellungsebene *EE* zusammen, so würden alle Strahlenbündel entweder ganz oder gar nicht abgefangen, daher im Bilde überall Kernschatten oder Kernlicht erscheinen, d. h. ein scharf begrenztes Kernschattenbild.

Die in unserer ebenen Schicht begriffenen durchsichtigen Körper werden die vom Spiegel kommenden convergirenden Strahlenbündel nach Maassgabe ihrer Gestalt und Brechkraft ablenken und gewissermaassen als optische Werkzeuge wirken. Die Erörterung dieser Wirkung gehört natürlich zu jeder einzelnen mikroskopischen Beobachtung, es mag jedoch hier noch die Erörterung zweier einfacher Fälle Platz finden.

Fig. 86.



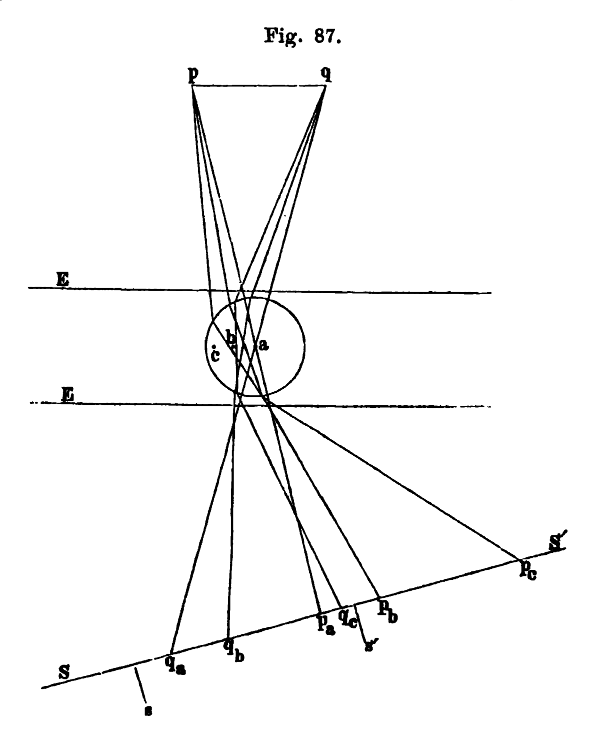
Wir wollen uns zuerst die ebene Schicht erfüllt denken mit einem homogenen durchsichtigen Stoffe, an einer Stelle im Bereiche des Gesichtsfeldes liege jedoch eine Kugel, deren Stoff, ebenfalls durchsichtig, das Licht stärker bricht als die Umgebung. Ihr Mittelpunkt liege in der Einstellungsebene. Die optische Discussion dieses Falles, sowie ohne Zweifel die meisten anderen Fälle, wird sich am bequemsten machen, wenn man, die Reciprocität des Strahlenganges anwendend, Lichtbündel rückwärts construirt, die vom Objectiv nach den Punkten der Einstellungsebene convergiren, und nun deren Weg nach dem Spiegel hin verfolgt. Sei z. B. in Fig. 86 *pq* die erste Fläche des Objectivs, *EE* die

ebene Schicht der Objecte; die Brechung an ihren Grenzen darf wohl vernachlässigt werden, da sie auf alle in Betracht kommende Strahlenbündel ziemlich gleichartig einwirkt. SS sei der Beleuchtungsspiegel. Bei a sei der Mittelpunkt unserer stärker brechenden Kugel, deren Bild gefunden werden soll. Denken wir uns, von allen Punkten des Objectivs gingen Strahlen nach a (die beiden Randstrahlen sind in der Figur gezeichnet), sie treffen sämmtlich die Oberfläche beim Ein- und Austritt senkrecht und setzen demnach ihre Wege ohne Ablenkung zum Spiegel fort, der von den Randstrahlen in q_a und p_a getroffen wird. Umgekehrt werden also in der Wirklichkeit von allen zwischen p_a und q_a gelegenen Punkten des Spiegels Strahlen zum Objectiv gelangen, die durch a gegangen sind, sie werden also im Mikroskop ein Bild von a erzeugen, dessen Helligkeit genau dieselbe wie im ganzen übrigen Gesichtsfelde ist, denn die Oeffnung des Strahlenkegels $p_a a o_a$ ist dieselbe, wie die eines beliebigen anderen wirksamen Strahlenkegels, der zum Bilde irgend eines ausserhalb der Kugel gelegenen Punktes der Einstellungsebene verwandt wird. Denken wir uns jetzt zweitens einen Kegel mit der Basis pq, dessen Strahlen auf b zielen. Seine beiden Randstrahlen (die in der Figur genau construirt sind) würden durch zweimalige Brechung abgelenkt und schliesslich auf dem Spiegel das Stück $p_b q_b$ abschneiden. Nach dem Gesetze der Reciprocität werden in der Wirklichkeit nur von dem Stücke $p_b q_b$ des Spiegels Strahlen zum Objectiv gelangen, so als wären sie von b ausgegangen. Sie setzen einen zum Bilde von b wirksamen Strahlenkegel zusammen, dessen Oeffnung die des Strahlenkegels $q_a a p_a$ wenig übertrifft. Der Punkt b müsste also (so scheint es) etwas heller als das übrige Gesichtsfeld erscheinen. Einen wirksamen Strahlenkegel mit der Basis $p_c q_c$ von noch etwas grösserer Oeffnung erhält man, wenn man auf dieselbe Weise die vom Objectiv nach c gezogenen Strahlen verfolgt. Bei den hier gemachten Schlüssen liegt übrigens die nur näherungsweise richtige Voraussetzung zu Grunde, dass homocentrische Lichtbündel, auf ein Stück unserer Kugeloberfläche fallend, homocentrisch bleiben. Wenn man ganz genau zu Werke ginge, müssten die wirksamen Strahlenkegel alle genau gleich gross gefunden werden und sich also zeigen: zu den Bildern von a, b und c, sowie von allen anderen im mittleren Horizontalabschnitte der Kugel gelegenen Punkten tragen genau gleich viele Strahlen bei, sie erscheinen also alle gleich hell, vorausgesetzt, dass die leuchtende Spiegelebene unendlich gedehnt ist[1]. Die Behauptung lässt sich sehr leicht durch den Versuch bestätigen. Hält man einen durchsichtigen Körper, z. B. einen cylindrischen Glasstab, vor einen relativ unendlich grossen hellen Hintergrund, so erscheint er ganz gleichmässig hell. Es müssen hierbei begreiflicherweise alle Reflexe und alle Schatten (die etwa der Glasstab auf den

[1] Es ist dies nur ein specieller Fall des Satzes, dass durch ein optisches Werkzeug kein Object heller gesehen werden kann als mit freiem Auge.

hellen Hintergrund werfen könnte) vermieden werden. Sei dem übrigens wie ihm wolle, wir haben es beim Mikroskop nie mit einer unendlich grossen leuchtenden Fläche zu thun. Der Spiegel (resp. die Blendung im Objecttische) hat eine begrenzte Ausdehnung und umspannt in der Regel an einem Punkte des Objects nur einen sehr mässigen Winkel. Er reiche z. B. in der Fig. 87 von s bis s'. Es ist alsdann von den drei gezeichneten Strahlenkegeln nur der wirklich ganz vorhanden, der seine Spitze in a hat und auf der Basis $q_a p_a$ steht. Der Strahlenkegel mit der Basis $q_b p_b$ steht schon nicht mehr ganz auf der Spiegelfläche. Die zu ihm gehörenden Strahlen, welche rechts von s' liegen, sind also in

Fig. 87.



Wirklichkeit gar nicht vorhanden, die Helligkeit des Bildes von b wird demnach kleiner sein, als die des Bildes von a. Der dritte Strahlenkegel, welcher das Bild von c erleuchtet, steht nur noch mit dem ganz kleinen Stückchen $q_c s'$ seiner Basis auf dem Spiegel. Also ist nur ein kleiner Theil der zu ihm gehörenden Strahlen in Wirklichkeit vorhanden. Das Bild von c muss also sehr lichtschwach erscheinen. Construirte man solche Strahlenkegel für Punkte, die noch weiter seitwärts als c liegen, so werden sie bald ganz am wirklichen Spiegel vorübergehen. Die Bilder der betreffenden Punkte würden demnach ganz dunkel sein. Es ergiebt sich hieraus, die Kugel muss bei der gedachten Einstellung zu

einem kreisförmigen Bilde Veranlassung geben, dessen Helligkeit am Rande Null ist, nach dem Mittelpunkte aber allmälig zunimmt, bis sie in diesem selbst die Helligkeit des übrigen Gesichtsfeldes erreicht. — Es könnte scheinen, als liesse sich der ganzen vorstehenden Betrachtung die substituiren, dass das von der Kugel erzeugte Bild des Spiegels als Object anzusehen wäre; doch geht dies nicht an, da eine Kugel kein Bild im strengen Sinne des Wortes liefert, am allerwenigsten in der Ebene des Mittelpunktes, auf die wir doch das Instrument eingestellt dachten.

Es dürfte vielleicht nicht so gar schwer sein, in dieser Weise auch verwickeltere Fälle aufzulösen und eine Reihe von Erscheinungen zu deuten, die dem Mikroskopiker täglich vorkommen, z. B. dass manche kleine Gegenstände bei verschiedener Einstellung bald hell, bald dunkel erscheinen.

Noch einfacher gestaltet sich die Erörterung eines anderen sehr häufig vorkommenden Falles. Es sei im Gesichtsfelde eine Kugel, deren Brechungsvermögen nicht merklich von der Umgebung abweicht, die aber eine stärker brechende, überall gleich dicke durchsichtige Hülle hat. Bekanntlich erscheint eine solche im hellen Gesichtsfelde als heller Kreis, jedoch mit einem dunkeln, gegen das Innere ziemlich scharf abgesetzten Saume umgeben. Wir brauchen, um dies zu erklären, nicht einmal die Strahlenbündel als vom Objectiv ausgehend anzusehen. Es ist vielmehr leicht zu sehen, dass die vom Spiegel ausgehenden Strahlenbündel im Allgemeinen unsere Kugel ohne Ablenkung durchsetzen, denn die viermalige Brechung an der sehr dünnen, von parallelen Flächen begrenzten Hülle wird ihre Richtung nicht merklich verändern. Nur diejenigen Strahlenbündel, welche dem Rande des mittleren Horizontalschnittes sehr nahe in die Hülle eintreten, werden nicht zum Objectiv gelangen können, denn sie werden beim Ausfallen in sehr schräger Richtung durch totale Reflexion sehr weit aus ihrer Bahn abgelenkt. Ihr Ausfallen bedingt im Bilde an den entsprechenden Stellen natürlicherweise den dunkeln Saum. Ganz ähnlich wird sich übrigens eine Kugel mit schwächer brechender Hülle verhalten. Nur wird der Ausfall der den Rand treffenden Bündel hier durch eine totale Reflexion, welche sie erleiden, indem sie in die Hülle eintreten, nicht aus derselben austreten.

Mutatis mutandis ist diese Erörterung auch auf cylindrische Massen leicht zu übertragen.

Betrachtungen dieser Art dürften sehr geeignet sein, die Tragweite des Mikroskops genauer zu werthen. Es ist aus ihnen klar, dass ein mikroskopisches Bild keineswegs so unmittelbaren Aufschluss über die Form des Gegenstandes gäbe. Unmittelbar ist es nicht einmal ein Schattenriss des Gegenstandes. Dächte man sich z. B. nur einen zur Einstellungsebene schräg gestellten Cylinder von stärker brechender Substanz unter dem Deckplättchen, so würde dieser im Bilde durch eine

Figur repräsentirt sein, die ich zwar im Augenblicke ausser Stande bin näher anzugeben, die aber gewiss Niemanden unmittelbar an einen schräg gestellten Cylinder erinnern würde[1]).

Drittes Capitel.

Der Augenspiegel.

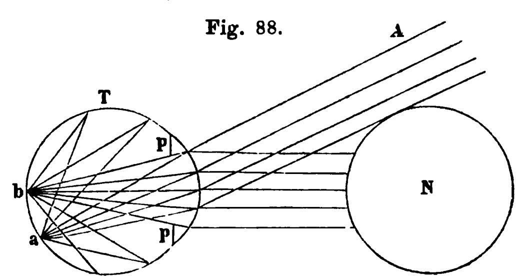
Um die Theorie dieses ingeniösen von Helmholtz erfundenen Instruments, das die ganze Augenheilkunde in eine neue Entwickelungsphase gebracht hat, zu verstehen, muss man sich zunächst den Grund davon ganz klar machen, warum der Hintergrund des Auges einem unbewaffneten Beobachter regelmässig absolut dunkel erscheint, obwohl er doch durch die Pupille reichlich Licht empfängt und nur in hohem Grade durchsichtige Körper vor ihr liegen. Dieser Grund liegt nicht etwa darin, dass die Hinterwand des Auges durch Pigment so geschwärzt wäre, dass sie von dem auf sie fallenden Licht gar nichts durch diffuse Zerstreuung zurückwirft, vielmehr alles absorbirt. Wäre dem wirklich so, so würde auch die Beobachtung mit dem Augenspiegel unmöglich sein, denn man wirft durch denselben doch wohl kaum jemals so grosse Lichtmengen ins Auge, als eine helle Tagesbeleuchtung thut. Der Grund liegt vielmehr in der regelmässigen Vertheilung der vom Augenhintergrunde diffus ausgehenden Lichtstrahlen durch die brechenden Medien. Es ist derselbe Grund, aus welchem eine in der Focalebene eines Mikroskopoculars aufgestellte Papierfläche dunkel erscheint, wenn sie nur von der Ocularöffnung aus Licht empfangen kann. Er wird verständlich, sobald man sich vergegenwärtigt, von welchen Punkten der beobachteten Augenhinterwand allein Strahlen in das beobachtende Auge gelangen können, selbst wenn von jedem Punkte derselben Strahlen nach allen Richtungen divergirten. Sei in der That T, Fig. 88, ein beobachtetes Auge, und

---

[1]) Den Betrachtungen dieses Paragraphen, der unverändert aus der ersten Auflage herübergenommen wurde, habe ich nur noch hinzuzufügen, dass inzwischen Nägeli und Schwendener in der That eine Reihe von Fällen in der oben beschriebenen Weise genau zergliedert haben. Ich muss es mir jedoch versagen, diese schönen und praktisch höchst wichtigen Einzelheiten hier auch noch aufzunehmen. Wer die mikroskopische Wissenschaft zum genaueren Studium machen will, wird doch das Studium des Nägeli'schen Werkes nicht entbehren können. Es mag nur noch bemerkt sein, dass auch der einfache Fall einer durchsichtigen Kugel noch zu manchen feineren Erscheinungen Veranlassung giebt, die Nägeli eingehend analysirt hat. Ich bin gleichwohl bei meiner in der ersten Auflage gegebenen Zergliederung stehen geblieben, weil es hier nur darauf ankam, ein Beispiel einer solchen zu geben.

jeder Punkt seines Hintergrundes, mehr oder weniger beleuchtet, sende durch diffuse Reflexion gleichsam selbstleuchtend nach allen Richtungen Lichtstrahlen aus. Einige der von a ausgehenden Strahlen sind in der Figur gezeichnet. Diejenigen derselben, welche in den Bereich der Pupillenöffnung fallen und folglich auch nach aussen dringen, müssen (wir wollen das Auge auf unendliche Ferne eingestellt denken) als parallelstrahliges Bündel nach A weitergehen — parallel mit der durch den Punkt a gelegten Richtungslinie. Von a aus wird also ein bei N befindliches beobachtendes Auge jedesfalls kein Licht empfangen können. Dagegen wird in N etwas von dem diffusen Lichte eindringen, was von b nach allen Richtungen ausstrahlt. Wir dachten für einen Augenblick den Punkt b auch leuchtend, in Wirklichkeit wird er aber bei der gedach-

Fig. 88.

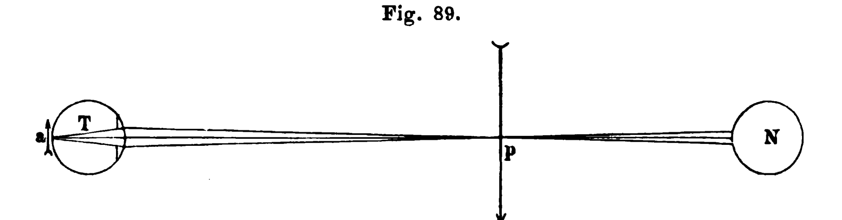


ten Anordnung des beobachteten und beobachtenden Auges von aussen kein Licht empfangen, also nicht leuchten, wofern nicht besondere Veranstaltungen getroffen sind, denn er liegt ganz innerhalb des (Zerstreuungs-) Bildes der Pupille von N, die nicht leuchtet. Mit anderen Worten, sollte b Licht empfangen, so müsste dies nothwendig in der Richtung von N herkommen; das in dieser Richtung allenfalls von rechts herkommende Licht wird aber von N als undurchsichtigem Körper abgefangen. In einem Falle könnte freilich der Punkt b doch Licht empfangen, wenn nämlich irgend ein Theil der Augenwand von T durchscheinend wäre, und seine Punkte von aussen stark erleuchtet, wie selbstleuchtende diffuses Licht ins ganze Auge, also auch nach b schickten. Dies ist der Fall bei den Albinokaninchen, deren Iris sehr stark durchscheinend ist. Die Helligkeit ihres Augenhintergrundes rührt lediglich von dem Lichte her, das von der erleuchteten Iris diffus auf die Netzhaut ohne Unterschied einzelner Stellen fällt, nicht daher, dass von dem durch die Pupille eindringenden Lichte wegen der Pigmentlosigkeit mehr zurückgestrahlt wird. In der That hält man das die Iris beleuchtende Licht durch einen Schirm mit einer Oeffnung von der Grösse der Pupille ab, dass eben nur noch durch diese Licht eindringen kann, so erscheint — worauf Donders zuerst aufmerksam gemacht hat — der Augenhintergrund eines Albino ebenso dunkelschwarz, wie bei einem reichlich pigmentirten Auge.

Der soeben erläuterte und durch Fig. 89 (a. f. S.) versinnlichte Fall ist nur ein Beispiel zu einem allgemeinen Satze, den man nunmehr sogleich in

aller Allgemeinheit zugeben wird. **Ein beobachtendes Auge kann nur von solchen Punkten der Netzhaut eines beobachteten Auges Strahlen empfangen, welche innerhalb des Bildes (deutlichen oder Zerstreuungsbildes) von der Pupille des beobachtenden Auges liegen.** Nach dem allgemeinen Reciprocitätsprincipe können ja von einem Punkte zu einem anderen nur dann Lichtstrahlen gelangen, wenn auch umgekehrt von diesem zu jenem Licht kommen kann. Von der Pupille des Beobachters kann aber nur zu ihrem Bilde im beobachteten Auge Licht kommen, folglich kann auch nur von Punkten dieses Bildes Licht zur Pupille des Beobachters kommen. Da aber diese kein leuchtender Körper ist, folglich die Punkte seines Bildes nicht leuchtend werden, so kann das beobachtende Auge nur dann aus dem beobachteten wirklich Licht empfangen, wenn das Bild seiner Pupille ganz oder zum Theil mit dem (deutlichen oder Zerstreuungs-) Bilde einer Lichtquelle zusammenfällt, vorausgesetzt immer, dass überall nur durch die Pupille Licht in das beobachtete Auge ge-

Fig. 89.



langt. Veranstaltungen, welche dieses Zusammenfallen bewirken und die gleichzeitig noch einen anderen Zweck erfüllen, nennt man Augenspiegel.

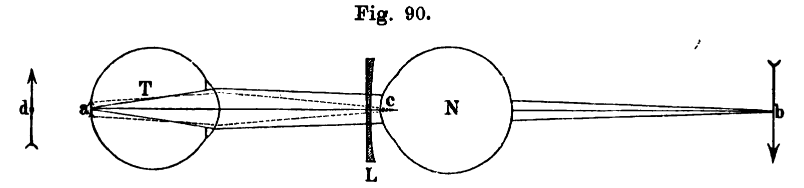
Dieser zweite Zweck ist der, dass die vom Augenhintergrunde des beobachteten ausgehenden Strahlenbündel schliesslich in das Auge des Beobachters mit dem Grade der Divergenz eindringen, dass sie sich auf Punkten seiner Netzhaut vereinigen, dass, mit anderen Worten, der Beobachter ein deutliches Bild von dem Theile der Netzhaut des Beobachteten sieht, von dem überhaupt Strahlen in sein Auge kommen.

Wir wollen zuerst die Mittel kennen lernen, welche zur Erreichung dieses letzteren Zweckes dienen. Sei wieder T, Fig. 89, ein beobachtetes Auge, seine ganze Netzhaut mag durch irgend welche Veranstaltung leuchtend gemacht sein, und sei das Auge T für die Entfernung Tp accommodirt. Hier wird also ein physisches, umgekehrtes, vergrössertes Bild der um a herumliegenden Netzhautpartie entstehen; denn ein von einem Netzhautpunkte bei a ausgehendes Strahlenbündel muss nach seinem Austritt aus dem Auge auf einen Punkt in der Accommodationsweite convergiren, weil reciproce ein von hier aus divergirendes Bündel im Auge sich auf dem Netzhautpunkte vereinigt haben würde. Wenn ein beobachtendes Auge das physische Bild deutlich sehen wollte, so

müsste es sich etwa bei N aufstellen, so dass Np die Entfernung des deutlichen Sehens wäre. Die Entfernung der beiden Augen von einander würde in diesem Falle die Summe der deutlichen Sehweiten beider Augen sein. Bei dieser bedeutenden Entfernung wird aber das durch die Pupille des Auges T begrenzte Gesichtsfeld so klein, dass das Auge N doch nichts deutlich unterscheiden könnte. Nur in einem Falle wäre es gleichwohl möglich, dass N ein deutliches Bild der Netzhaut von T sähe auch bei noch so kleinem Abstande zwischen T und N, wenn nämlich beide Augen auf unendliche Ferne eingestellt wären, so dass parallele Strahlenbündel aus T hervorträten, die dann auf der Netzhaut von N vereinigt würden, N möchte noch so nahe stehen; oder wenn etwa das Auge N gar auf convergente Strahlenbündel einstellbar wäre. Es scheint, dass dies nicht selten der Fall ist, und daher werden auch viele Beobachtungen mit dem Augenspiegel ganz ohne Linsen gemacht (siehe bei Coccius, Der Augenspiegel etc.).

Um nun unter gewöhnlichen Verhältnissen ein hinlänglich grosses Stück der beobachteten Netzhaut zu übersehen, hat man zwei verschiedene Mittel. Das eine ist von Helmholtz zuerst bei seiner ursprünglichen

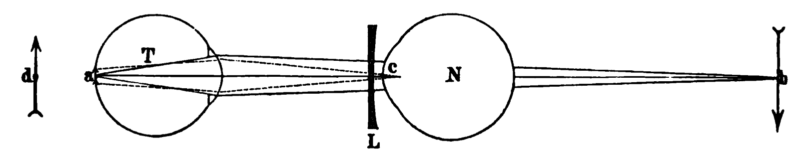
Fig. 90.



Form des Augenspiegels angewandt und besteht in einer zwischen die beiden Augen gesetzten Zerstreuungslinse, die es dem Beobachter erlaubt, ganz nahe an den Beobachteten heranzukommen, indem sie die convergent aus dessen Auge hervortretenden Strahlenbündel in divergente verwandelt, die auf der Netzhaut des Beobachters in Punkte vereinigt werden können, wie Fig. 90 deutlich machen wird. Diese Methode liefert ein aufrechtes, virtuelles Bild. Es ist leicht zu bestimmen, welche virtuelle Brennweite die Zerstreuungslinse haben muss, damit dadurch der Beobachter die beobachtete Netzhaut im aufrechten Bilde deutlich sieht, wenn die Abstände gegeben sind, in welchen die Linse von beiden Augen gehalten werden soll, und wenn man ausserdem die Sehweiten der beiden Augen kennt. Nach Punkten, die in der Sehweite Tb des beobachteten Auges T liegen, werden nämlich die aus demselben hervortretenden Strahlenbündel convergiren. Zieht man hiervon den Abstand der Linse vom Auge T ab, so hat man die Entfernung der Convergenzpunkte der auf L fallenden Strahlenbündel von L; sollen sie nach ihrem Durchgang durch L divergent werden, so muss jedesfalls die Brennweite von L kleiner sein als der soeben bezeichnete Abstand Lb, er mag durch p bezeichnet werden. Nun sollen sie aber so divergiren, als kämen sie aus Punkten, die von N um die Sehweite Nd dieses Auges abstehen, die also

von L um diese Sehweite weniger der Entfernung zwischen L und N abstehen. Dieser letztere Abstand — er soll p' heissen — muss also die für die Linse L zu dem Abstand $p = Lb$ conjungirte Vereinigungsweite sein. Daraus lässt sich die Brennweite f der zu wählenden Linse nach der Formel $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ berechnen. Man hat dabei zu beachten, dass die beiden Abstände p und p' beide mit negativem Vorzeichen zu nehmen sind, da sie sich auf ein virtuelles Object und auf ein virtuelles Bild beziehen. Es bekommt daher f schliesslich immer einen negativen Werth, den es auch nothwendig haben muss, da unter den gemachten Voraussetzungen eine Zerstreuungslinse zu wählen ist. Sei beispielsweise das Auge T auf 0,3 m, das Auge N auf 0,2 m accommodirt, die Linse stehe von T 0,03 m und das Auge N von der Linse 0,01 m ab. Dann liegt das virtuelle Object, d. h. die Convergenzpunkte der aus dem Auge T hervorgehenden Strahlenbündel 0,27 m hinter L, und das Bild dieses virtuellen Objectes muss, damit es dem Auge N in der deutlichen Sehweite von 0,2 m erscheine, um 0,19 m vor der Linse L liegen.

Fig. 91.



Man sucht nun eine Linse, für welche — 0,27 und — 0,19 conjungirte Vereinigungsweiten sind; d. h. p wäre $= -$ 0,27 m, $p' = -$ 0,19 m zu setzen und daraus f zu berechnen; man hätte also $-\frac{1}{0{,}27} - \frac{1}{0{,}19} = \frac{1}{f}$. Daraus berechnet sich f zu wenig über — 0,1 m. Es würde mithin eine Zerstreuungslinse von ungefähr 0,1 m Brennweite zur Beobachtung des Auges T für das Auge N nothwendig sein.

Auch die Vergrösserung, welche die gedachte Anordnung liefert, ist leicht zu berechnen. Betrachten wir einen kleinen Kreis der Netzhaut von T, dessen Mittelpunkt a ist, und den das Auge N sehen kann; wir wollen ihn den Kreis A nennen. Denken wir ihn leuchtend, so muss er bei b ein physisches Bild entwerfen (wir wollen es den Kreis B nennen), dessen Durchmesser β dem gleich kommt, welchen ein bei B aufgestellter leuchtender Kreis haben müsste, wenn sein Bild gerade den gedachten Netzhautkreis bei a decken sollte. Vom Kreise B macht die Linse L ein virtuelles Bild D, dessen Durchmesser δ zu finden ist aus der Gleichung $\beta : \delta = p : p'$ [1]), da ja immer Bild und Object am optischen Mittelpunkte einer Linse denselben Winkel umspannen, ihre linearen Dimensionen also

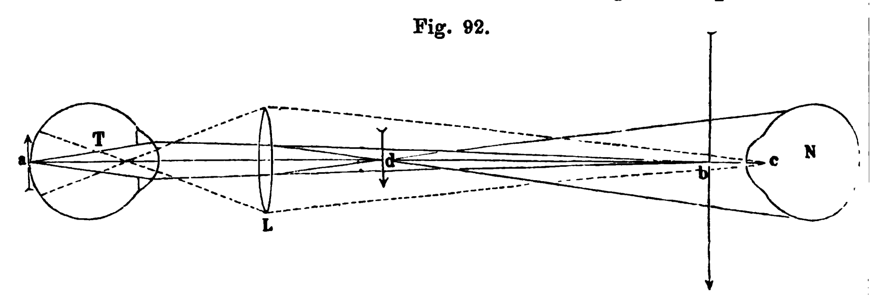
[1]) Im Folgenden sind unter p und p' die positiv genommenen absoluten Werthe der mit diesen Buchstaben bezeichneten Abstände zu verstehen.

im Verhältnisse ihrer Abstände davon stehen. Ist das Bild D nur klein gegen seine Entfernung von N, so erscheint es diesem Auge unter dem Gesichtswinkel $\frac{\delta}{dN}$ oder $\frac{\delta}{p'}$, wenn die Linse dicht vor dem Auge N steht, so dass man die Länge LN gegen DL vernachlässigen darf. $\frac{\delta}{p'}$ ist aber der soeben gebrauchten Proportion zufolge $= \frac{\beta}{p}$. Dem Auge T erscheint der Kreis B unter einem kleineren Gesichtswinkel $= \frac{\beta}{p + TL} \left(= \frac{\beta}{Tb}\right)$, der erst dann merklich gleich $\frac{\beta}{p}$, mithin gleich $\frac{\delta}{p'}$ wird, wenn der Abstand TL der Linse von T nur einen verschwindend kleinen Bruchtheil der Sehweite des Auges T d. h. der Länge $p + TL$ ausmacht. Es ergiebt sich also der Satz: Im Allgemeinen erscheint dem beobachtenden Auge ein Netzhautstück des beobachteten unter einem etwas grösseren (mindestens gleichen) Gesichtswinkel, als diesem ein Object erscheint, dessen Bild gerade das betrachtete Netzhautstück deckt. Um die wirkliche Vergrösserung des Netzhauttheiles zu ermitteln, brauchte man nur die Entfernung desselben vom Knotenpunkte zu kennen. Nehmen wir sie beispielsweise in runder Zahl zu 0,015 m an, so wäre der Durchmesser α des Kreises A, da er durch die zum Umfang vom bekannten Kreise B durch den Knotenpunkt von T gezogenen Richtungslinien begrenzt wird, $= \frac{\beta}{p + LT} \cdot 0{,}015\,\text{m}$, sein durch die Linse entworfenes virtuelles Bild hätte aber den Durchmesser $\delta = \frac{\beta \cdot p'}{p}$. Das Verhältniss $\frac{\delta}{\alpha}$ wäre demnach $= \frac{\beta p'}{p} : \frac{\beta}{p + TL} \cdot 0{,}015 = \frac{p'(p + TL)}{p \cdot 0{,}015}$. In unserem Falle war $p = 0{,}19$; $p' = 0{,}27$; $p + TL$ die Sehweite des Auges $T = 0{,}3$, folglich $\frac{\delta}{\alpha} = 14{,}0 \ldots$. Wir hätten also unter den gemachten Voraussetzungen eine wenig über 14 malige Vergrösserung.

Das Gesichtsfeld ist bei der uns beschäftigenden Beobachtungsmethode nicht scharf begrenzt, da ja der es begrenzende Rand der Pupille von T nie mit dem viel weiter abstehenden Bilde D gleichzeitig deutlich erscheinen kann. Von seiner Grösse bekommt man eine Vorstellung, wenn man vom Mittelpunkte der Pupille des beobachtenden Auges N (siehe Fig. 90) Strahlen ausgehend denkt und diejenigen heraussucht, welche in die Pupille des beobachteten Auges T fallen. Construirt man ihren Gang durch das Auge T, so fallen sie auf einen kleinen Kreis seiner Netzhaut, das Zerstreuungsbild des Punktes c; in der Figur, wo die beiden Randstrahlen des fraglichen Bildes gezeichnet sind, ist der kleine Pfeil bei a der Durchmesser des Kreises. Es können nun natürlich reci-

proce durch den Mittelpunkt der Pupille des beobachtenden Auges nur Strahlen von solchen Bündeln gelangen, die von Punkten dieses Kreises ausgehen. Von weiter seitwärts gelegenen Punkten der Netzhaut des beobachteten Auges können höchstens noch durch den Rand der Pupille des beobachtenden einige Strahlen eindringen, und sehr bald wird man über beide Enden des Pfeiles *a* hinaus zu Punkten kommen, die gar keine Strahlen mehr ins Auge *N* schicken können. Rechnet man bloss diejenigen Punkte zum Gesichtsfelde, welche auch durch den Mittelpunkt der Pupille des beobachtenden Auges einen Strahl, also im Ganzen starke Strahlenbündel in dasselbe schicken können, so ist der kleine Pfeil bei *a* genau der Durchmesser desselben; es ist alsdann das Gesichtsfeld gleich dem Zerstreuungsbilde, welches auf der Netzhaut des beobachteten Auges vom Mittelpunkte der Pupille des beobachtenden Auges entsteht. Die soeben gemachte Ableitung ist eigentlich schon in dem oben (S. 304) Gesagten enthalten. Es wurde daselbst schon allgemein gesagt, dass immer der Beobachter nur das Zerstreuungsbild seiner eigenen Pupille im be-

Fig. 92.



obachteten Auge als Gesichtsfeld übersehen könne. Wir haben hier nur der Einfachheit wegen die Pupille des Beobachters auf einen Punkt reducirt. Dieser Zerstreuungskreis ist wohl in allen wirklich darstellbaren Fällen kleiner als die Pupille des beobachteten Auges, denn um ihn nur genau so gross zu machen, müsste das beobachtende schon so nahe heranrücken, dass der Punkt *c* fast mit dem vorderen Brennpunkte des Auges *T* zusammenfiele.

Eine zweite Methode, ein geeignetes Bild der Netzhaut zur Anschauung zu bringen, besteht darin, dass man ganz nahe vor das beobachtete Auge, dessen Netzhaut wir wieder leuchtend denken, eine Sammellinse von 0,02 bis 0,06 m Brennweite halten. Sei in Fig. 92 wieder *T* das beobachtete Auge. Das vom Punkte *a* seiner Netzhaut ausgehende Strahlenbündel wird wieder daraus dergestalt gebrochen hervortreten, dass es gegen einen in der Sehweite von *T* gelegenen Punkt *b* convergirt, dessen deutliches Bild, wenn er leuchtend wäre, auf *a* fallen würde. Durch die Linse *L* werden aber die Strahlen dieses Bündels rascher convergirend gemacht, so dass sie sich etwa schon in *d* schneiden; hier entsteht also ein physisches Bild von *a*, das der Beobachter bei *N* bequem

entweder mit freiem Auge oder mit einer Lupe betrachten kann. Rings um d herum entstehen natürlich ebenso die Bilder der um a herum gelegenen Netzhautpunkte. Diese Methode liefert ein umgekehrtes physisches Bild. Die durch d zur Verbindungslinie beider Augenmittelpunkte senkrecht gelegte Ebene, in welcher das Bild der Netzhautpartie, wir wir sahen, zu Stande kommt, wird immer der Linse etwas näher liegen als ihre Hauptbrennebene, da die Strahlen schon convergent auf die Linse fallen, also die Vereinigungsweite Lb (sie mag wieder p heissen) negativ zu nehmen ist, zu welcher $Ld = p'$ conjungirt sein muss. Man hat nämlich $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ [1]), wenn f die Hauptbrennweite der Linse ist. Da aber in der Regel p sehr viel grösser als f ist, so ist p' nur sehr wenig kleiner als f.

Was die Vergrösserung betrifft, so mag a der Halbmesser eines um a gedachten Netzhautkreises sein, der seines physischen Bildes um d herum mag δ heissen; es käme nun darauf an, das Verhältniss $\frac{\delta}{\alpha}$, d. h. die lineare Vergrösserung zu berechnen. Wir bezeichnen zu dem Ende mit β den Halbmesser des Bildes vom gedachten Netzhautkreise, welches bei B zu Stande kommen würde, wenn L nicht da wäre. Die Entfernung der Netzhaut des Auges T von seinem Knotenpunkte heisse y, die Entfernung der Linse von demselben q; f, p und p' behalten ihre obige Bedeutung, wir haben alsdann zunächst $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{y}{p+q}$, weil Bild und Object bei einem Auge sich verhalten wie ihre Abstände vom Knotenpunkte. Es ist also der Halbmesser des Bildes $\beta = \frac{p+q}{y} \cdot \alpha$. Dies Bild ist nun virtuelles Object für die Linse L, von der es um p absteht; sie macht bei d in der Entfernung p' ein physisches Bild dieses virtuellen Objects, und da auch bei einer Linse die Durchmesser von Object und Bild im Verhältnisse ihrer Abstände vom optischen Mittelpunkte der Linse stehen, so hat man $\frac{\beta}{\delta} = \frac{p}{p'}$ oder $\delta = \frac{p'}{p} \cdot \beta$, oder endlich, wenn man für β seinen soeben gefundenen Werth setzt, $\delta = \frac{p'}{p} \cdot \frac{p+q}{y} \cdot \alpha$. Somit ist das Verhältniss: $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{p'(p+q)}{p \cdot y}$, oder wenn man noch p' durch p und f ausdrückt: $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{p'(p+q)}{(p+f)y}$. Stellt man die Linse (wie es in der Regel wirklich nahezu geschieht) so, dass sie um ihre Brenn-

---

[1]) Wenn p den absoluten Werth des Abstandes Lb bedeutet, so muss es mit negativem Vorzeichen in die Formel gesetzt werden, weil es der Abstand eines virtuellen Objectes ist.

weite vom Knotenpunkte des Auges T absteht, so ist $f = q$, und man hat $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{f}{y}$, d. h. die Vergrösserung der Brennweite von L direct proportional. Nimmt man wieder y zu 0,015 m an, so hätte man zu einer zweimaligen Vergrösserung eine Linse von 0,03 m Brennweite nöthig, zu dreimaliger eine Linse von 0,045 m Brennweite etc. Diese Objectivvergrösserung wäre noch mit einer Ocularvergrösserung zu multipliciren, wenn das Auge N das Bild d mit einer Lupe betrachtet.

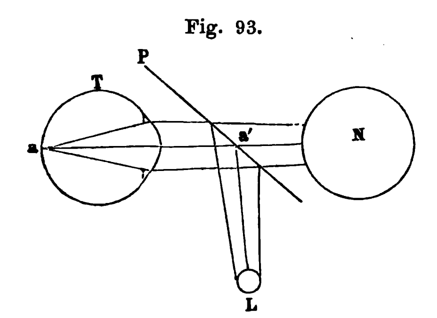
Das Gesichtsfeld erscheint begrenzt durch den Rand der Pupille von T, wenn L nahe an T steht. Entfernt man L mehr und mehr, so wird die Pupille immer mehr vergrössert, und wenn die Pupille von T in der Nähe des Brennpunktes von L liegt, so verschwindet ihr Rand ganz aus dem Gesichtsfelde, das nun bloss noch vom Rande der Linse L begrenzt wird. Um die Grösse des Gesichtsfeldes zu bestimmen, behandeln wir wieder die Visirlinien des Beobachters als Lichtstrahlen. In der Figur sind zwei auf den Linsenrand zielende als punktirte Linien angedeutet; sie würden nach ihrer Brechung durch die Linse ungefähr auf deren Brennpunkt zielen, da dieser aber bei der möglichst günstigen Anordnung ganz in der Nähe des Knotenpunkts von T fällt, so gehen sie durch T fast ungebrochen und schneiden auf seiner Netzhaut ein Stück ab, welches als Gesichtsfeld betrachtet werden kann, denn nur äusserst wenige, mehr seitwärts gelegene Punkte werden noch ganz unbedeutende Strahlenbündel durch die Randtheile der Pupille von N schicken können [1]). Nennen wir den Durchmesser des so construirten Gesichtsfeldes v, und u den Durchmesser von L, behalten ferner y und f ihre obige Bedeutung, so hat sehr nahezu die Beziehung statt $\frac{v}{x} = \frac{u}{f}$, wie aus der Figur ohne Weiteres hervorgeht. Da man recht gut zu dem in Rede stehenden Zwecke Linsen anwenden kann, deren Durchmesser der halben Brennweite gleich ist, so kann $v = 0{,}0075$ m sein, wenn $y = 0{,}015$ angenommen wird. Man kann demnach nach der zweiten Methode ein viel grösseres Netzhautstück übersehen als nach der ersten, bei der ja das Gesichtsfeld nie so gross werden konnte als die Pupille, diese aber, wenn sie nicht durch künstliche Mittel erweitert wird, kaum einen Durchmesser von 0,0075 erreicht. Die hier vorausgesetzte Stellung der Linse liefert das grösstmögliche Gesichtsfeld; denn bringt man L näher an T, so beschränkt die Pupille von T das Gesichtsfeld, weil die äussersten Visirlinien nicht mehr hindurchgehen. Entfernt man L von T, so werden die Visirlinien im Auge T abgelenkt,

[1]) Man kann auch diese Ableitung wieder als unmittelbare Folgerung des Satzes auf S. 304 darstellen, indem man die Pupille von N auf ihren Mittelpunkt reducirt und sagt: von diesem Punkte macht zunächst die Linse L ein physisches Bild, in der Nähe ihres Brennpunkts, der nahe beim Knotenpunkte von T gedacht ist, das Zerstreuungsbild von c im Auge T wird also von den Richtungsstrahlen nach dem Linsenrande begrenzt sein, wie in der Figur die punktirten Linien zeigen.

schneiden sich näher an der Netzhaut und schneiden auf dieser kein so grosses Stück mehr ab.

Wir haben nunmehr nach den Mitteln zu fragen, durch die man den Theil der Netzhaut des beobachteten Auges, von dem der Beobachter nach einer der beschriebenen Methoden ein deutliches Bild sehen kann, wirklich leuchtend macht, so dass das Bild, dessen geometrische Sichtbarkeit nachgewiesen wurde, auch physisch sichtbar sei. Wir wissen aus der vorausgeschickten Betrachtung über die scheinbare Dunkelheit des Augengrundes, dass jeder Netzhautpunkt nur von solchen Punkten ausserhalb Strahlen empfangen kann, zu welchen er auch umgekehrt Strahlen schicken kann. Wir sahen soeben, welche Punkte einer beobachteten Netzhaut zur Pupille des Beobachters Strahlen schicken können. Von ihr empfangen sie aber jedesfalls kein Licht, also müssen dieselben Punkte, wenn sie dem Beobachter als beleuchtete erscheinen sollen, auch noch zu anderen Punkten, welche wirklich Licht aussenden, Strahlen schicken können. Denkt man sich also das ganze Strahlenbündel, das von einem Netzpunkte des beobachteten Auges nach aussen dringt, so muss dies, wenn ein Beobachter den Punkt leuchtend sehen soll, zum Theil in die Pupille desselben, zum Theil zu einer Lichtquelle gehen. Geschieht dies nämlich, so kann auf dem Wege des letztgedachten Theiles (in umgekehrter Richtung) Licht auf den Netzhautpunkt fallen, und von da zurückkehrend auf dem Wege des erstgedachten Theiles etwas in die Pupille des Beobachters dringen. Offenbar kann man nach dem vorgesteckten Ziele auf zweierlei Arten streben: entweder man spaltet das gedachte Bündel in zwei Gruppen von Strahlen und veranstaltet es, dass die eine Gruppe ganz in die Pupille des Beobachters fällt, die andere Gruppe ganz zur Lichtquelle geht, oder man spaltet jeden Strahl des Bündels, so dass von jedem Strahle ein Theil zur Pupille des Beobachters, ein Theil zur Lichtquelle geht. Die letztere Idee liegt dem ursprünglichen Helmholtz'schen Augenspiegel zu Grunde, sie ist in Figur 93 versinnlicht. Eine (unbelegte) Glasplatte P steht schräg zwischen dem beobachteten und beobachtenden Auge. Ein von a im beobachteten Auge T ausgehendes Strahlenbündel trifft bei a' auf die Glasplatte, und von jedem Strahle desselben wird ein Theil nach der Lichtflamme L reflectirt, ein Theil nach der Pupille von N hindurchgelassen. Es kann also umgekehrt auf dem Wege $L a' a$, Licht nach a gelangen, und auf dem Wege $a a' N$ kann Licht von a nach N gehen. Wenn nun noch eine Zerstreuungslinse dicht vor N oder eine Sammellinse vor T gehalten wird, so kann N den

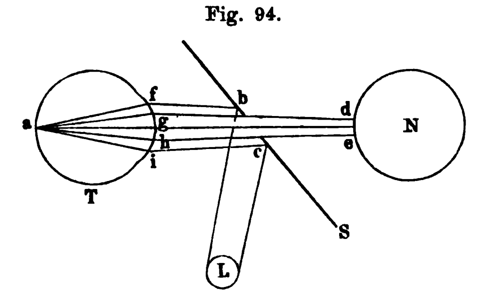
Fig. 93.



Punkt a deutlich sehen. Die richtige Stellung der Glasplatte wird dadurch bestimmt, dass das Auge T das Spiegelbild der Flamme und die Pupille von N in derselben Richtung sieht. Ist das Auge T gerade für die Entfernung des Spiegelbildes der Flamme genau adaptirt, so kann das Auge N das Flammenbildchen in T selbst genau sehen. Ein anderer Vortheil dieser Methode besteht darin, dass man den störenden Hornhautreflex sehr vermindern kann. Das von der Glasplatte nach T reflectirte Licht ist nämlich, wenn sie unter einem gewissen bekannten Winkel gestellt ist, grossentheils in der Reflexionsebene polarisirt. Diese Polarisation behält das von der Hornhaut regelmässig gespiegelte Licht bei und wird daher, als in der Einfallsebene polarisirt, hernach bei der Brechung in der Glasplatte sehr geschwächt (Bd. I, Nr. 321); hingegen hat das von der Netzhaut diffus reflectirte Licht seine Polarisation eingebüsst und erfährt bei seinem Durchgange keine besondere Schwächung. Ein ganz besonders günstiges Resultat in dieser Beziehung lässt sich durch mehrere parallele Glasplatten erzielen, die unter einem gewissen Winkel gestellt sind. Das nähere Detail hierüber ist in der ersten Schrift von Helmholtz über den Augenspiegel nachzulesen.

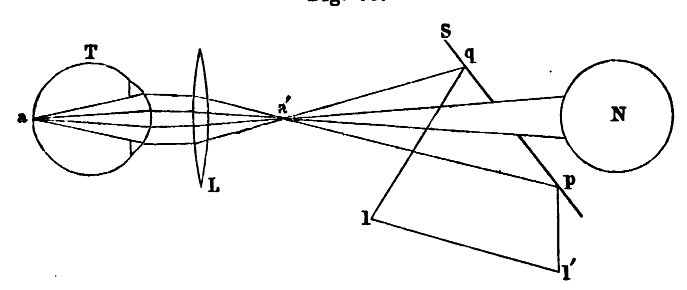
Die Spaltung des Strahlenbündels in zwei Gruppen erzielt man gewöhnlich durch einen undurchsichtigen Spiegel, der in der Mitte ein kleines Loch hat. Sei in Fig. 94 wieder a ein Punkt der Netzhaut des beobachteten Auges T. Von dem Strahlenbündel, das er durch die Pupille nach aussen schicken kann, sind fünf in der Figur gezeichnet; sie würden alle gegen einen hinter N gelegenen Punkt convergiren, wenn nicht der durchbohrte Spiegel S vorhanden wäre. Durch das Loch desselben gehen nun die zwischen gd und he gelegenen Strahlen des Bündels zur Pupille des beobachtenden Auges N, alle Randstrahlen aber, die zwischen fb und gd einerseits, sowie zwischen he und ic andererseits begriffen sind, werden vom Spiegel zur Lichtquelle L reflectirt. Es kann also der Punkt a durch diese Randstrahlen in umgekehrter Richtung beleuchtet und somit leuchtend gemacht werden und hernach durch das Loch Strahlen nach N schicken. Offenbar setzt jedoch diese Beleuchtungsart voraus, dass das Loch im Spiegel kleiner ist als der Schnitt des Strahlenkegels, folglich jedesfalls kleiner als die scheinbare Pupille von T, wenigstens, wenn der Beobachter durch die Mitte des Loches visiren will. Ueberhaupt wird offenbar der Punkt a um so weniger von L aus erleuchtet, je grösser das Loch in S ist, so ausgedehnt auch die Lichtquelle sein mag. Viel günstiger sind die Bedingungen für diese

Fig. 94.



Beleuchtungsart, wenn vor T noch eine Sammellinse steht (wenn also ein umgekehrtes physisches Bild beobachtet werden soll); in diesem Falle darf auch das Loch im Spiegel grösser sein. Ein Blick auf die Fig. 95 wird hinreichen, davon zu überzeugen. Das von a aus durch die Pupille gehende Strahlenbündel wird durch die Linse L nach a' hin vereinigt und divergirt von diesem Punkte so stark, dass es mit sehr breiter Basis pq auf dem Spiegel S steht. Ein kleiner Bruchtheil desselben geht offenbar durch das Loch zum Auge N und somit für die Beleuchtung verloren, während ein sehr grosser Theil nach der Lichtquelle reflectirt wird; sie gelangen freilich nur dann alle zur Lichtquelle, wenn diese die gehörige Ausdehnung hat. In unserem gedachten Falle müsste z. B. ihre Breite gleich der Linie ll' sein, wenn so viel Strahlen als möglich zur Beleuchtung verwandt werden sollen. Es wird nun in den meisten Fällen nicht wohl eine wirkliche Lichtquelle, etwa eine Flamme, von der erforderlichen Breite anwendbar sein, und deshalb ändert man den Apparat so ab, dass die äussersten Randstrahlen pl' und

Fig. 95.



ql doch noch nach einer kleineren Lichtquelle gelangen. Man übersieht das Princip dieser Abänderung bequemer, wenn man es ein wenig anders formulirt. Es wäre offenbar das letzte hier vorschwebende Ziel vollständig erreicht, wenn es gelänge, die Fläche des Spiegels S selbst in eine Lichtquelle zu verwandeln, die von jedem Punkte (ausgenommen natürlich sind die, welche dem Loche entsprechen) auf die ganze Linse L ein stetiges Strahlenbündel schickt. Man brauchte alsdann den Weg der Strahlen $a'p$ und $a'q$ gar nicht weiter zu verfolgen; denn man wüsste schon im Voraus: der Punkt a empfängt in Wirklichkeit Strahlen von allen Punkten der Spiegelfläche, zu denen er Strahlen schicken kann. Nichts ist aber leichter, als die Fläche S leuchtend zu machen. Wir brauchen sie nämlich nur concav gekrümmt, statt eben zu nehmen und nun eine Lichtflamme so zu stellen, dass deren vom Hohlspiegel S entworfenes physisches Bild mit der Linse L zusammenfällt und mindestens eben so gross als dieselbe ist, so dass das Bild die Linse ganz deckt. Alsdann geht ja in der That von jedem Punkte der Spiegelfläche nach jedem Punkte der Linse L, d. h. des Bildes der Lichtflamme, das die Linse deckt, ein Strahl, und für die Linse L ist also S in seiner ganzen Aus-

dehnung eine flächenartig ausgebreitete Lichtquelle. Der Hohlspiegel kann übrigens auch ersetzt werden durch einen ebenen oder convexen Spiegel, zwischen welchem und der Lichtflamme eine Sammellinse so gesetzt ist, dass das physische Bild, welches sie von der Lichtflamme entwirft, vom ebenen Spiegel S gerade nach der Linse L hingeworfen wird und sie in ihrer ganzen Ausdehnung deckt.

Die beiden Beleuchtungsmethoden, mit den beiden Beobachtungsmethoden combinirt, geben vier Grundformen des Augenspiegels, die, im Einzelnen mannigfach modificirt, unter verschiedenen Namen im Gebrauch sind.

Beispielsweise mag hier noch eine Rechnung Platz finden, die man anzustellen hätte, um die möglichst günstige Anordnung zu finden, die man den einzelnen Stücken geben müsste, um ein verkehrtes, viermal vergrössertes Bild von der Netzhaut eines normalen, auf unendliche Ferne eingestellten Auges zu erhalten. Nach dem Obigen (s. S. 310) müssten wir zu dem Ende vor Allem nothwendigerweise eine Sammellinse von 0,06 m Brennweite in einer Entfernung von ebenfalls 0,06 m vom Knotenpunkte des beobachteten Auges aufpflanzen; ihr Durchmesser mag 0,03 m betragen. Das Bild der Netzhaut würde alsdann in der Hauptbrennebene, also 0,06 m vor der Linse entstehen. Ist nun die Sehweite des Beobachters etwas über 0,15 m, so dürfte der Beleuchtungshohlspiegel (der ja zwischen Beobachter und Beobachteten zu stellen ist) höchstens 0,15 m vom Bilde, also 0,15 m + 0,06 m = 0,21 m von der Linse entfernt aufgestellt werden. Die Grösse, welche dem Spiegel gegeben werden muss, ist durch die Bedingung zu bestimmen, dass im ganzen Gesichtsfelde ein Maximum der Helligkeit ist. Dies tritt dann ein, wenn von jedem Punkte der Linse L (Fig. 95) ein Strahl durch jeden Punkt der Pupille des beobachteten Auges fällt. Diese Bedingung wird aber offenbar erfüllt, wenn die genannte Pupille gleich oder kleiner ist als das Bild, welches die Linse L in ihrer Nähe von dem Spiegel entwirft. Da die Pupille durch Belladonna selbst bis auf 0,01 m erweitert werden kann, so muss der Spiegel einen Durchmesser von mindestens 0,025 m haben; dann wird sein Bild grösser als 0,01 m. Die Brennweite, die wir dem Hohlspiegel geben müssen, bestimmt sich aus der Bedingung, dass das von ihm entworfene Bild die ganze Linse decken muss, wenn man noch hinzunimmt, dass man nicht wohl eine Flamme von mehr als 0,015 m Durchmesser anwenden kann. Wir haben uns demnach zu fragen, wie gross muss die Brennweite eines Spiegels sein, der in einer Entfernung von 0,21 m von einem 0,015 m breiten Gegenstande ein 0,03 m breites Bild entwirft; denn so breit muss ja das Bild der Lampenflamme sein, damit es die ganze Linse deckt. Da hiernach das Bild zweimal so gross sein soll als der Gegenstand, so muss nach den bekannten Regeln der Katoptrik (Müller-Pfaundler, Lehrb., 8. Aufl., II, 1, S. 52) erstlich der Gegenstand halb so weit vom Spiegel entfernt sein als das Bild, d. h. die Lichtflamme muss jedesfalls in 0,105 m Entfernung vom Spiegel aufgestellt

werden; damit aber 0,105 m und 0,210 m für einen Hohlspiegel conjungirte Vereinigungsweiten seien, so muss zweitens derselbe eine Brennweite von 0,07 m haben, denn es ist $\frac{1}{70} = \frac{1}{105} + \frac{1}{210}$.

In Betreff näheren Details über die Theorie der Augenspiegel ist auf die meisterhafte Darstellung zu verweisen, die Helmholtz theils in seiner ersten Abhandlung, theils in seiner physiologischen Optik (allgemeine Encyklopädie der Physik, redigirt von Karsten) von derselben giebt. Aus dieser letzteren, die überhaupt dem Vorstehenden zu Grunde liegt, mag hier noch ein Satz wörtlich citirt werden, der ein bequemes Mittel an die Hand giebt, die Wirkung jedes Augenspiegels sich am eigenen Auge experimentell klar zu machen: „Man stelle das zur Erleuchtung dienende Licht auf und bringe das Instrument vor sein Auge in dieselbe Lage, wie es sonst vor dem Auge des Beobachteten steht; der Theil des Gesichtsfeldes, welcher alsdann hell erscheint, entspricht dem Theile der Netzhaut, welcher erleuchtet ist. Man kann erkennen, ob das helle Feld gross oder klein, ob es gleichmässig erleuchtet ist, oder ob sich dunkle Stellen darin befinden, und wie dunkel diese sind. Alsdann nehme man die Flamme von der Stelle weg, wo sie zur Erleuchtung des Auges dient, und bringe sie hinter das Instrument, da wo sich sonst das Auge des Beobachters befindet, so dass das Licht durch die Oeffnung scheint, die dem Beobachter zum Durchsehen dient. Was jetzt im Gesichtsfelde erleuchtet ist, ist der Kreis, welchen der Beobachter von der Netzhaut übersehen kann."

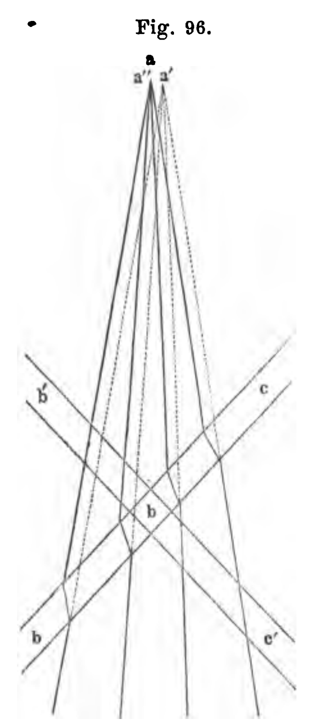
Viertes Capitel.

Das Ophthalmometer.

Zum Zwecke, die Krümmungen der brechenden Flächen des Auges am Lebenden zu bestimmen, hat Helmholtz ein eigenes Instrument — das Ophthalmometer — construirt. Sein nächster Zweck ist, die Grösse der durch Reflex an den betreffenden Flächen entstehenden Bilder heller Gegenstände genau zu messen. Natürlich kann man die Krümmung einer spiegelnden Fläche sofort berechnen, sowie man die Grösse des Spiegelbildes gemessen hat, das sie von einem Gegenstande entwirft, dessen Grösse und Entfernung von der Fläche bekannt ist. Handelt es sich freilich um eine spiegelnde Fläche (z. B. die Linsenflächen des Auges), vor der sich noch brechende Medien befinden, so müssen auch über diese alle Data bekannt sein. Indessen ist dies zu entwickeln Sache der physiologischen Optik selbst. Wir haben uns hier nur zu beschäftigen mit der Methode, nach welcher die Grösse der Reflexbildchen gemessen wird.

Diese Messung könnte freilich ganz einfach geschehen mit Hülfe eines Fernrohres oder Mikroskops, in dessen Ocular sich ein Mikrometer befindet, und es sind derartige Messungen in früherer Zeit öfters angestellt. Man sieht aber leicht, dass bei Beobachtung mit dem Fernrohr jede zufällige Bewegung des zu beobachtenden Auges während der Messung in diese mit ihrem ganzen Betrage als Fehler eingeht. In der That muss man sich hier zuerst merken, mit welchem Theilstriche des Mikrometers der eine Rand des zu messenden Bildes coincidirt, und dann zusehen, bei welchem Theilstrich der andere Rand liegt. In der dazwischen nothwendig verstreichenden Zeit kann sich aber das beobachtete Auge und mithin das Reflexbild, resp. sein Bild im Fernrohroculare verschieben, so dass der zuerst fixirte Rand desselben bei der Fixation des zweiten gar nicht mehr an dem Theilstriche liegt, an welchem es zuerst lag. Um den ganzen Betrag dieser Verschiebung würde man also das Reflexbild zu gross oder zu klein schätzen. Dieser Uebelstand ist bei dem Helmholtz'schen Ophthalmometer vollständig vermieden, indem die Messung mit diesem Instrumente darauf hinausläuft, eine einzige Coincidenz zu beobachten.

Fig. 96.



Das Princip des Instruments wird durch die Fig. 96 deutlich. Sei a ein leuchtender Punkt. Von den davon allseitig ausgehenden Strahlen sind vier als ausgezogene Linien gezeichnet. Fällt nun dieses Strahlenbündel schief auf eine planparallele Glasplatte $b\,c$, deren Ebene zur Ebene der Zeichnung senkrecht gedacht wird, so geht nach den Brechungen jeder einzelne Strahl in einer zu seiner ursprünglichen parallelen Richtung weiter, jedoch etwas verschoben, so dass das ganze Strahlenbündel aus einem seitwärts und etwas näher gelegenen Punkte a' zu kommen scheint[1]). Dieser Punkt ist offenbar um so mehr gegen a verschoben, je grösser die Winkel sind, die die Strahlen mit den Einfallslothen machen, oder je schräger das Bündel die Platte trifft. Für Alles, was hinter der Platte dem ausfahrenden Bündel begegnet, ist es also erlaubt, von der Brechung in der Platte abzusehen und

[1]) Es ist zu bemerken, dass diese Deduction nur für Strahlenkegel von geringer Oeffnung am Punkte a mit hinreichender Annäherung gültig ist; doch wird bei der darauf gegründeten Methode auch nur von solchen Gebrauch gemacht.

den Punkt a' für den leuchtenden Punkt a zu setzen. Hätte jetzt die Platte die Lage $b'c'$ (zu bc und den Strahlen symmetrisch auf der anderen Seite) gehabt, so wäre ein ausfahrendes Bündel entstanden, das von dem Punkte a'' auszugehen schiene, der zu a' symmetrisch auf der anderen Seite von a liegt. Helmholtz bringt nun zwei vollkommen gleich dicke Glasplatten drehbar an eine Axe, die in beider Ebenen liegt, so dass der Apparat, wenn die Axe senkrecht gedacht und er in der Richtung der Axe angesehen wird, ein Kreuz, wie in Fig. 96, von variabler Oeffnung darstellt. Er befestigt den Apparat vor dem Objectiv eines Fernrohres, so dass die obere Platte die obere, die untere Platte die untere Hälfte des Objectivs bedeckt. Er giebt endlich dem Apparat eine Einrichtung, vermöge deren beide Platten gleichzeitig durch einen Mechanismus gedreht werden können, und zwar so, dass die durch die Ueberkreuzungsstelle gehende Fernrohraxe immer Halbirungslinie des Winkels ($b'dc$ Fig. 96) zwischen beiden Platten ist. Drehte sich also z. B. der Punkt c nach vorn und links, so drehte sich vermöge des Mechanismus b' um eben so viel nach vorn und rechts, und umgekehrt. Sieht man durch das so vorgerichtete Fernrohr nach einem leuchtenden Punkte a (Fig. 96), während die beiden Platten irgend einen von Null verschiedenen Winkel bilden, so sieht man den Punkt doppelt, und keines der beiden Bilder liegt in der Axe des Fernrohres, vielmehr das eine links, das andere rechts davon. Die Hälfte des Strahlenbündels nämlich, welche durch die obere Platte und nachher durch die obere Hälfte des Objectivs gegangen ist, formirt ein Bild da, wo der conjungirte Vereinigungspunkt zu a' liegt. Die andere Hälfte des Strahlenbündels formirt ein Bild in dem conjungirten Vereinigungspunkte zu a''. Setzt man statt des Punktes a ein von rechts nach links ausgedehntes Object in den Focus des Fernrohres, so sieht man davon ebenfalls zwei Bilder, die sich vielleicht theilweise decken. Verkleinert man den Winkel $b'dc$ zwischen den Glasplatten, so rücken nach der obigen Erörterung die Bilder seitlich aus einander, und wenn das Object keine zu grosse Ausdehnung hat, kann man es dahin bringen, dass sich beide nur noch mit den Rändern berühren; dann beträgt also die Verschiebung von a' gegen a in der zur Fernrohraxe senkrechten Ebene gemessen gerade die halbe Breite des Objects. Da diese Verschiebung aber, wie wir sahen, von dem Winkel zwischen dem Strahlenbündel und der Glasplatte abhängt, so kann man umgekehrt unter sonst bekannten Verhältnissen aus diesem Winkel die Verschiebung und folglich in dem hier gedachten Falle die halbe Breite des Objects berechnen. Der Winkel, dessen Grösse zu diesem Ende bekannt sein muss, ist bekannt durch den Winkel, um den man die Glasplatten drehen musste, bis sich die Ränder der beiden Bilder des Objects gerade deckten. Diese Einstellung kann aber offenbar geschehen, ohne dass kleine Bewegungen des Objects störend wirken.

Eine leicht einzusehende Eigenthümlichkeit des Instruments, welche die Berechnungen wesentlich vereinfacht, besteht darin, dass die schein-

bare seitliche Verschiebung (aa' oder aa'' in der Figur) linear ausgedrückt von der Entfernung des Punktes a von den Glasplatten, resp. dem Fernrohr unabhängig ist. Mit anderen Worten, jedem bestimmten Winkel zwischen den planparallelen Platten entspricht eine bestimmte in Millimetern ausdrückbare Verschiebung des Punktes a. Man kann sich also von vornherein eine Tabelle entwerfen (sei es durch Rechnung, sei es empirisch), welche für jeden Werth jenes Winkels Grad für Grad die lineare Verschiebung oder sogleich ihren doppelten Werth giebt. Stellt man nun das Instrument richtig justirt vor ein Auge, an dessen Cornea sich ein geeignetes helles Object spiegelt — z. B. Lichtflammen, deren Verbindungslinie zur Richtung der Axe des Glasplattenpaares senkrecht steht — und fängt an die Glasplatten zu drehen, so wird man zwei Paare von Flammenbildchen in einer geraden Linie sehen. Man dreht so lange bis die beiden mittleren Flammenbilder in eines zusammenfallen. Den Winkel, welchen alsdann die Glasplatten mit einander bilden, liest man an den Theilungen des Instruments ab und kann aus der vorläufig entworfenen Tabelle nunmehr sogleich den absoluten linearen Werth des Spiegelbildes entnehmen, das die Hornhautfläche von dem Abstande der beiden Lichtflammen von einander entwirft, denn dies Spiegelbild ist das Doppelte der scheinbaren Verschiebung, die jede Glasplatte in der betreffenden Stellung an jedem leuchtenden Punkte hervorbringt, die Entfernung des Instruments vom beobachteten Auge mag sein, welche sie will.

Man wählt der Bequemlichkeit und Sicherheit der Beobachtung wegen gemeiniglich nur kleine Entfernungen. Das Fernrohr muss daher auf solche einstellbar sein. Da nun aber die gewöhnlichen achromatischen Fernrohrobjective auf parallelstrahlige Bündel berechnet sind und schlechte Bilder geben, wenn sehr divergente Bündel darauf fallen, so combinirte Helmholtz in seinem Instrumente zwei solche Objective zu einem Objectivsystem. Steht dann das Object ungefähr in der Brennebene des ersten Objectivs, so macht es die Strahlenbündel parallel und das zweite sammelt sie in seiner Brennebene. Gilt es auf weite Entfernungen einzustellen, so wird das eine Objectiv aus dem Instrumente entfernt.

Fünftes Capitel.

Astigmatische Brechung homocentrischer Strahlenbündel.

Um den Gang sehr schräg ins Auge fallender Strahlenbündel einerseits und andererseits den Gang senkrecht einfallender Bündel unter Berücksichtigung der Abweichung der Flächen von genau drehrunder

Gestalt beurtheilen zu können, muss man zu einem allgemeineren Princip der Dioptrik aufsteigen als das ist, was den Erörterungen der vorigen Paragraphen zu Grunde lag.

Dies allgemeinere Princip, nach seinem Entdecker das Malus'sche genannt, sagt aus: Ein homocentrisches Strahlenbündel behält nach einer beliebigen Anzahl von Brechungen an stetig gekrümmten Flächen, welche lauter einfach brechende Medien von einander trennen, die ursprüngliche Eigenschaft bei, dass alle seine Strahlen auf einer stetig gekrümmten Fläche der sogenannten Wellenfläche senkrecht stehen. Beschränkt man die Betrachtung auf ein unendlich dünnes Strahlenbündel, so kommt von der Wellenfläche auch nur ein unendlich kleines Stückchen in Betracht. Nun kann man einem solchen Stückchen jeder beliebigen krummen Fläche die Scheitelgegend desjenigen Paraboloides ohne merklichen Fehler substituiren, das sich in dem betrachteten Punkte der Fläche am nächsten anschmiegt — des sogenannten osculirenden Paraboloides. Dieser Satz entspricht in der analytischen Geometrie des Raumes dem bekannten Satze der ebenen Geometrie, dass man jedes unendlich kleine Stückchen einer beliebigen Curve ersetzen kann durch ein unendlich kleines Stückchen des an dem betrachteten Punkte die Curve berührenden Kreises.

Man kann hiernach von einem sehr dünnen Strahlenbündel, welches durch beliebig viele Brechungen an beliebig gekrümmten Flächen aus einem ursprünglich homocentrischen hervorgegangen ist, eine ganz allgemeine wichtige Eigenschaft von vornherein angeben. Seine sämmtlichen Strahlen nämlich müssen nothwendig Normalen sein für die Punkte der Scheitelgegend eines Paraboloides. Die Durchschnittspunkte je zweier benachbarter Strahlen des Bündels bilden eine sogenannte Brennfläche. Sie wird so genannt, weil auf ihr das Bündel die grösste Erleuchtung hervorbringt. Diese Durchschnittspunkte sind nach ihrer Definition die Krümmungsmittelpunkte für die Punkte des Paraboloides und die Brennfläche ist also im Sinne der analytischen Geometrie des Raumes die Krümmungsmittelpunktsfläche für die Scheitelgegend des Paraboloides. Von der Gestalt dieser Fläche lässt sich nicht leicht eine Gesammtanschauung bilden. Es soll hier nur eine Eigenschaft dieser Fläche hervorgehoben werden, ohne Beweis freilich, da dieser allzu weit gehende Entwickelungen erfordern würde.

Jede durch die Axe des Paraboloides gelegte Ebene schneidet dasselbe in einer Parabel und unter dieser ist natürlich eine von kleinstem und eine von grösstem Parameter. Es steht nun allemal die Ebene der Parabel von kleinstem Parameter (grösster Krümmung am Scheitel) zur Ebene der Parabel von grösstem Parameter (kleinster Krümmung am Scheitel) senkrecht. Beiläufig bemerkt kann die Parabel kleinster Krümmung auch eine gerade Linie sein oder es kann in der einen Ebene sogar die Krümmung nach der entgegengesetzten Seite concaver sein als in der anderen. Die beiden Schnitte mit minimaler und maximaler Krümmung wollen wir die beiden „Hauptschnitte" nennen. In jedem

dieser Hauptschnitte hat nun die Krümmungsmittelpunktsfläche eine Kante, die selbst auch parabolisch gekrümmt ist. Da aber hier von der ganzen Fläche nur ein sehr kleines Stück in Betracht kommt, so kann man es als ein kleines gerades Linienstück ansehen.

Man kann somit folgenden ganz allgemein gültigen Satz aussprechen: Ein durch beliebige Brechungen aus einem homocentrischen hervorgegangenes sehr dünnes Strahlenbündel ist an zwei Stellen seines Verlaufes zusammengedrängt auf kleine gerade Linienstücke, die einander im Raume senkrecht überkreuzen und die wir Brennlinien nennen wollen. An den Orten dieser Linienstückchen bringt das Bündel die grösste Erleuchtung hervor und sie können also gewissermaassen als Stellvertreter des Bildpunktes betrachtet werden, der bei nahezu axialem Durchgange durch ein System sphärischer Flächen entsteht. In der That kann ja unter Umständen die vorstehend charakterisirte astigmatische Brechung eine sehr annähernd genaue optische Abbildung eines Gegenstandes bewirken. Sei dieser z. B. eine Reihe von leuchtenden Punkten, also eine leuchtende gerade Linie oder eine Anzahl solcher, die parallel verlaufen zur Richtung der ersten Brennlinie der von den einzelnen leuchtenden Punkten ausgehenden astigmatisch gebrochenen Bündel, so wird auf einem in richtige Lage gestellten Schirme eine Lichtprojection entstehen, welche wie ein ganz genaues optisches Bild des Systems leuchtender Parallellinien aussieht. Die den einzelnen leuchtenden Punkten entsprechenden Strichelchen setzen sich nämlich einander theilweise deckend zu einem ebenso starken Strich zusammen, als ob jedem Punkte nur ein Punkt entspräche. Kommen aber im abzubildenden Gegenstande anders gerichtete Grenzen zwischen Hell und Dunkel vor, so ist die entsprechende Grenze im Bilde mehr oder weniger verwaschen.

Es soll nun, nachdem die Existenz der Brennlinien allgemein festgestellt ist, ihre Lage auf elementargeometrischem Wege bestimmt werden für den einfachsten Fall der astigmatischen Brechung eines sehr dünnen Bündels, nämlich seines schiefen Durchganges durch eine kugelförmige Trennungsfläche.

Sei in Fig. 97 M der leuchtende Punkt, C der Mittelpunkt der Kugelfläche, welche die beiden brechenden Medien von einander trennt, A der Einfallspunkt des mittelsten Strahles des in Betracht gezogenen von M ausgesandten sehr dünnen Bündels. Da nun die Ebene der Zeichnung das Strahlenbündel in zwei symmetrische Hälften theilt, so muss sie offenbar eine Hauptschnittsebene der Wellenfläche sein und muss also selbst eine der Brennlinien enthalten, während die andere auf ihr senkrecht steht. Um also in ihr die Mittelpunkte der beiden Brennlinien zu finden, brauchen wir nur die Durchschnittspunkte einiger unendlich nahe benachbarter Strahlen zu suchen, denn sie werden die Orte der grössten Strahlenconcentration bezeichnen.

Wir suchen zunächst den Durchschnittspunkt des Strahles MA mit seinen nächsten Nachbarn in der Ebene der Zeichnung selbst, diese

Strahlen müssen sich in der That schneiden, da sie nach der Brechung in der Ebene der Zeichnung — ihrer Einfallsebene — verbleiben. Der Strahl MA, den wir den „Leitstrahl“ des Bündels nennen wollen, bildet mit dem Einfallslothe CK den Einfallswinkel MAK, der mit φ bezeichnet werde. Nennen wir n den Brechungsindex für den Uebergang aus dem ersten Medium in das zweite, dann wird der Brechungswinkel $CAF_1 = \psi$ gegeben sein durch die Gleichung $sin\,\varphi = n\ sin\,\psi$. Es sei nun MB ein zweiter unendlich benachbarter Strahl in der Ebene der Zeichnung. Sein Einfallswinkel $MBL = CBH$ heisse φ^1 und sein Brechungswinkel $\psi^1 = CBF_1$, dann muss ebenso $sin\,\varphi^1 = n\,sin\,\psi^1$ sein. Der Durchschnittspunkt F_1 beider gebrochenen Strahlen wird also der Mittelpunkt der einen Brennlinie sein müssen und zwar offenbar derjenigen, die auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht. Es gilt

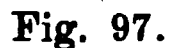
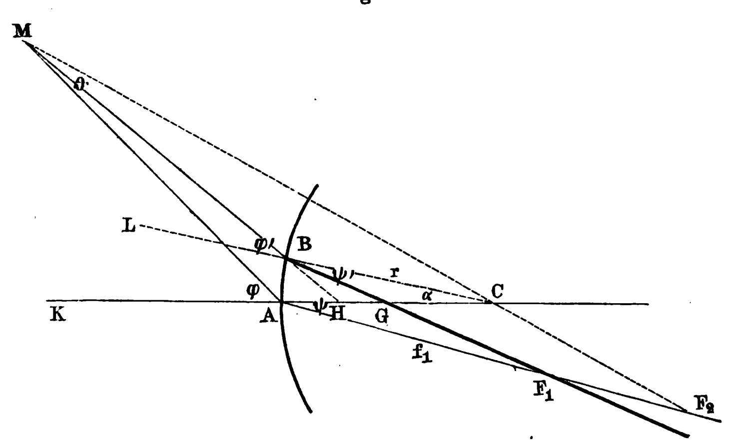


Fig. 97.



nun den Abstand $F_1 A$, den wir f_1 nennen wollen, mit dem auf dem Leitstrahle gemessenen Abstande MA, der mit e bezeichnet werden soll, in Beziehung zu setzen. Wir betrachten zu diesem Ende das Dreieck $F_1 A G$. Ein Winkel desselben ist ψ und ein zweiter Winkel desselben, AGF_1, ergänzt den Winkel $CGF_1 = \alpha + \psi^1$ zu zwei Rechten, unter α ist dabei der sehr kleine Winkel BCA verstanden, welchen die Einfallslothe der beiden betrachteten Strahlen mit einander bilden. Der dritte der Seite AG gegenüber liegende Winkel GF_1A ist also $\psi_1 + \alpha - \psi$ und man hat daher:

$$f_1 = AG\,\frac{sin\,(\psi^1 + \alpha)}{sin\,(\psi^1 + \alpha - \psi)},$$

AG ist aber, wenn man den Radius der Kugel mit r bezeichnet, $= r - CG$. Nun ist unter Berücksichtigung der Winkel ψ^1 und α im Dreieck BCG die Linie:

$$C G = r \frac{\sin \psi^1}{\sin(\psi^1 + \alpha)},$$

also:

$$A G = r - r \frac{\sin \psi^1}{\sin(\psi^1 + \alpha)}$$

und

$$f_1 = r \frac{\sin(\psi^1 + \alpha) - \sin \psi^1}{\sin(\psi^1 + \alpha - \psi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Andererseits hat man aus der Betrachtung des Dreiecks MAH, in welchem der Winkel $MHA = \varphi^1 + \alpha$ und folglich der Winkel $AMH = \varphi - \varphi^1 - \alpha$ ist:

$$e = AH \cdot \frac{\sin(\varphi^1 + \alpha)}{\sin(\varphi - \varphi^1 - \alpha)}.$$

Es ist aber $AH = r - CH$ und CH als Seite im Dreieck BCH:

$$= \frac{r \,.\, \sin \varphi^1}{\sin(\varphi' + \alpha)},$$

so dass man hat:

$$e = r \frac{\sin(\varphi^1 + \alpha) - \sin \varphi^1}{\sin(\varphi - \varphi^1 - \alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Beachtet man, dass α ein sehr kleiner Winkel ist und dass man daher

$$\sin \alpha = \alpha; \quad \cos \alpha = 1, \quad \text{sowie} \quad \alpha^2 = 0$$

setzen darf, so lässt sich aus Gleichung (1) leicht $\sin \psi^1$, und aus (2) φ^1 ausdrücken. Nämlich es findet sich:

$$\sin^2 \psi^1 = \sin \psi \cdot \frac{f_1 \sin \psi + 2\alpha(r - f_1 \cos \psi)}{f_1 + 2 r \alpha \sin \psi},$$

$$\sin^2 \varphi^1 = \sin \varphi \cdot \frac{e \sin \varphi - 2\alpha(r + e \cos \varphi)}{e - 2 r \alpha \sin \varphi}.$$

Nimmt man hierzu noch die dritte Gleichung dem Brechungsgesetze entsprechend $\sin^2 \varphi^1 = n^2 \sin^2 \psi^1$, so lassen sich $\sin \varphi^1$ und $\sin \psi^1$ eliminiren und man erhält:

$$\sin \varphi \frac{e \sin \varphi - 2\alpha(r + e \cos \varphi)}{e - 2 \alpha r \sin \varphi} = n^2 \sin \psi \frac{f_1 \sin \psi + 2\alpha(r - f_1 \cos \psi)}{f_1 + 2 \alpha r \sin \psi}.$$

Löst man sie nach f_1 und lässt die Glieder mit α^2 weg, so fällt α selbst auch heraus und man hat:

$$f_1 = \frac{\frac{r}{n}(n^2 - \sin^2 \varphi)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \cos \varphi - \frac{r}{e} \cos^2 \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Wenn man also für ein dünnes Strahlenbündel den Ausgangspunkt M und den Einfallswinkel φ seines Leitstrahles kennt, so hat man die Lage der ersten Brenn- oder Bildlinie, denn man kann den gebrochenen Leitstrahl durch die Beziehung $\sin \varphi = n \sin \psi$ construiren, auf dem man dann vom Einfallspunkte an die soeben gefundene Länge f_1 abzumessen hat.

Um den Mittelpunkt der zweiten Bildlinie zu finden, muss man diejenigen Strahlen betrachten, welche in einer zur Zeichnung senkrechten Ebene unendlich nahe dem Leitstrahle MA einfallen. Zwei solche symmetrisch zu beiden Seiten der Zeichnungsebene liegende Strahlen schneiden zwar den gebrochenen Leitstrahl selbst nicht, da ihre Einfallsebenen andere sind, wohl aber müssen sie sich, vermöge ihrer symmetrischen Lage, unter einander schneiden, und zwar muss der Durchschnittspunkt in der Durchschnittslinie MC ihrer beiden Einfallsebenen liegen. Wir können mithin diesen Durchschnittspunkt, da die beiden betrachteten Strahlen zu AF_1 unendlich benachbart sind, ohne merklichen Fehler in den Durchschnittspunkt F_2 des Strahles AF_1 mit jener Linie AC setzen und hätten also in F_2 den Mittelpunkt der zweiten Bildlinie.

Um den Abstand des Punktes F_2 von A, der mit f_2 bezeichnet werden mag, zu finden, betrachten wir das Dreieck ACF_2, worin

$$r = f_2 \cdot \frac{\sin(\vartheta - \psi)}{\sin\vartheta} = f_2 (\cos\psi - \operatorname{cotg}\vartheta \sin\psi),$$

wenn man den Winkel MCA mit ϑ bezeichnet. Ferner ergiebt die Betrachtung des Dreiecks MCA:

$$r = e \cdot \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{\sin\vartheta} = e(\sin\varphi \operatorname{cotg}\vartheta - \cos\varphi).$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\operatorname{cotg}\vartheta$ und löst nach f_2, so ergiebt sich:

$$f_2 = \frac{nr}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi - \frac{r}{e}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) geben die Lösung der gestellten Aufgabe. Für ein sehr kleines φ muss offenbar $f_1 = f_2$ werden und es muss sich der Bild p u n k t abstand für annähernd senkrechten Einfall eines dünnen Strahlenbündels ergeben. Dies ist in der That der Fall, denn es wird, da für ein sehr kleines φ $\sin^2\varphi = 0$; $\cos\varphi = 1$ zu setzen ist, sowohl f_1 in Gleichung (3) als f_2 in Gleichung (4):

$$f_1 = f_2 = \frac{nre}{(n-1)e - r}.$$

Fällt das schief durch eine brechende Kugelfläche gegangene Bündel auf eine zweite, so muss die S. 320 definirte Eigenschaft auch nach der zweiten Brechung erhalten bleiben, es muss also auch nach der zweiten Brechung an zwei Stellen maximale Concentration auf Bildlinien stattfinden. Ihre Lage auf dem gebrochenen Leitstrahl kann man offenbar bestimmen, indem man die Formeln (3) und (4) wiederholt anwendet und zwar hat man zur Bestimmung des neuen f_1 in die Gleichung (3) als Objectabstand den Abstand des Punktes F_1 von der zweiten Fläche einzusetzen, da es sich ja handelt um den Durchschnittspunkt der in einem Hauptschnitte enthaltenen Strahlen. Zur Bestimmung des neuen f_2 hat man aus demselben Grunde in die Gleichung (4) den Abstand des

Punktes F_2 von der zweiten Fläche als Werth für e einzusetzen. Wenn die Punkte F_1 und F_2 schon hinter der zweiten Fläche liegen, gehen natürlich ihre Abstände von derselben mit negativem Vorzeichen in die Rechnung ein.

Durch successive Fortsetzung dieses Verfahrens kann man die Bildlinien für ein Strahlenbündel berechnen, welches beliebig viele Brechungen erlitten hat. Wendet man es auf ein emmetropisch gedachtes schematisches Auge an, so ergiebt sich, dass die hinteren Bildlinien für seitlich gelegene unendlich ferne Objectpunkte sehr nahe in die Netzhautfläche fallen.

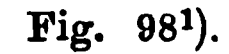
Weitere allgemeine Entwickelungen aus den dargestellten Principien, deren eingehende Behandlung hier nicht möglich ist, haben gezeigt, dass beim schiefen Durchgang durch ein System von vielen kugeligen Trennungsflächen die beiden Bildlinien desselben dünnen Bündels weniger weit aus einander liegen als beim Durchgang durch bloss eine Fläche. Man hat daher vermuthet, dass die Zusammensetzung der Linse aus vielen Schichten von verschiedenem Brechungsindex eines von den Mitteln ist, um die Abbildung seitlich gelegener Objecte vollkommener zu machen oder die „Periskopie" des Auges zu erhöhen[1]).

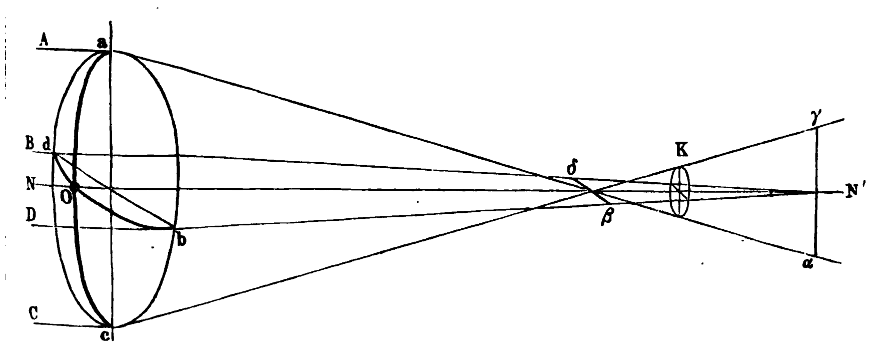
Viel leichter zu behandeln ist die astigmatische Brechung an einer nicht genau kugeligen Fläche bei nahezu senkrechtem Einfall des Bündels auf ihren Scheitel. Dieser Fall ist deswegen von physiologischem Interesse, weil darauf der auch bei axialem Einfalle der Strahlen merkliche Astigmatismus des Auges zurückzuführen ist. Es mag daher dieser Fall hier noch kurz besprochen werden.

Wir wollen uns eine beliebig gestaltete krumme Oberfläche denken. Sie trenne Luft von einem stärker brechenden durchsichtigen Körper, etwa Glas oder Wasser. Aus dieser Fläche grenzen wir uns jetzt mit der ringförmig in sich zurücklaufenden Linie *abcd*, in Fig. 98, ein verhältnissmässig kleines Stück ab, dessen Mittelpunkt O sei. Das Wort verhältnissmässig klein bezieht sich auf den Krümmungshalbmesser und bedeutet also, dass das in Betracht gezogene Stück der Fläche in keiner Richtung einen grossen Winkel am Krümmungsmittelpunkte umspannt. Unser Flächenstück könnte nun, wenn wir die Untersuchung in möglichst allgemeiner Weise führen wollten, unter anderen auch so gedacht werden, dass es nach derselben Seite in einer Richtung convex, in der anderen concav wäre, wie z. B. ein sattelförmiges Flächenstück. Von diesem Falle soll aber hier abgesehen werden. Wir denken uns das Flächenstück in allen Richtungen nach links convex und nehmen zugleich an, dass auf seiner linken Seite Luft, auf seiner rechten das stärker brechende Medium liege. Wir ziehen nun durch den Mittelpunkt O unseres Flächenstückes die Normale dazu, sie sei $N'N$. Legt man jetzt durch die Normale be-

[1]) Die vorstehenden Entwickelungen sind den Arbeiten L. Hermann's über schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Kugelflächen entlehnt.

liebige Ebenen, die wir Meridianebenen nennen wollen, so schneiden sie das Flächenstück sämmtlich in Curven, die nach links convex sind. Die Grösse ihrer Krümmung ist aber verschieden in den verschiedenen Meridianen. Man kann ganz allgemein geometrisch nachweisen, dass der Meridian grösster und der Meridian kleinster Krümmung auf einander senkrecht stehen. In der Figur sei beispielsweise aOc der Meridian grösster und bOd der Meridian kleinster Krümmung. Es falle nun auf unser Flächenstück von links her also in der Luft ein homocentrisches Strahlenbündel, dessen Centrum im Verhältniss zu den Abmessungen des Flächenstückes weit absteht. Dann ist bei der verhältnissmässigen Kleinheit unseres Flächenstückes die obige Bedingung erfüllt, dass kein Strahl mit seinem betreffenden Einfallslothe einen beträchtlichen Winkel einschliesst, so wie nur noch weiter angenommen wird, dass der auf O treffende Strahl des Bündels mit s e i n e m Einfallslothe, d. h. mit der Nor-


Fig. 98[1]).



male ON, einen kleinen Winkel einschliesst. In unserem Beispiele wollen wir geradezu annehmen, dass ein Strahl des Bündels die Richtung der Normale selbst hat und dass die übrigen ihm parallel seien. Es sind also die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, NO fünf Strahlen des einfallenden Bündels.

Wir haben eben gesehen, dass aus einem homocentrischen Strahlenbündel von der beschriebenen Beschaffenheit nach der Brechung an unserem Flächenstücke, d. h. also in dem Medium rechts von demselben, ein Strahlenbündel eigenthümlicher Form wird, die sich folgendermaassen charakterisiren lässt: In der Meridianebene stärkster und in der Meridianebene schwächster Krümmung lässt sich eine begrenzte gerade Linie angeben, jede senkrecht auf der Normalen NN', und die in der Meridianebene stärkster Krümmung weiter von der brechenden Fläche entfernt als die andere. Jeder Strahl des durch Brechung entstehenden neuen Bündels geht nun durch einen Punkt der einen und der anderen geraden Linie. Dadurch ist die Lage aller Strahlen vollständig gegeben, sowie

[1]) Diese Figur kann auch als Darstellung eines schief auf eine Kugelfläche fallenden Strahlenbündels dienen.

nur die Lagen der beiden geraden Linien, die man „Bildlinien" nennt, gegeben sind. In unserem Beispiele sei $\alpha\gamma$ die eine und $\beta\delta$ die andere Bildlinie ($\beta\delta$ ist senkrecht auf der Ebene des Papiers zu denken). Zwischen den beiden Bildlinien auf der sogenannten Brennstrecke giebt es eine Stelle, siehe K in Fig. 98, wo das Strahlenbündel einen kreisförmigen Querschnitt hat. Sonst sind alle Querschnitte des Strahlenbündels elliptisch.

Ueber die Lage und Grösse der Bildlinien lassen sich noch folgende Regeln ableiten. Die vordere (näher an der Fläche gelegene) Bildlinie liegt in der Meridianebene schwächster, die hintere in der Meridianebene stärkster Krümmung. Die vordere Bildlinie ist stets kürzer als die hintere. Die Abstände beider Bildlinien von dem kreisförmigen Querschnitte des Strahlenbündels stehen in demselben Verhältnisse wie ihre Längen, es liegt also der kreisförmige Querschnitt des Bündels nicht in der Mitte der Brennstrecke, sondern stets der vorderen Bildlinie näher.

Eine nicht kugelförmige Trennungsfläche entwirft daher nicht von leuchtenden Punkten optische Bilder im engeren Sinne des Wortes. Man kann aber den Ausdruck Bild eines leuchtenden Punktes mit einiger Berechtigung verallgemeinern auf die Stelle, wo die von jenem Punkte ausgegangenen Strahlen nach der Brechung am concentrirtesten sind. Solcher Stellen haben wir aber hier zwei für jedes Strahlenbündel, nämlich die beiden Bildlinien, die übrigens, wenn die Krümmung der Fläche in den verschiedenen Meridianebenen nicht sehr verschiedene Werthe hat, nahe an einander liegen. Die Brennstrecke ist alsdann eben sehr kurz. Man kann also einen Bild auffangenden Schirm jetzt an zwei Stellen aufstellen und erhält beide Male von dem leuchtenden Punkte ein kleines linienförmiges Bild ohne Zerstreuungskreis. Es ist kein Grund vorhanden, einer dieser Stellen den Vorzug zu geben. Befinden sich im ersten Medium mehrere leuchtende Punkte in einer zur Axe (der Normalen NN', Fig. 98) senkrechten Ebene, so wird man auf einem Schirm, der im zweiten Medium an der einen oder anderen Stelle aufgestellt ist, ein entsprechendes Aggregat kleiner beleuchteter Linien wahrnehmen, die eine Art von optischem Bilde des zusammengesetzten Objects darstellen. In gewissen Fällen kann ein solches dieselbe Schärfe darbieten wie ein wirkliches von sphärischen Flächen geliefertes Bild, das Punkt für Punkt dem Objecte entspricht. Nehmen wir nämlich beispielsweise an, das Object bestehe in einer geraden Reihe leuchtender Punkte, d. h. einer leuchtenden Linie parallel der Meridianebene schwächster Krümmung. Stellen wir nun einen Schirm im zweiten Medium in der Entfernung auf, wo die vorderen Brennlinien der Strahlenbündel liegen, welche von den Punkten unserer Objectlinie ausgehen. Dann wird die Lichtprojection auf diesem Schirm wie das Object eine gerade Linie sein in der Richtung der Objectlinie und ebenso scharf gezeichnet wie diese selbst, denn alle Bildlinien, welche den einzelnen Punkten des Objects angehören, fallen in die Ebene des Meridians schwächster

Krümmung und mithin in der Richtung der Objectlinie, in welcher sie sich an einander reihen zu einer einzigen geraden Linie. Wie eine einzige solche Gerade wird aber auch ein noch mehr zusammengesetztes Object auf demselben Schirm genau abgebildet werden, wenn es aus lauter Linien besteht, die zur Meridianebene schwächster Krümmung parallel sind. Sind die Linien im Objecte parallel zur Meridianebene stärkster Krümmung, so werden sie ebenso scharf abgebildet auf einem Schirm, den man da aufstellt, wo die hinteren Bildlinien der einzelnen Strahlenbündel entstehen.

Ueber den Abstand der Brennstrecke von der brechenden Fläche und seine Beziehung zum Abstande des leuchtenden Punktes, der das zur Brennstrecke convergirende Strahlenbündel liefert, gelten ähnliche Regeln wie über die Beziehung zwischen conjungirten Vereinigungsweiten bei sphärischen Flächen. Es ist natürlich auch hier wieder, wofern bloss von reellen Objectpunkten die Rede ist, die Brennstrecke am nächsten an der brechenden Fläche, wenn der leuchtende Punkt in unendlicher Ferne liegt. Zugleich sind in diesem Falle die Brennstrecke und die Bildlinien am kürzesten. Rückt nun der leuchtende Punkt aus unendlicher Ferne an die brechende Fläche heran, so rückt die Brennstrecke von derselben weg, und zwar anfangs langsam, dann immer schneller und schneller, wenn man den leuchtenden Punkt mit constanter Geschwindigkeit bewegt denkt. Die Brennstrecke wird dabei selbst immer länger und länger, was man auch so ausdrücken kann, dass die hintere Brennlinie rascher nach hinten rückt als die vordere. Die hintere Bildlinie wird schon in unendliche Ferne hinausgerückt sein, wenn sich die vordere noch in endlichem Abstande befindet. Der leuchtende Punkt muss sich alsdann in einer gewissen Ebene vor der leuchtenden Fläche befinden, die sich allenfalls der vorderen Hauptbrennebene einer sphärischen Trennungsfläche vergleichen liesse. Jedoch müsste man hier noch eine zweite Ebene in die Analogie hineinziehen, nämlich diejenige, in welcher sich der leuchtende Punkt befinden muss, wenn zuletzt auch die vordere Bildlinie in unendlicher Ferne liegt. Bei dieser Lage des leuchtenden Punktes werden natürlich die Strahlen des Bündels, welche auf die Meridianebene schwächster Krümmung fallen, schon divergent im zweiten Medium verlaufen, und die hintere Brennlinie liegt dann virtuell im ersten Medium vor der Fläche. Je grösser die Brennstrecke ist, desto länger wird auch jede der beiden Bildlinien selbst.

Je näher also der leuchtende Punkt an der brechenden Fläche liegt, um so weiter ist die Brennstrecke von derselben entfernt, um so länger ist sie selbst und um so länger sind die beiden Bildlinien.

Die vorstehend entwickelten allgemeinen Sätze gelten auch für ein System von mehreren brechenden Flächen, unter denen eine oder mehrere von der Kugelgestalt derart abweichen, dass ihre Krümmung in verschiedenen Meridianen verschieden ist. Beiläufig bemerkt, hat auch ein System vollkommen kugeliger Flächen, wenn dieselben nicht centrirt sind,

ähnliche dioptrische Wirkung. Es wird also namentlich in solchen Systemen jedes homocentrisch einfallende Strahlenbündel in ein Bündel verwandelt, das an zwei hinter einander liegenden Stellen auf eine gerade Linie concentrirt ist, und zwar überkreuzen sich diese beiden Geraden senkrecht. Die Lage der Bildlinien im einzelnen Falle anzugeben, wird freilich manchmal grosse Schwierigkeiten haben, und selbst die Meridianebenen, in welchen die beiden Bildlinien liegen, können nicht einfach bestimmt werden, so wie nicht die Meridianebenen grösster und kleinster Krümmung für alle Flächen des Systems zusammenfallen.

Man kann sich sehr leicht ein brechendes System der beschriebenen Art herstellen, woran man sich die sämmtlichen vorstehend entwickelten Lehren schön anschaulich machen kann. Man schneidet nämlich aus einem Flaschenbauche, der in senkrechter Richtung schwächer gekrümmt ist als in wagerechter, ein kleines kreisförmig begrenztes Stück heraus, kittet es mit dem Rande auf ein ebenes Glasstück und füllt den Zwischenraum mit Wasser oder Terpentinöl. Man hat alsdann eine „astigmatische“ Linse, vor welcher man leuchtende Punkte und Linien aufstellen kann. Die austretenden Strahlenbündel fängt man auf weissen Papierschirmen auf und kann bequem die Form der Lichtprojection bei jeder beliebigen Entfernung des Objects und des Schirmes studiren. Natürlich müssen die einfallenden Strahlen stets durch ein Diaphragma mit ziemlich kleiner kreisförmiger Oeffnung gehörig beschränkt werden.

Sehr lehrreich dürfte dieser kleine Apparat namentlich für den ophthalmologischen Unterricht sein, indem man damit die Correction des Astigmatismus durch Cylindergläser aufs anschaulichste demonstriren kann. Dies ist freilich auch wohl möglich, indem man eine Kugellinse erst durch eine Cylinderlinse astigmatisch macht und dann durch eine andere corrigirt. Dies versinnlicht aber doch nicht so unmittelbar den Hergang der Sache im Auge, als wenn der Astigmatismus durch die Abweichung einer brechenden Fläche von der Kugelgestalt bedingt ist, wie dies ja im Auge selbst ebensowohl der Fall ist.

Sechstes Capitel.

Vom Maasse der Stärke dioptrischer Vorrichtungen.

Es ist besonders für die praktische Ophthalmologie ein Bedürfniss, die Refractionszustände verschiedener Augen oder desselben Auges zu verschiedenen Zeiten etc. quantitativ genau zu vergleichen und daher ein Princip zu haben, wonach man diese Zustände in Zahlen darstellen kann. Ein solches Princip kann natürlich nur conventionell festgestellt werden, und es liessen sich sehr verschiedene denken, die alle in abstracto ihrem

Zwecke entsprechen. Der Vorzug des einen oder des anderen kann nur bestehen in der Bequemlichkeit der Handhabung und der Einfachheit des Ueberblickes, den es gewährt. Donders hat ein solches Princip[1]), das seither durch stillschweigendes Uebereinkommen von allen Ophthalmologen angenommen ist.

Das Donders'sche Maassprincip ist zunächst für Linsen gültig und lautet einfach dahin, dass die Stärke einer Linse zu messen ist durch den reciproken Werth ihrer Brennweite[2]), die dabei algebraisch in Rechnung zu bringen ist, d. h. positiv bei einer Sammellinse, negativ bei einer Zerstreuungslinse. Dass der reciproke Werth der Brennweite alle Eigenschaften besitzt, die man an ein Maass für die „Stärke" einer Linse stellen kann, ist leicht zu sehen. In der That wird man diese Stärke um so grösser nennen, je weiter die Linse im Allgemeinen Strahlen von ihrer ursprünglichen Richtung ablenkt, und offenbar lenkt nun eine Linse von kleinerer Brennweite Strahlen mehr ab als eine von grösserer Brennweite; dem entsprechend ist aber das Maass der Stärke für erstere nach unserem Principe grösser als für letztere. Ueberdies lässt das Maass durch sein algebraisches Vorzeichen erkennen, in welchem Sinne die Strahlen abgelenkt werden. Das positive Vorzeichen deutet an, dass die Strahlen eines homocentrischen Bündels gesammelt, das negative, dass sie zerstreut werden. Der reciproke Werth der Brennweite ist aber durchaus nicht die einzige mathematische Grösse, welche diese Eigenschaften hat, beispielsweise hätte eins, dividirt durch jede beliebige ungerade Potenz der Brennweite, dieselben Eigenschaften. Es ist daher dennoch willkürlich und rein conventionell, wenn der reciproke Werth der Brennweite als Maas für die Stärke einer Linse festgesetzt wird.

Ein höchst bemerkenswerther Vorzug des vorstehend definirten Maassprincipes, den es vor allen sonst möglichen voraus hat, besteht in Folgendem: Legt man zwei Linsen derart zusammen, dass man ihren in der gemeinsamen Axenrichtung gemessenen Abstand gegen alle sonst in Betracht kommenden Entfernungen vernachlässigen darf, so ist die Stärke des Systems nach demselben Principe gemessen einfach die algebraische Summe der Stärkenwerthe der beiden Linsen. Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar aus den ersten Grundsätzen der Dioptrik. Denken wir uns zwei Linsen mit den Brennweiten f und f' dicht an einander gelegt und fragen, wie weit hinter der zweiten ein parallelstrahliges Bündel vereinigt wird, das auf die erste auffällt und beide passirt? Wäre die erste allein vorhanden, so würde es in der Entfernung f von ihr zur Vereinigung kommen; es fällt somit auf die zweite Linse ein nicht mehr parallelstrahliges Bündel auf, dessen Vereinigungspunkt auch von ihr,

---

[1]) Schon vorher ist in der ersten Auflage dieses Werkes (siehe §. 218) bezüglich der Accommodation des Auges eine Betrachtung angestellt, die das später von Donders vorgeschlagene Maassprincip implicite enthält.

[2]) Der Quotient der Einheit dividirt durch die Brennweite.

da wir den Abstand zwischen beiden Linsen vernachlässigen, um die Länge f entfernt ist. Wir haben also nur die zu dieser Entfernung für die zweite Linse conjungirte Vereinigungsweite zu suchen, die mit x bezeichnet sein mag, um zu wissen, wo ein parallelstrahliges Bündel nach der Brechung durch beide Linsen zur Vereinigung kommt. Dabei ist aber f mit dem entgegengesetzten Vorzeichen von dem in Rechnung zu bringen, welches es als Brennweite der ersten Linse hat. Ist nämlich die erste Linse collectiv und ihre Brennweite positiv, so liegt das Centrum des auf die zweite Linse fallenden Strahlenbündels hinter derselben, entspricht einem virtuellen Objecte, dessen Abstand negativ in Rechnung zu bringen ist. Im entgegengesetzten Falle kommt ein divergentes Bündel auf die zweite Linse, dessen Strahlen gerade so gehen, als kämen sie von einem reellen Objectpunkte in der Entfernung f. Diese Grösse kommt dann also positiv in Rechnung, während sie als Brennweite der ersten Linse in diesem Falle negativ zu nehmen ist. Wenn also f und f' schon selbst die algebraischen Grössen sind, welche die Brennweiten der beiden Linsen bestimmen, so können wir zur Berechnung von x ganz allgemein die dioptrische Grundgleichung so schreiben

$$-\frac{1}{f}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'},$$

d. h. der reciproke Werth der Brennweite des ganzen Systems ist gleich der (algebraischen) Summe der reciproken Werthe der Brennweiten der beiden Linsen. Da nun diese drei reciproken Werthe nach unserem Maassprincipe die Stärkenwerthe des Systems und der beiden einzelnen Linsen sind, so haben wir den Satz, dass der Stärkenwerth des Systems die algebraische Summe der Stärkenwerthe seiner Componenten ist. Als Einheit in dem charakterisirten Maasssysteme gilt die Stärke einer Linse von 1 m Brennweite, und man nennt diese Einheit eine „Dioptrie".

Einige Zahlenbeispiele mögen das Vorstehende erläutern. Wir wollen annehmen, wir legten eine Zerstreuungslinse von $-$ 0,08 m Brennweite und eine Sammellinse von $+$ 0,06 m Brennweite zusammen, nun falle ein parallelstrahliges Bündel zuerst auf die Zerstreuungslinse, dann kommt es auf die unmittelbar danebenstehende Sammellinse genau so, als wäre es von einem 8 cm abstehenden leuchtenden Punkte ausgegangen und wird also in einer Entfernung x vereinigt, die sich berechnet aus der Gleichung $\frac{1}{0{,}08}+\frac{1}{x}=\frac{1}{0{,}06}$, d. h. in einer Entfernung von 24 cm. Die Zusammenstellung beider Linsen vereinigt also ein parallelstrahliges Bündel in 24 cm Entfernung, oder hat eine Brennweite von $+$ 24 cm, also nach unserem Maassprincip eine Stärke von $\frac{1}{0{,}24} = -\frac{1}{0{,}08}+\frac{1}{0{,}06}$. Anders ausgedrückt haben wir eine Linse von $-$ 12,5 $\left(=-\frac{1}{0{,}08}\right)$ Dioptrie zusammengelegt mit einer Linse von $+$ 16,66

Dioptrie $\left(+ \frac{1}{0,06}\right)$ und haben erhalten eine Combination von 4,16 (= — 12,5 + 16,66) Dioptrie. Hätten wir zweitens 2 Sammellinsen von + 25 cm und + 23 cm Brennweite, so würde ein parallelstrahliges Bündel von der ersten gebrochen so auf die zweite fallen, dass alle seine Strahlen auf einen 25 cm hinter ihr liegenden Punkt zielen. Um zu diesem Punkte die conjungirte Vereinigungsweite zu berechnen, muss man den Abstand des (virtuellen) Objects mit dem Minuszeichen in die Rechnung bringen, da die Objectabstände positiv genommen werden, wenn sie einem vor der Linse liegenden reellen Objecte entsprechen. Man hat also zur Berechnung der Vereinigungsweite x des auf die zweite Linse fallenden Bündels die Gleichung $-\frac{1}{0,25} + \frac{1}{x} = \frac{1}{0,20}$ und $x =$ 0,11 m = 11 cm. Die Stärke des Systems ist somit auszudrücken durch $+ \frac{1}{0,11} = 9$ Dioptrien, und dies entspricht der Summe von + 4 $\left(= \frac{1}{0,25}\right)$ und 5 $\left(= \frac{1}{0,20}\right)$ Dioptrien. Diese beiden Fälle werden unseren Satz hinlänglich anschaulich machen, dass die Stärke des Systems allemal gleich ist der Summe der Stärkenwerthe beider Linsen, jeden dieser Werthe mit dem ihm zugehörigen Vorzeichen genommen. Sind die beiden Linsen Sammellinsen, so hat daher die Zusammenstellung stets einen positiven Stärkenwerth, der numerisch grösser ist als die Stärke jeder einzelnen Linse. Sind die beiden Linsen Zerstreuungslinsen, so hat die Stärke der Zusammenstellung einen wiederum numerisch grösseren und nothwendig negativen Werth. Ist die eine Linse collectiv, die andere dispansiv, dann sind verschiedene Fälle möglich. Haben die beiden zusammengelegten Linsen gleiche Stärke, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, so entsteht ein System von der Stärke Null, d. h. es wirkt wie eine planparallele Glasplatte, seine Brennweite ist gleichsam unendlich gross, es lenkt die Strahlen gar nicht ab.

Was soeben mit einiger Ausführlichkeit bezüglich zweier Linsen entwickelt wurde, gilt natürlich auch von einer beliebigen Anzahl. Wenn man eine beliebige Anzahl von Linsen so nahe zusammenstellt, dass immer noch die Dicke des ganzen Systems, in der Axe gemessen, vernachlässigt werden darf gegen die übrigen in Betracht kommenden Längen, so ist die Stärke des Systems gleich der algebraischen Summe der Stärkenwerthe der einzelnen Linsen. Man kann nun offenbar auch allgemein sagen: Wenn man zu irgend einem brechenden System eine Linse hinzusetzt, deren Abstand von der vorderen Hauptebene des Systems vernachlässigt werden darf, sonst mögen die Abmessungen des Systems gross oder klein sein, so ist die Stärke des neuentstehenden Systems die Summe der Stärke des alten und der Stärke der hinzugefügten Linse. Man kann daher auch den Unterschied der Stärke zweier Systeme einfach ausdrücken durch die Stärke einer Linse, welche

dem einen System in der Nähe seiner Hauptebene hinzugefügt werden müsste, wenn ein System von gleicher Stärke wie das andere hervorgehen sollte.

Sind die zu vergleichenden Systeme Augen, so ist zu beachten, dass man deren Stärke nicht in absolutem Maasse angeben kann. Einmal nämlich hat das Auge als ein System, bei dem das erste Mittel (Luft) und das letzte (Glaskörper) nicht identisch sind, zwei verschiedene Brennweiten; man müsste daher eine neue Feststellung machen, um unserem Maassprincipe bestimmte Bedeutung zu geben. Wollte man aber auch dies thun, z. B. den reciproken Werth der ersten Brennweite als Maass annehmen, so wäre es doch nicht möglich, dies Maass für ein gegebenes lebendes Auge zu finden, denn es ist unmöglich, die Brennweiten des lebenden Auges zu messen. Wir müssen uns daher begnügen, für Augen ein bloss relatives Maass der Stärke aufzustellen, was übrigens auch vollständig genügt, da die *relative* Lage der Hauptbrennebenen zur Netzhaut weit mehr Interesse hat als die absoluten Werthe der Brennweiten. Man ist daher übereingekommen, erstens alle Augen als dioptrisch äquivalent anzusehen unter der Bezeichnung „*emmetropisch*", bei denen im Ruhezustande die hintere Brennebene mit der Netzhaut zusammenfällt. Zwei solche Augen können möglicherweise sehr verschiedene Brechkraft besitzen. Wenn z. B. das eine klein, das andere gross ist, so muss jenes eine viel grössere Stärke, d. h. viel kleinere Brennweiten haben als dieses, denn jenes muss eben parallelstrahlige Bündel auf der nahe an der Hornhaut befindlichen Retina vereinigen, dies auf der viel ferneren. Mit einem Worte, die Brennweiten emmetropischer Augen können so verschieden sein wie ihre Durchmesser von vorn nach hinten.

Auf die Emmetropie, so wenig dieselbe einen absolut bestimmten Refractionszustand bezeichnet, können wir nun jede andere Baschaffenheit des Auges beziehen. Man nennt ein Auge myopisch, wenn es (im Ruhezustande des Accommodationsapparates) *relativ* stärker bricht als ein emmetropisches, und hypermetropisch, wenn es relativ schwächer bricht. „*Relativ*" stärker oder schwächer will sagen mit Beziehung auf die Lage der Netzhaut, d. h. also wir nennen myopisch ein Auge, das parallele Strahlen *bereits vor*, hypermetropisch eines, das solche *erst hinter* seiner Retina zur Vereinigung bringt. Absolut genommen, könnte recht wohl ein gegebenes myopisches Auge A schwächer brechend sein, d. h. längere Brennweiten besitzen als ein gegebenes emmetropisches Auge B. Jenes wäre dann relativ stärker brechend, sofern seine hintere Brennebene doch noch vor seiner Netzhaut läge. Mit Hülfe unseres Maassprincips können wir nun numerisch angeben, *um wie viel* ein bestimmtes myopisches Auge an relativer brechender Kraft das emmetropische Auge übertrifft, oder um wie viel ein bestimmtes hypermetropisches Auge daran hinter dem emmetropischen zurücksteht. Wir brauchen nur zu ermitteln, welche Stärke eine $\left\{\begin{matrix}\text{Sammel-}\\ \text{Zerstreuungs-}\end{matrix}\right\}$linse haben müsse, die

einem emmetropischen Auge zugesetzt, mit ihm zusammen ein System von der relativen Brechkraft des gegebenen $\left\{\begin{matrix}\text{myopischen}\\ \text{hypermetropischen}\end{matrix}\right\}$ Auges ausmacht. Die Differenz der relativen Brechkraft eines beliebigen ametropischen [1]) Auges von der des emmetropischen ist somit einfach der reciproke Werth des Abstandes, für welchen das ametropische Auge eingerichtet ist. Diese Differenz hat daher, wie auch sonst ersichtlich, für ein myopisches Auge einen positiven, für ein hypermetropisches Auge einen negativen Werth, da letzteres für einen negativ zu rechnenden Abstand, d. h. für convergente Strahlenbündel eingerichtet ist. Denken wir uns beispielsweise ein myopisches Auge, dessen Fernpunktsabstand 25 cm ist, d. h. ein Auge, das bei ruhendem Anpassungsapparate auf 25 cm Abstand eingerichtet ist. Um ein emmetropisches Auge in ein für diese Entfernung eingerichtetes System zu verwandeln (natürlich ohne innere Veränderung), muss man offenbar eine Sammellinse von 25 cm Brennweite davor setzen, so dicht jedoch, dass der Abstand der Linse von der Hauptebene des Auges gegen die 25 cm vernachlässigt werden darf. Diese Linse nämlich bricht Strahlenbündel, die aus 25 cm abstehenden Punkten kommen, so, dass sie parallelstrahlig werden und mithin auf der Retina des emmetropischen Auges zur Vereinigung kommen. Zur Brechkraft des emmetropischen Auges muss also $+\frac{1}{0{,}25}$ hinzukommen, um die relative Brechkraft des gegebenen myopischen Auges zu erhalten. Wir hätten auch umgekehrt fragen können, wie viel müsste von der Brechkraft des gedachten Auges subtrahirt werden, um es emmetropisch zu machen. Die Antwort würde auch hier wieder gelautet haben $\frac{1}{0{,}25}$, denn man muss vor das gedachte myopische Auge eine (Zerstreuungs-) Linse von 25 cm Brennweite, d. h. von $-\frac{1}{0{,}25}$ oder vier Dioptrien Brechkraft setzen, um ein emmetropisches System zu erhalten, d. h. mit anderen Worten, wenn das Auge in unendliche Ferne sehen soll. Nach Donder's Bezeichnungsweise wird der echte Bruch, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner der Fernpunktsabstand ist, der Grad der Myopie genannt.

Denken wir uns zweitens ein hypermetropisches Auge, das im Ruhezustande Strahlenbündel auf der Retina zur Vereinigung bringt, die auf Punkte convergiren, welche 50 cm hinter seiner Hauptebene liegen. Dann ist klar, dass ein emmetropisches Auge eine Zerstreuungslinse vorsetzen müsste von der Stärke $-\frac{1}{0{,}50}$, um sich in ein entsprechendes

[1]) Ametropisch ist der Gegensatz zu emmetropisch, der hypermetropisch und myopisch umfasst.

System zu verwandeln. Umgekehrt müsste das gedachte hypermetropische Auge eine Sammellinse von $+\frac{1}{0,50}$ oder zwei Dioptrien Stärke vorsetzen, um wie ein emmetropisches zu sehen. Die Differenz der relativen Brechkraft des gedachten Auges von der eines emmetropischen wäre also $-\frac{1}{0,50} = -2$, welche (negative) Zahl den „Grad der Hypermetropie" ausdrückt.

Besonders werthvoll ist das Maassprincip angewandt auf die Accommodation. Bekanntlich macht die Anstrengung des Accommodationsapparates das Auge stärker brechend oder „myopischer". Man könnte folglich denselben Erfolg erzielen durch Vorsetzen einer Sammellinse vor das unverändert gelassene Auge, und man hat ein Maass für die Leistungsfähigkeit eines Accommodationsapparates, wenn man ermittelt, wie stark eine Linse sein muss, damit das auf seinen Fernpunkt innerlich eingerichtete Auge seinen Nahepunkt deutlich sehe. Offenbar muss diese Linse eine solche Brennweite haben, dass für sie der Nahepunktsabstand und der negativ gerechnete Fernpunktsabstand conjungirte Vereinigungsweiten sind, d. h. dass sie von einem im Nahepunktsabstande liegenden Objecte im Fernpunktsabstande ein virtuelles Bild erzeugt. Ist also N der Nahepunkts- und F der Fernpunktsabstand, so muss die Brennweite f der Linse der Gleichung genügen: $\frac{1}{N} - \frac{1}{F} = \frac{1}{f}$, oder ihre Stärke muss $= \frac{1}{N} - \frac{1}{F}$ sein, welche Zahl man gemeiniglich in die Form eines Bruches mit dem Nenner 1 bringt. In der That leistet ja die so bestimmte Linse genau dasselbe, was die möglichste Anstrengung des Accommodationsapparates leistet. Reicht also beispielsweise ein Auge von 80 cm bis auf 20 cm Abstand, so wäre das Maass seines Accommodationsvermögens $= \frac{1}{0,20} - \frac{1}{0,75} = 3,75$ Dioptrien zu setzen. Das Accommodationsvermögen eines anderen Auges, welches von 40 cm Fernpunktsabstand bis 12,5 cm Nahepunktsabstand reicht, wäre $= \frac{1}{0,125} - \frac{1}{0,40} = 8 - 2,5 = 5,5$ Dioptrien, also erheblich grösser zu schätzen als das des ersten.

In analoger Weise giebt man auch den Werth des Astigmatismus eines Auges an. Man ermittelt nämlich die beiden Entfernungen, in welchen zwei gerade Linien am deutlichsten gesehen werden, von denen die eine in der Ebene des Meridians schwächster, die andere in der Ebene des Meridians stärkster Brechung liegt, und bildet die Differenz der reciproken Werthe dieser beiden Entfernungen in Metern ausgedrückt.

Siebentes Capitel.

Physikalische Hülfsmittel, gemischtes Licht zu erhalten.

Die Physiologie und die ophthalmiatrische Diagnostik stellt an die Physik häufig das Verlangen, homogenes Licht von jeder bestimmten Brechbarkeitsstufe und gemischtes Licht aus bestimmten Componenten in jedem beliebigen Verhältniss der Intensität herzustellen. Die Methoden der Herstellung homogenes Lichtes werden in der allgemeinen Physik abgehandelt. Insbesondere sind in neueren Lehrbüchern die verfeinerten Methoden von Kirchhoff und Bunsen hinlänglich ausführlich beschrieben, so dass wir hier nicht darauf einzugehen brauchen. Wir haben daher hier nur die Methoden zu besprechen, nach denen man zwei oder mehrere homogene Lichtarten in beliebig abgestuftem Verhältniss der Stärke auf die normale oder abnormale Retina zusammenwirken lassen kann. Am vollkommensten wird dieser Zweck zu erreichen sein, wenn wir das Auge eine weisse (d. h. alle Lichtarten gleich gut diffus reflectirende) Fläche betrachten lassen, die ausschliesslich nur mit den Lichtarten beleuchtet wird, deren zusammengesetzte Wirkung untersucht werden soll. Wird ausserdem noch verlangt, dass die zusammenwirkenden Strahlungen vollkommen homogen und von genau bekannter Wellenlänge seien, so kann nur durch Ausscheidung derselben mittelst des Prismas der Zweck erreicht werden.

Eine sehr vollkommene und verhältnissmässig einfache Methode derart ist von Helmholtz angegeben. Ein nahezu parallelstrahliges Bündel directes Sonnenlichts fällt durch einen Spalt in einem Schirme auf das Prisma Fig. 99 (a. f. S). Jener Schirm und der Gang des auffallenden Strahlenbündels sind in der Figur nicht gezeichnet, man muss sich dasselbe in passender Lage links vom Prisma p denken. Es wird alsdann, wie man aus der allgemeinen Optik weiss, von jedem Punkte der hinteren Fläche des Prismas ein Lichtbündel divergiren, dessen Strahlen der Reihe nach violett, indigo, blau, grün etc. gefärbt sind. Einen Theil dieser sämmtlichen Strahlen, von denen einzelne in der Figur gezeichnet sind, lässt man durch eine Oeffnung im Schirme SS hindurchgehen. Jedesfalls darf die Oeffnung nur so gross sein, dass die farbigen Säume noch nicht in ihren Bereich fallen, dass also z. B. der unterste rothe und der oberste violette vom Prisma ausgehende Strahl (wie auch die Figur andeutet) abgefangen werden. Es wird somit auch von jedem Punkte der Oeffnung aus ein Lichtbündel divergiren, dessen oberster Strahl violett, dessen unterster roth ist; die in der Mitte liegenden sind der bekannten Reihenfolge nach gefärbt. Von diesen sämmtlichen Strahlen sind in der Figur gezeichnet: die blauen und gelben, welche durch

die Punkte *a*, *b*, *c*, *d* und *e* der Oeffnung gehen, sowie noch die rothen und violetten, welche durch die Endpunkte der Oeffnung gehen. Der durch *b* gehende blaue Strahl kommt von einem anderen Punkte *p* des Prismas als der ebenfalls durch *b* gehende gelbe Strahl, welcher von *q* kommt. Man kann aber auch zweitens die Sache so ansehen, als gingen durch die Oeffnung in *S S* unter verschiedenen Winkeln parallelstrahlige homogen gefärbte Bündel, z. B. ein gelb gefärbtes in der Richtung *p b*, ein blau gefärbtes in der Richtung *q b*. Das ganze durch die Oeffnung gedrungene Licht fällt auf eine achromatische Linse *L L*, welche bekanntlich die Eigenschaft hat, einen rothen Strahl schliesslich gerade so abzulenken wie einen blauen oder anders gefärbten. Verfolgen wir zunächst die zweite Auffassung des durch die Oeffnung gedrungenen Lichtes, so wird die Linse jedes der homogen gefärbten parallelstrahligen Bündel in einem Punkte ihrer Hauptbrennebene zur Vereinigung bringen; auf einem daselbst aufgestellten Schirme *S' S'* wird demnach ein reines Spectrum entstehen, in dem das violette parallelstrahlige Bündel in *v*, das blaue in *b*, das gelbe in *g*, das rothe in *r* zur Vereinigung kommt. Sehen wir die Sache aus dem Gesichtspunkte der ersten Auffassung an, so wird die Linse *L L* jedes der divergenten verschiedenfarbigen

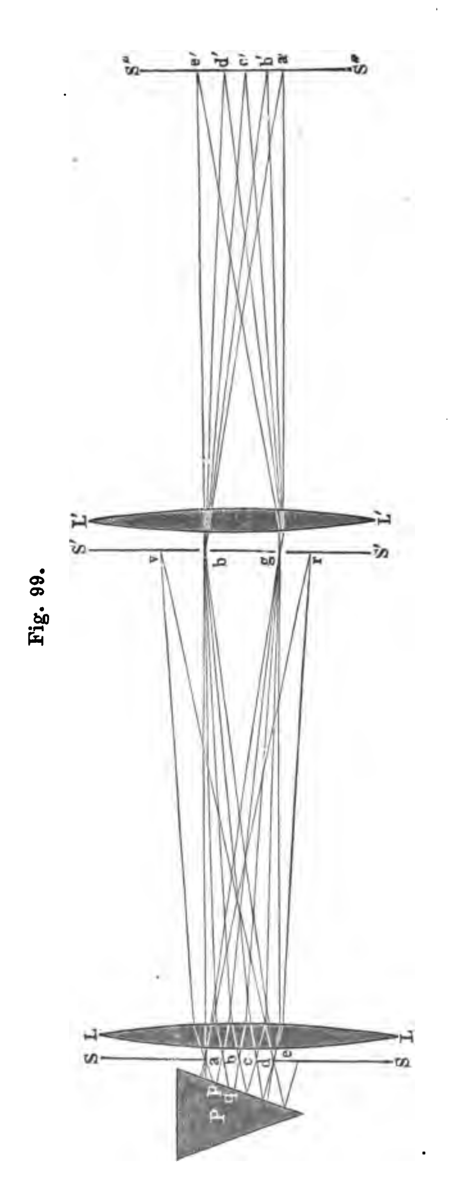


Fig. 99.

Bündel etwas weniger divergent entlassen, so dass ein ungefärbtes (weisses) virtuelles Bild von der Oeffnung des Schirmes *S S* entsteht

auf derselben Seite der Linse und in einer Entfernung von ihr, die zu der Entfernung zwischen SS und LL als conjungirte Vereinigungsweite gehört. Dies (virtuelle) Bild würde von einem hinlänglich grossen achromatischen Auge wahrgenommen werden können. Man kann es aber auch objectiv wieder in ein reelles verwandeln, d. h. man kann die von den einzelnen Punkten des virtuellen Bildes divergirenden Bündel (wenn auch ihre Strahlen verschieden gefärbt, also für gewöhnlich verschieden brechbar sind) durch eine zweite achromatische Linse $L'L'$ wieder vereinigen. Die Vereinigung kommt zu Stande in einer Entfernung von $L'L'$, welche der Entfernung des vorerwähnten virtuellen Bildes von ebendaselbst als conjungirte Vereinigungsweite zugeordnet ist. Stellte man hier (etwa in $S''S''$) einen Papierschirm auf, so würde man auf demselben ein umgekehrtes Bild der Oeffnung ae ohne Färbung sehen. Zu jedem Punkte dieses Bildes würden nämlich Strahlen aller Farben beitragen. Durch einen in $S'S'$ aufgestellten Schirm mit einzelnen beweglichen Spalten kann man nun aber die Strahlen von gewissen Farben verhindern dies zu thun, und es wird alsdann das Bild bloss noch von den übrigen, welche durch die Spalte gehen, verursacht, es muss also in der aus diesen gemischten Farbe erscheinen. In der Figur ist als Beispiel der Fall gezeichnet, wo das Bild $a'e'$ in der Mischfarbe aus Indigoblau und Gelb (die übrigens weiss ist) erscheint. Es geht von a ein divergentes Strahlenbündel aus, dessen Strahlen nach der Brechung in LL von einem ein wenig mehr zurückliegenden Punkte divergiren, sie würden sich nach der Brechung in $L'L'$ in a' vereinigen; dahin gelangen aber nur die Strahlen des Bündels, welche durch b und g gegangen sind, weil nur hier Löcher in dem Schirme $S'S'$ sind; es kommt also auf dem weissen Papier in a' ein blauer und ein gelber Strahl, ebenso kommt in b' ein blauer und ein gelber Strahl zur Vereinigung, welche beide durch die Punkte b und g des ersten Schirmes gegangen sind, ebenso in den Punkten c', d', e'. Alle diese Strahlen sind in der Figur ausgezogen und verfolgbar. Das ganze Stück $a'e'$ muss also in der Mischfarbe aus Blau und Gelb erscheinen. Man kann auf diese Weise die Mischfarben aus beliebigen Paaren in grösster Vollkommenheit auf einer weissen Fläche erzeugen, wenn man dem Schirme $S'S'$ eine Einrichtung giebt, dass man auf ihm zwei Spalte anbringen kann, wo man will.

Je weiter man eine der Spalten des Schirmes $S'S'$ öffnet, um so mehr Strahlen der betreffenden Gattung fallen auf das beleuchtete Feld des Schirmes $S''S''$, und um so intensiver tritt also die betreffende Nüance in die Mischfarbe ein. Es ist jedoch dabei zu bedenken, dass, sowie die Spalte des Schirmes $S'S'$ nicht absolute mathematische Linien sind, auch nicht mehr absolut homogenes Licht hindurchgeht, indessen kann man doch immer die Breite dieser sämmtlichen Spalten so klein machen, dass dieselbe gegen die Ausdehnung des ganzen Spectrums auf $S'S'$ verschwindet, und dennoch jedes gewünschte Verhältniss zwischen den

Breiten der Spalten und mithin zwischen den Intensitäten der verschiedenfarbigen Lichtarten herstellen.

Noch bequemer und zu mehrseitiger Anwendung geeignet, lässt sich die Methode gestalten, wenn man darauf verzichtet, einen Schirm mit den beiden homogenen Strahlenarten so zu beleuchten, dass er einer beliebigen Anzahl von Beschauern gleichzeitig in der Mischfarbe erscheint, dass vielmehr erst ein Netzhautstück eines Beobachters das von den beiden zu mischenden Strahlenarten gleichmässig beleuchtete Feld bildet. Zuerst ist dies Verfahren von Maxwell angewendet und neuerdings hat J. v. Kries[1]) einen Apparat construirt, welcher gestattet, jedes Gemisch von zwei Spectralfarben mit jedem anderen solchen oder mit einem beliebigen Gemisch aus einer Spectralfarbe und Weiss in beliebigem Intensitätsverhältnisse zu vergleichen. Dieser Apparat gestattet

Fig. 100.

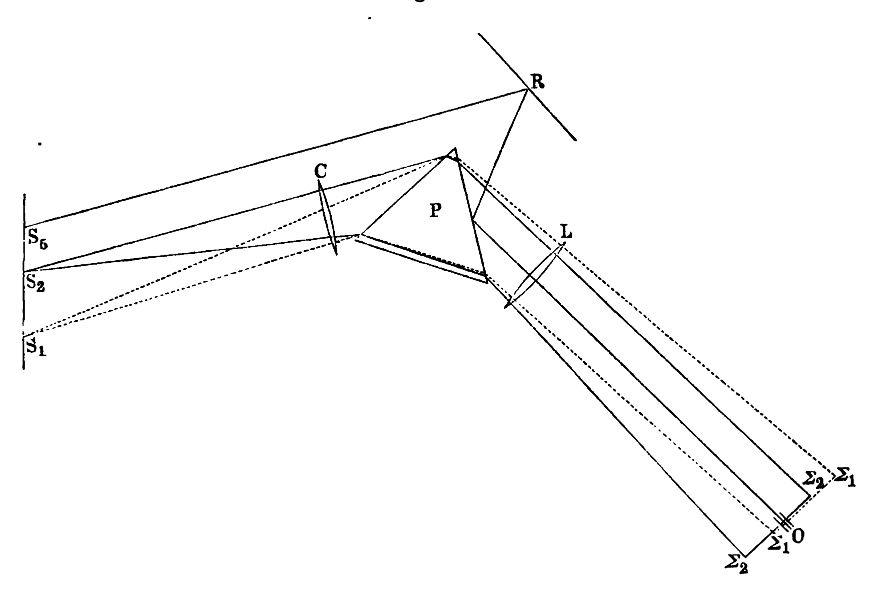
also alle Sätze der Lehre von den Farbenempfindungen zu demonstriren. Seine Einrichtung ist wesentlich folgende.

Als Lichtquelle dient ein grosses weisses Papier, das vor dem Fenster eines verdunkelten Zimmers aufgestellt, von der Sonne direct oder vom hellen Himmel gleichmässig beleuchtet ist. Es sendet Licht durch einen in den Fensterladen eingesetzten Spaltapparat, von welchem Fig. 100 eine Anschauung giebt. Auf einem länglich rechteckigen Schirme sind fünf senkrechte Spalte angebracht, deren Breite durch feine Mikrometerschrauben verändert werden kann. Das oberste Paar dieser Spalte S_3 und S_4 steht auf gleicher Höhe und kann auf dieser auf Schlitten verschoben werden, so dass sowohl dem Spalte S_3 als dem Spalte S_4 jede Lage auf dem Streifen *ab* ertheilt werden kann. Ebenso kann den beiden S_1 und S_2 auf dem Streifen *cd* unabhängig von einander jede beliebige Lage gegeben werden. Die in der Figur gezeichneten Lagen sind also sowohl für S_3 und S_4 als auch für S_1 und S_2 nur willkürlich heraus-

[1]) Du Bois-Reymonde, Archiv der Physiologie, Jahrg. 1881.

gegriffene Beispiele. Der Spalt S_5 braucht nicht verschiebbar zu sein, er kann ein- für allemal in der senkrechten Mittellinie der Tafel bleiben. Es ist klar, wenn man in geeigneter Entfernung von einem dieser durch das helle Blatt Papier beleuchteten Spalte einen gewöhnlichen Spectralapparat aufstellte, so würde man in seinem Ocular ein gewöhnliches Spectrum sehen, dessen Helligkeit mit wachsender Oeffnung des Spaltes zunähme. Wären die vier Spalte S_1 S_2 S_3 S_4 gleichzeitig offen (von S_5 sehen wir einstweilen ab), so entständen im Ocular des Spectroskopes vier Spectra, und zwar würden die den Spalten S_1 S_2 entsprechenden auf gleicher Höhe liegen und im Allgemeinen sich theilweise decken, und

Fig. 101.



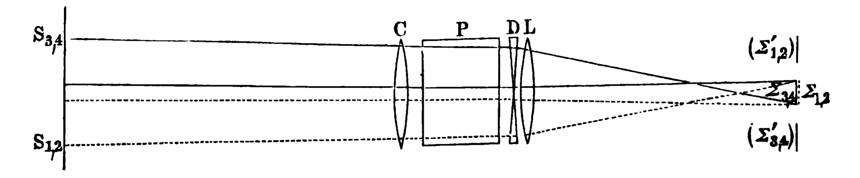
zwar um so mehr, je näher die Spalte S_1 und S_2 an einander liegen. Ebenso würden die S_3 und S_4 entsprechenden Spectra auf gleicher Höhe und zwar unter den S_1 und S_2 entsprechenden liegen, gleichfalls im Allgemeinen in theilweiser Deckung. Zur Erläuterung mag Fig. 101 dienen, wo die Horizontalprojection des Ganges der von den Spalten S_1 und S_2 gelieferten Strahlenbündel ungefähr angedeutet ist, und zwar sind die äussersten zum Spectrum beitragenden Strahlen von S_2 ausgezogen, die entsprechenden von S_1 punktirt. C ist die Collimator-, L die Objectivlinse und P das Prisma. Man sieht, wie die Bündel von S_1 bei Σ_1 Σ_1, die von S_2 bei Σ_2 Σ_2 ein Spectrum bilden, welche sich zum Theil decken. Am Ocularende des Spectroskoprohres ist nun nicht eine Ocularlinse angebracht, vielmehr ist es in der Ebene, wo die Spectra zu Stande kommen, durch eine Metallplatte geschlossen, in deren Mitte ein 4 mm

langer, 0,8 mm breiter Spalt eingeschnitten ist (siehe O, Fig. 101). Durch diesen Spalt dringt also von jedem der beiden Spectra eine nahezu homogene Lichtart. Ein dahinter aufgestelltes Auge sieht also, da jeder Punkt der Objectivfläche zu der betreffenden Stelle des Spectrums einen Strahl sendet, diese ganze Fläche gleichmässig erleuchtet mit den beiden Farben, welche sich im Bereiche des Ocularspaltes decken. Unter den in der Figur beispielsweise gewählten Verhältnissen würde etwa vom Spectrum Σ_1 das Indigo, vom Spectrum Σ_2 das Grünlichgelb in den Bereich des Ocularspaltes fallen. Ein Auge hinter O wird also, wenn der Spalt S_1 allein offen ist, die Objectivfläche Indigoblau sehen, wenn der Spalt S_2 allein offen ist, Grünlichgelb, und wenn beide Spalte gleichzeitig offen sind, wird es die Objectivfläche L in der Mischfarbe von Indigo und Grünlichgelb sehen.

Um nun die Fläche des Objectivs für das beobachtende Auge in zwei Felder zu theilen, welche in Mischfarben aus verschiedenen beliebig zu wählenden Componenten erscheinen, dient folgende Einrichtung. Vor das Objectiv, d. h. zwischen Objectiv und Prisma, wird eine Glasplatte (in Fig. 101 nicht angedeutet) gesetzt, die aus zwei dünnen Prismen von sehr kleinem brechendem Winkel besteht. Jedes derselben ist halbkreisförmig begrenzt, und indem sie in dem die brechende Kante bildenden Durchmesser an einander stossen, machen sie zusammen eine kreisförmige, aus zwei Hälften bestehende Platte aus (siehe Fig. 102), von gleicher Oeffnung wie das Objectiv. Die Einordnung des neuen Theiles in den Apparat ist aus Fig. 103 ersichtlich, welche

Fig. 102.

Fig. 103.



einen Aufriss des Ganzen darstellt. Die senkrechte Linie links ist der Durchschnitt der Platte mit den Objectivspalten, und zwar befinden sich die beiden Spalte S_3 und S_4 (vergl. Fig. 100) auf der Höhe $S_{3,4}$, darunter auf der Höhe $S_{1,2}$ die Spalte S_1 und S_2; C ist die Collimatorlinse, P das dispergirende Prisma, L das Objectiv, und bei D sieht man den senkrechten Durchschnitt des soeben beschriebenen Doppelprismas. Wäre dieses nicht vorhanden, so würden die den unteren Spalten S_1 und S_2 entsprechenden Spectra offenbar über der Mitte, die S_3 und S_4 entsprechenden unter der Mitte in der Focalebene von L entstehen. Das Doppelprisma aber lenkt von jedem von einem Spaltpunkte ausgehenden

Strahlenkegel die obere Hälfte nach oben und die untere Hälfte nach unten etwas ab. So werden also von jedem Spalte zwei Spectra über einander entstehen und bei geeigneter Wahl der Linsenbrennweiten und des brechenden Winkels der beiden Prismen bei D kann es dahin gebracht werden, dass die von den unteren Hälften der Strahlenbündel von S_1 und S_2 gebildeten Spectra statt über der Mitte gerade in der Mitte bei $\Sigma_{1,2}$ entstehen (wie es durch punktirte, den obersten und untersten Strahl des Halbbündels darstellende Linien angedeutet ist). Dagegen werden die Spectra von S_1 und S_2, zu welchen die oberen Hälften der Strahlenbündel beitragen, noch weiter nach oben, etwa nach $(\Sigma'_{1,2})$ gerückt; zu diesem Orte sind in der Figur keine Strahlen verfolgt. Genau symmetrisch werden dann die von $S_{3,4}$ herrührenden Spectra in je zwei aus einander gerückt, und es werden nun die den oberen Hälften der Strahlenbündel entsprechenden Spectra auch gerade in der Mitte bei $\Sigma_{3,4}$ entstehen, während die anderen noch tiefer herabgerückt bei $\Sigma'_{3,4}$ liegen. Steht nun in der Höhe von $\Sigma_{3,4}$ und $\Sigma_{1,2}$ der vorhin erwähnte Ocularspalt und dahinter das Auge, so wird in dasselbe von den Spalten S_1 und S_2 nur Licht eintreten, das durch die untere Hälfte der Objectivlinse gegangen ist, und zwar werden es zwei homogene Strahlenarten sein. Die eine entspricht der Stelle des Spectrums Σ_1 von S_1, welche durch den Ocularspalt ausgeschnitten wird, die andere der Stelle des Spectrums Σ_2 vom Spalte S_2, welche im Ocularspalte liegt. Das beobachtende Auge wird also ein deutliches Bild von der unteren Hälfte der Oberfläche des Objectivs L sehen in der Mischfarbe aus den beiden Componenten, wenn es für seine Entfernung von dieser Oberfläche eingestellt ist. Ebenso wird von der oberen Hälfte der Oberfläche des Objectivs ein Bild erscheinen in der Mischung aus den beiden homogenen Farben, welche die Spalte S_3 und S_4 durch den Ocularspalt liefern. Da diese beiden Bilder in der wagerechten Mittellinie der Oberfläche des Objectivs an einander grenzen, so kann man die Eindrücke der beiden Mischfarben genau vergleichen. Durch Verschiebung der Spalte S_1 und S_2, sowie S_3 und S_4 auf ihren Schlitten kann man aber in der oberen sowohl wie in der unteren Hälfte der Ocularöffnung jedes beliebige Paar von homogenen Strahlenarten zur Mischung bringen, und kann also alle Gleichungen solcher Mischungen aufs Genaueste zur Darstellung bringen.

Man kann mit Hülfe des Apparates aber auch eine beliebige Mischung zweier homogenen Strahlenarten vergleichen mit einer Mischung aus einer Spectralfarbe und unzerlegtem weissem Lichte. Hierzu dient der Spalt S_5 und der im Grundrisse Fig. 101 angedeutete Spiegel R. Der letztere wirft, wie eine in Fig. 101 von S_5 über R und P nach O gehende geknickte Linie andeutet, die durch den Spalt S_5 eindringenden Strahlen durch einen in der Figur nicht gezeichneten Collimator auf die dem Objectiv L zugekehrte Prismenfläche, von wo sie zum zweiten Male reflectirt auf L fallen. Die Linse L macht aus diesen Strahlen in ihrer

Focalebene ein weisses Bild des Spaltes. Steht zwischen P und L das Doppelprisma D (Fig. 103), so wird auch dieses weisse Bild von S_5 in zwei über einander stehende zerlegt und durch richtige Neigung des Spiegels R kann man es dahin bringen, dass z. B. das untere der beiden weissen Bilder genau im Ocularspalte O liegt. Da dies den durch die untere Hälfte der Objectivlinse gegangenen Strahlenbündelhälften seine Entstehung verdankt, so wird das beobachtende Auge, wenn alle anderen Spalte ausser S_5 geschlossen sind, die untere Hälfte der Objectivfläche weiss sehen. Oeffnet man jetzt noch eine der Spalten S_1 oder S_2, so mischt sich diesem Weiss eine Spectralfarbe bei. Das Intensitätsverhältniss dieser beiden Strahlenarten hat man durch Abänderung der Spaltbreiten ganz in der Gewalt. Oeffnet man jetzt noch die zwei Spalte S_3 und S_4, so erscheint die obere Hälfte der Objectivfläche in der Mischung aus zwei homogenen Farben, die dann also mit der durch ungemischtes Weiss abgeblassten Spectralfarbe verglichen werden kann.

Einen speciellen Fall dieser Vergleichung bildet natürlich die Aufsuchung von complementären Farbenpaaren. Dabei sind die Spalte S_1 und S_2 zu schliessen, S_5 sowie S_3 und S_4 zu öffnen, und dann diese beiden letzteren so lange wagerecht zu verschieben, resp. ihr Breitenverhältniss zu ändern, bis die Mischung der von ihnen gelieferten Farben in der oberen Hälfte der Oberfläche des Objectivs genau so erscheint, wie das Weiss in der unteren Hälfte.

Zu ganz gleichem Zwecke ist noch ein anderer Apparat von Glan construirt, bei welchem die Abänderung der Intensität der zu mischenden Strahlenarten durch Polarisation bewerkstelligt wird. Soviel ich sehen kann, ist indessen der beschriebene Kries'sche Apparat in vielen Beziehungen überlegen.

SIEBENTER ABSCHNITT.

ELEKTRICITÄTSLEHRE.

Erstes Capitel.

Allgemeinste Grundsätze über Elektricitätsbewegung.

Wir legen hier durchweg die gemeiniglich angenommene Ansicht zu Grunde, nach welcher die elektrischen Strömungserscheinungen hervorgebracht werden durch das wirkliche Strömen eines Stoffes. Insbesondere schliessen wir uns der Hypothese an, die zwei heterogene Fluida, die negative und positive Elektricität, annimmt, welche immer und überall bei Strömungserscheinungen in gleichen Mengen und mit gleichen Geschwindigkeiten, aber in entgegengesetzter Richtung in Bewegung begriffen sind. Wir folgen bloss dem positiven Strome, indem wir den negativen als selbstverständlich mit Stillschweigen übergehen. In allen bekannten Leitern wird der Bewegung der Elektricität ein Widerstand entgegengesetzt, sei es nun, dass derselbe dem Reibungswiderstande, den Flüssigkeiten beim Durchströmen von Röhren erleiden, analog zu denken ist, sei es, dass er, wie Weber[1]) will, der Wechselwirkung der entgegengesetzten positiven und negativen Strömungen verdankt wird. Soll nun in einem Leiter ein dauernder elektrischer Strom erhalten werden, so muss an jedem Orte desselben eine Kraft wirken, welche die daselbst befindliche elektrische Masse in Bewegung setzt, denn sie würde, da ihr Beharrungsvermögen nur in verschwindend kleinem Grade zukommt, selbst wenn sie mit einer gewissen Geschwindigkeit begabt ankäme, durch den Widerstand augenblicklich zur Ruhe gebracht werden. Man setzt

---

[1]) Elektrodynamische Maassbestimmungen, II. Heft.

deshalb auch die Intensität der Strömung an jedem Punkte geradezu den hier wirkenden Triebkräften proportional. Diese treibenden Kräfte sind in der Regel die abstossenden Wirkungen anderer gleichnamiger (resp. Anziehungen ungleichnamiger) elektrischer Massen.

Begreiflicherweise wird ein elektrisches Theilchen von irgend einem Punkte aus immer dahin getrieben werden, wo weniger Abstossungen (resp. mehr Anziehungen [1]) wirksam sind. Es lässt sich noch näher eine von den wirksamen elektrischen Massen abhängige Grösse angeben, die im Allgemeinen in einem durchströmten Leiter von Punkt zu Punkt variirt und welche die Eigenschaft hat, dass die Raschheit ihrer Abnahme von irgend einem Punkte aus nach irgend einer Richtung hin geradezu die Triebkraft misst, die das in diesem Punkte befindliche Theilchen nach dieser Richtung hin zu bewegen strebt. Diese Grösse, die offenbar mit dem, was man bei Flüssigkeitsströmen Druck nennt, viele Analogie zeigt, nennt man „Spannung". Wir können also den ausgesprochenen Satz noch so ausdrücken: ein elektrisches Theilchen strömt immer von Punkten höherer zu Punkten niederer Spannung. In früherer Zeit nahm man mit Ohm [2]), dem Begründer der ganzen Theorie der galvanischen Kette, an, die Spannung sei in jedem Punkte des Leiters gleichbedeutend mit der in diesem Punkte angehäuften freien (d. h. nicht durch ein gleiches Quantum entgegengesetzter Elektricität neutralisirten) Elektricitätsmenge. In der That würde diese Hypothese richtig sein, wenn die elektrischen Abstossungskräfte nur in unendlich kleinen Entfernungen wirksam wären, es könnte alsdann nur an Ort und Stelle angehäufte freie Elektricität eine Spannung hervorbringen. Man weiss aber, dass die elektrischen Abstossungen auch auf endliche Abstände wirken, und es muss daher die Spannung an jedem einzelnen Punkte ebensowohl von fernen elektrischen Massen abhängen, als von den im Punkte selbst befindlichen. Man [3]) nimmt sogar jetzt allgemein, im Einklange mit den Principien der Elektrostatik, an, dass auch in einem durchströmten Leiter niemals Anhäufungen freier Elektricität an Punkten des Inneren vorkommen können, dass vielmehr hier überall und immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität (freilich in entgegengesetzter Richtung bewegt) vorhanden sein müssen. Ansammlungen freier Elektricitätsmengen können nur an der Oberfläche vorkommen. Die nähere Definition der Spannung kann hier nicht gegeben werden, man sieht nur so viel, dass sie eine Grösse ist, die mit der Vertheilung der freien elektrischen Massen in einem mathematisch angebbaren Zusammenhange steht. In einem bestimmten Leiter mit bestimmter Vertheilung freier Elektricität an der

---

[1]) Der Kürze wegen soll im Folgenden in der Regel nur von Abstossungen die Rede sein und als selbstverständlich hinzugedacht werden, dass die gleiche Wirkung auch durch Anziehungen ungleichnamiger elektrischer Massen hervorgebracht werden kann.

[2]) Die galvanische Kette mathematisch behandelt.

[3]) Kirchhoff in Pogg. Ann. Bd. 64, S. 497.

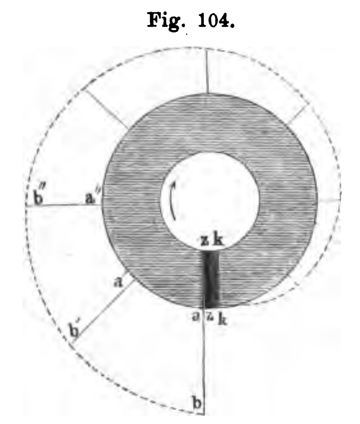
Oberfläche hat sie für jeden Punkt im Inneren einen angebbaren Werth; sie ist — wie der Mathematiker sich ausdrückt — eine Function der Lage des Punktes oder seiner Coordinaten. Es mag noch bemerkt sein, dass die Function, welche die Spannung in den Coordinaten des Punktes ausdrückt, in der Kunstsprache der Mathematik „Potentialfunction" heisst.

Wir denken uns jetzt einen Leiter mit irgend einer Vertheilung freier Elektricität an der Oberfläche, die verschiedenen Spannungen an verschiedenen Stellen seines Inneren zur Folge hat. Augenblicklich wird die Elektricität von allen Punkten höherer Spannung zu den benachbarten Punkten niedrigerer Spannung hinfliessen und daselbst die Spannung vermehren. Dies wird so lange dauern, bis sich die Spannungen durch den ganzen Leiter ausgeglichen haben, d. h. an jedem Punkte desselben dieselbe Spannung herrscht. Von diesem Momente an wird Ruhe stattfinden, die nur dann einer neuen Bewegung Platz machen würde, wenn sie von aussen gestört wird. Der Vorgang wäre dem vergleichbar, wenn in einem Augenblicke Wassermassen am oberen Ende eines geeigneten Canals angehäuft sich selbst überlassen werden. Einer Stelle höherer Spannung des Leiters entspricht eine höher gelegene Stelle des Canals. Jedes Wassertheilchen wird nämlich von der höheren Stelle zur tieferen streben, und es tritt Ruhe ein, wenn die Wassermasse sich in der tiefsten Gegend des Canals gesammelt hat, so dass jedes Theilchen den tiefsten Stand, dessen es unter den angenommenen Bedingungen fähig ist, einnimmt. In diesem Wassercanale wird aber sofort ein andauernder Strom Platz greifen, wenn eine der Schwere des Wassers fremde Kraft vorhanden ist, die das unten angekommene Wassertheilchen wieder zu einem höher gelegenen Punkte, zum oberen Anfange des Canals emporhebt. Eine entsprechende Bedingung muss nun auch erfüllt sein, wenn ein andauernder elektrischer Strom zu Stande kommen soll. Es genügt nicht, dass in irgend einem Anfangszeitpunkte verschiedene Spannungen im Leiter stattfanden, denn diese würden sich ausgleichen; es muss vielmehr an irgend einer Stelle desselben eine fremde Kraft ihren Sitz haben, die den elektrischen Abstossungen zum Trotz ein elektrisches Massentheilchen von einem Punkte geringerer Spannung immer wieder zu einem Punkte höherer Spannung hintreibt. Solche Kräfte, deren Wesen uns zwar völlig unbekannt ist, deren Existenz aber feststeht, nennen wir elektromotorische Kräfte.

Sei in Fig. 104 (a. f. S.) der schraffirte Ring ein geschlossener Leiterkreis zweiter Classe (etwa aus Wasser), in den an einer Stelle ein Zinkkupferplattenpaar bei zk eingeschaltet ist. Sei nun die Vertheilung freier Elektricität an der Oberfläche des Ringes so beschaffen, dass die Spannungen in allen Punkten eines Querschnittes gleich, aber von Querschnitt zu Querschnitt derart variiren, dass sie vom Zink an links herum stetig abnehmen, den im Kreise herum gemessenen Entfernungen von z proportional. Die punktirte Linie b, b', b'' etc. stellt diese Anordnung der Spannungen graphisch dar, indem die Länge der Linien ab, $a'b'$ etc. die

Spannungen der Querschnitte bei a, a' etc. messen soll. In diesem System würde ohne elektromotorische Kraft ein ausgleichender Strömungsvorgang entstehen, der überall Elektricität von Punkten höherer zu Punkten niederer Spannung führen würde, also im Allgemeinen in der Richtung des Pfeiles, nur bei z auch in entgegengesetzter, weil hier auch nach rechts ein Punkt niederer Spannung angrenzt.

Fig. 104.



Nun hat aber an der Berührungsstelle [1]) zwischen Zink und Kupfer eine elektromotorische Kraft ihren Sitz, welche vom Kupfer zum Zink positive Elektricität hinüberschafft, selbst wenn daselbst eine höhere Spannung schon herrscht. Ist sie so gross, dass sie gerade Gleichgewicht hält dem Bestreben des elektrischen Theilchens bei z, was ihm vermöge der Spannung ab zukommt, nach dem benachbarten Punkte k, der die Spannung Null [2]) hat, überzufliessen, so wird sie jedes von rechts her neu ankommende Theilchen, weil dasselbe die Spannung in k vergrössert und also die ihr entgegenstehende Differenz vermindert, hinüber nach z schaffen, und es entsteht jetzt ein continuirlicher Strom. Von jedem Punkte höherer Spannung wird in der Richtung des Pfeiles Elektricität zu Punkten niederer Spannung gefördert durch die der Elektricität eigenen abstossenden Kräfte, und bei kz wird durch die elektromotorische Kraft Elektricität von Punkten niederer zu Punkten höherer Spannung getrieben.

Dem Leser dürfte wohl die Vorstellung vom Blutkreislaufe eines Thieres geläufiger sein als die von elektrischen Strömen. Ich will daher auf die Analogie dieser beiden Vorgänge hier noch aufmerksam machen,

---

[1]) Ich folge im Texte der strengen Contacttheorie, nicht weil ich sie für richtig halte, sondern weil sie am bequemsten eine anschauliche Formulirung zulässt. Es wird dem, welcher die chemische Theorie vorzieht, leicht sein, durch Verlegung des Sitzes der elektromotorischen Kraft (deren Natur doch immer dieselbe bleiben müsste) an eine andere Stelle das hier Vorgetragene in seine Anschauungsweise zu übersetzen.

[2]) Um Missverständnissen zu begegnen, sei noch besonders bemerkt, dass keineswegs nothwendig auf der einen Seite der elektromotorischen Fläche die Spannung Null zu sein braucht, sie kann vielmehr, je nach der Natur des besonderen Falles, jeden beliebigen positiven oder auch negativen Werth haben. Ja man kann sogar in jedem Falle, in Gedanken sowohl wie in Wirklichkeit, an irgend einem Punkte (also auch an der einen Seite der elektromotorischen Fläche) ganz willkürlich über den Werth der Spannung verfügen; dadurch ist dann aber in diesem bestimmten Falle über die Spannungen in allen anderen Punkten mitverfügt, weil mit dem Strömungsvorgange eben die Spannungsdifferenzen von Punkt zu Punkt, nicht aber die absoluten Werthe derselben in einem nothwendigen Zusammenhange stehen.

obwohl es eigentlich eine Erläuterung eines Einfacheren durch ein Verwickelteres ist; denn in der That ist der Blutkreislauf, selbst auf sein einfachstes Schema (s. Fig. 48, S. 136) zurückgebracht, doch immer unvergleichlich verwickelter, als der hier betrachtete elektrische Strömungsvorgang. Die Analogie stellt sich heraus, wenn wir an die Stelle des elektrischen, in sich selbst zurückkehrenden Leiters das ebenfalls ringförmig geschlossene Gefässsystem setzen (und zwar wollen wir uns, was ja am Wesen des Vorganges nichts ändert, den kleinen Kreislauf ausgeschaltet denken, so dass das Blut aus dem rechten Vorhofe unmittelbar in den linken Ventrikel käme), an die Stelle der strömenden Elektricität das strömende Blut. Den Druckdifferenzen im Gefässsystem entsprechen nun offenbar die Spannungsdifferenzen in der geschlossenen galvanischen Kette, denn wie das Blut immer von Punkten höheres Druckes zu solchen niederes Druckes — von der Aorta zu den Zweigen, von den Zweigen zu den Capillaren, von den Capillaren zu den Venen, von den Venen zum Hohlvenensacke — strömt, so strömt die Elektricität beständig von Punkten grösserer zu Punkten geringerer Spannung. Man könnte geradezu in Fig. 104 den Ring das Gefässsystem darstellen lassen; dann wäre die daselbst gezeichnete Curve der Spannungen die Curve der Drucke, und man müsste bei *zz* den Aortenanfang, bei *kk* den Hohlvenensack denken. Endlich wäre die Kraft des Herzens das Analogon zur elektromotorischen Kraft. Wie sich im Gefässsysteme sofort der Druck ausgleichen und der Strom aufhören würde, wenn nicht beständig der Herzmuskel, dem Ausgleichungsbestreben zum Trotze, durch seine Arbeit Blut aus dem Hohlvenensacke in den Aortenanfang, also von Punkten niederes zu Punkten höheres Druckes hinschaffte, so würden sich in der galvanischen Kette die Spannungen ausgleichen und der Strom aufhören, wenn nicht beständig die elektromotorische Kraft Elektricität von einem Punkte geringerer zu einem Punkte grösserer Spannung, ebenfalls dem eigenen Bestreben des Theilchens zum Trotze, hintriebe.

Es ist jetzt leicht ersichtlich, dass die eine Bedingung für einen continuirlichen Strom, nämlich die beharrenden Spannungsdifferenzen von Punkt zu Punkt, sich sofort von selbst erfüllen muss, sowie die andere erfüllt ist, dass irgendwo im Leiter eine elektromotorische Kraft ihren Sitz hat. Nur darf die elektromotorische Kraft nicht ihren Sitz in einer solchen Fläche haben, welche den g a n z e n Leiter in zwei Theile so theilt, dass man vom einen zum anderen auf k e i n e m Wege kommen kann, der nicht die Fläche durchschneidet, oder mit anderen Worten: wenn durch eine elektromotorische Kraft ein dauernder Strom entstehen soll, so muss es im Leiter Wege geben, die von der einen Seite der elektromotorischen Fläche zur anderen hinführen, ohne die Fläche selbst zu durchsetzen.

Wir dachten bisher, ohne es ausdrücklich zu verabreden, gleichsam unwillkürlich an eine ringartige Anordnung des Leiters. Wenn bei einer solchen, wie Fig. 104 angenommen war, ein ganzer Querschnitt

elektromotorisch wirksam ist, so fliesst offenbar die Elektricität in einer Richtung; alle elektrischen Massentheilchen beschreiben kreisförmige, der Axe des Ringes parallele Bahnen, weil eben nur dieser eine Weg von der einen Seite der elektromotorischen Fläche zur anderen führt, ohne sie selbst zu durchsetzen. Dieser Fall wäre eine lineäre Elektricitätsbewegung, denn offenbar wird an den Gesetzen dieser Bewegung nichts geändert, wenn man den ganzen Leiter auf eine Linie ohne Querschnitt zusammenschrumpfen lässt.

Wir wollen uns im Gegentheile jetzt einen irgendwie gestalteten Leiter denken und irgendwo in demselben eine elektromotorische Kraft ihren Sitz aufschlagen lassen. Wenn im ersten Augenblicke noch Alles im Gleichgewicht war, so wird jetzt die erwachende elektromotorische Kraft anfangen, Elektricität von der einen Seite der Fläche, in der sie sitzt, nach der anderen hinzuschaffen; dadurch wird hier die Spannung vergrössert, dort verringert. Diese Spannungsdifferenz wird, vermöge der eigenen elektrischen Abstossungskräfte — wie wir oben sahen — streben, sich auszugleichen. Die so in Bewegung gesetzten elektrischen Massen werden offenbar auf allen Wegen, die ihnen offen stehen, ohne die elektromotorische Fläche zu durchsetzen, von deren einer Seite zu der anderen hinfliessen, um dann wieder von der elektromotorischen Kraft nach der ersteren durch die Fläche selbst hindurchgeführt zu werden. Offenbar wird sich alsbald ein beharrender Zustand von selbst herstellen, der jedem Punkte des Leiters eine bestimmte Spannung vorschreibt, so dass dieselbe an der elektromotorisch wirksamen Fläche sich sprungweise ändert. Diese unstetige Differenz müsste wieder, wie im obigen Beispiele, gerade so gross sein, dass die dadurch wachgerufenen Abstossungskräfte der elektromotorischen Kraft das Gleichgewicht halten; d. h. ein elektrisches Theilchen in der Fläche, die Sitz der elektromotorischen Kraft ist, gelegen, muss vermöge der Spannungsdifferenz ebenso stark nach der einen Seite durch die Fläche hindurchgedrückt werden, wie es durch die elektromotorische Kraft nach der entgegengesetzten Seite gedrückt wird. So lange dies noch nicht der Fall wäre, würde ja in der That durch die elektromotorische Kraft mehr Elektricität hinübergeführt, als der elektrische Strom herbeiführt.

Man sieht ebenso leicht, wie die Vertheilung der Spannungen sich im Allgemeinen an den übrigen Punkten des Leiters gestalten müsse. Sie müssen nämlich offenbar so angeordnet sein, dass die durch Spannungsdifferenzen in jedem Punkte wachgerufenen bewegenden Kräfte daselbst eine Bewegung erzeugen, die folgender Bedingung unterworfen ist: Denken wir uns irgendwo im Leiter ein vollständig begrenztes, unendlich kleines Volumen, so wird vermöge der zwischen ihm und seinen Nachbarpunkten bestehenden, theils positiven, theils negativen Spannungsdifferenzen von manchen Seiten her Elektricität in das abgegrenzte Volumtheilchen ein-, nach anderen solche ausströmen. Die Bedingung für den beharrenden Strömungszustand ist nun die, dass — wo man auch das

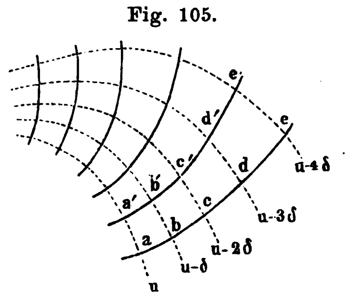
Volumtheilchen greifen möge — die von den negativen Spannungsdifferenzen abhängigen einströmenden Elektricitätsmengen gleich sind den während derselben verschwindend kleinen Zeit nach anderen Seiten ausströmenden Mengen; denn offenbar kann sich unter dieser Bedingung nirgend mehr die Spannung und folglich auch nirgend mehr der Strömungsvorgang ändern. Dass[1] sich aber diese Vertheilung der Spannungen in irgend einem Leiter mit einer elektromotorischen Stelle, den man in irgend einem anderen Anfangszustande sich selbst überlässt, ohne äusseres Zuthun alsbald herstellt, ist ebenfalls leicht zu sehen. Gesetzt, für irgend ein willkürlich gegriffenes Volumtheilchen wäre die Bedingung noch nicht erfüllt, es überwögen etwa noch die einströmenden Massen die ausströmenden; dann würde sich hier die Spannung vermehren, und dadurch würden alle negativen Spannungsdifferenzen gegen ausserhalb gelegene Nachbarpunkte an absolutem Werthe vermindert werden. Da aber mit diesen der Zufluss gleichzeitig zu- und abnimmt, so würde er durch die Spannungsvermehrung selbst verringert werden, bis er zuletzt mit dem aus demselben Grunde wachsenden Abfluss ins Gleichgewicht käme. Dasselbe gilt aber von allen anderen Punkten, wo noch eine Abweichung von der Bedingung in demselben Sinne vorkäme. Natürlich gilt das Umgekehrte von Punkten, wo die Abweichung von unserer Bedingung im entgegengesetzten Sinne statthat; d. h. wo der Zufluss den Abfluss überwiegt, da vermindert sich die Spannung so lange, bis der Abfluss dem Zufluss gleich geworden ist.

Die soeben ausführlich besprochene Bedingung kann als Differentialgleichung geschrieben werden und bildet alsdann die allgemeinste Grundlage der mathematischen Theorie elektrischer Strömungsvorgänge. Wir müssen hier natürlich darauf verzichten, dieselbe in der einfachen und übersichtlichen Form algebraischer Symbolik weiter zu entwickeln; wir können nur noch einige allgemeine Folgerungen durch unmittelbare Anschauung ziehen. Man sieht, die weitere Entwickelung unserer Grundbedingung muss dazu führen, dass man sagen kann, an einem bestimmten Punkte des Leiters (dessen Coordinaten die bestimmten Werthe a, b, c haben) hat die Spannung einen bestimmten Werth u. Kurz, man muss die Spannung als „Function der Coordinaten" herstellen können; es muss $u = f(x, y, z)$ sein, wo $f(x, y, z)$ eine gewisse algebraische Verwickelung der Coordinaten x, y und z bedeutet, die einen bestimmten Werth bekommt, wenn man darin x, y, z bestimmte Werthe giebt. Man wird nun unter den gesammten Punkten des Leiters Systeme von Punkten gleicher Spannung heraussuchen können. Ein solches wird allemal

[1] Das Folgende macht keinen Anspruch auf absolute Strenge. Uebrigens können wir uns hier einer strengen theoretischen Beweisführung um so eher entschlagen, als das Zustandekommen eines beharrlichen Stromes in einem mit elektromotorischen Kräften ausgerüsteten Leiter von einem beliebigen Anfangszustande aus wenigstens durch Erfahrung hinlänglich feststeht.

eine Fläche sein, die wir eine „isoelektrische“ Fläche nennen wollen. Keine isoelektrische Fläche kann den Leiter in zwei vollständig begrenzte Stücke theilen, man muss vielmehr immer von einer Seite einer solchen zur anderen kommen können, ohne sie zu durchsetzen. Die Aufsuchung dieser Flächen hat keine Schwierigkeit mehr, sobald die soeben erwähnte Function $u = f(x, y, z)$ wirklich hergestellt ist. Wollte man z. B. die Fläche finden, in deren sämmtlichen Punkten die Spannung einen bestimmten constanten numerischen Werth, den wir durch *const* bezeichnen wollen, hat, so brauchten wir nur $const = f(x, y, z)$ zu setzen und die zusammengehörigen Werthe von x, y, z herauszusuchen, welche diese Gleichung befriedigen; sie müssen Punkten einer continuirlichen Fläche angehören. Man muss wohl beachten, dass, da man den numerischen Werth *const* durch unendlich kleine Zuwachse verändern kann, die Anzahl der isoelektrischen Flächen unendlich gross ist und dass sie ein System von Flächen gleicher geometrischer Natur bilden, die den ganzen Leiter in unendlich dünne Schichten zerlegen. Schneiden können sich zwei isoelektrische Flächen nicht, weil ja sonst an der Stelle des Durchschnitts zwei verschiedene Spannungen statthaben müssten. Diese Flächen sind nun von der grössten Wichtigkeit, weil auf ihrer Kenntniss die Kenntniss der Strömungscurven oder (wenn man die Analogie mit Flüssigkeitsströmen betonen will) Stromfäden beruht. So nennen wir jeden Weg, den eine bestimmte unendlich kleine elektrische Masse wirklich zurücklegt. Offenbar sind die Strömungscurven solche, die auf den isoelektrischen Flächen überall senkrecht stehen. Durch diese Definition sind sie aber ganz bestimmt gegeben, so dass jede einzelne bestimmt werden kann, wenn man einen ihrer Punkte kennt. Es gehöre z. B. die mit u bezeichnete punktirte Linie, Fig. 105, derjenigen isoelektrischen Fläche an, in welcher die Spannung u (unter u ist hier ein bestimmter numerischer Werth zu verstehen) herrscht; die benachbarte punktirte Linie gehöre derjenigen isoelektrischen Fläche an, wo die Spannung äusserst wenig von u verschieden, $= u - \delta$, ist, u. s. w. Wir denken uns jetzt eine unendlich kleine elektrische Masse bei a; sie wird nach Punkten niederer Spannung hinstreben; nach allen in der Fläche u begriffenen Richtungen liegen aber am Punkte a andere Punkte gleicher Spannung an, daher in allen diesen Richtungen keine Kraftcomponenten wirksam sind; nur in der bei a zur Fläche u senkrechten Richtung ab (die eine ganz bestimmte ist) nimmt die Spannung ab. Die elektrische Masse kann sich deshalb nur senkrecht gegen die Fläche u von dieser entfernen, wird also auf dem Wege ab nach der isoelektrischen Fläche $u - \delta$ gelangen. Von dieser entfernt sie sich wiederum

Fig. 105.



senkrecht u. s. w., so dass sie über *c* und *d* nach *e* gelangt. In der Fig. 105 sind noch einige Strömungscurven als ausgezogene Linien gezeichnet. Es ist übrigens zu beachten, dass keineswegs das ganze Fig. 105 gezeichnete Liniensystem nothwendig in einer Ebene begriffen sein muss. Streng genommen sind nun die Stromfäden nicht Linien, sondern vielmehr unendlich enge canalartige Räume, welche nothwendig ringartig geschlossen in sich zurücklaufen, so dass die darin strömende Masse immer wieder zu ihrem Ausgangspunkte zurückkehrt, um den Kreislauf von Neuem zu beginnen. Sie muss auf diesem Wege auch nothwendig einmal die Fläche schneiden, in welcher die elektromotorische Kraft ihren Sitz hat, denn sonst könnte sie ja nicht von einem Orte geringerer Spannung wieder zu einem Orte höherer Spannung gelangen. Ein solches Strombett kann sich nun stellenweise erweitern und verengern, so dass dieselbe Elektricitätsmenge bald über einen grösseren Raum verbreitet, bald in einem engeren zusammengedrängt ist. Ein Bild davon kann schon die Fig. 105 gewähren, wenn man die beiden Linien $a\,e$ und $a'e'$ so nahe zusammen denkt, dass auf beiden kein wesentlich verschiedener Vorgang statthaben und dass man folglich den zwischen $a\,e$ und $a'e'$ begriffenen Raum als elementares Strombett denken kann; es erweitert sich, wie man sieht, von $a\,a'$ nach $e\,e'$ hin.

Wir haben hiermit die ganze Strömung in dem beliebig gestalteten Leiter aufgelöst in ein System von einzelnen, in sich geschlossenen Stromfäden, von denen jeder für sich durch eine isolirende Scheidewand abgegrenzt sein dürfte, ohne dass dadurch irgend etwas an dem ganzen Strömungsvorgange geändert würde; denn die in der einzelnen Strombahn kreisende Elektricität hat so wie so gar nicht das Streben, dieselbe zu verlassen, und würde also durch eine hinzugedachte isolirende Wandung nicht behindert. Jeden solchen Stromfaden kann man nun nach den Ohm'schen Principien wie einen geschlossenen linearen Leiter behandeln und die Intensität der darin vorhandenen Strömung bestimmen. Sie ist als die Elektricitätsmenge, welche während der Zeiteinheit einen Querschnitt der Strombahn durchsetzt, natürlich überall in einer solchen gleich gross und findet sich bekanntlich als der Quotient der in der Strombahn wirksamen elektromotorischen Kraft, dividirt durch den ganzen Leitungswiderstand, welchen die Bahn bietet[1]). Nicht so ist die Stromdichtheit an allen Stellen einer elementaren Strombahn gleich gross; sie ist dem, wie wir sahen, variabeln Querschnitte derselben umgekehrt proportional.

Neben der bisher entwickelten Grundbedingung giebt es noch drei Nebenbedingungen für das Bestehen eines beharrlichen Stromes. Sie würden bei einer mathematischen Behandlung des Problems gleich von Anfang an in die Rechnung eingegangen sein und auf die besondere Gestalt der gefundenen Strömungscurven von wesentlichem Einfluss ge-

[1]) Siehe Müller-Pfaundler Physik, 8. Aufl., Bd. III, S. 295.

wesen sein. Die eine, deren Nothwendigkeit eigentlich ohne Weiteres einleuchtet, lautet so: Die äussere Oberfläche des ganzen Leiters muss selbst eine Strömungsfläche, sie muss ein System von continuirlich neben einander liegenden Strömungscurven sein, oder, was dasselbe sagt: alle isoelektrischen Flächen, welche überhaupt die äussere Oberfläche des Leiters schneiden, müssen dieselbe senkrecht schneiden. Diese Bedingung drückt eben einfach aus, dass die Elektricität sich nicht über die äussere Grenze des Leiters hinaus fortpflanzt. — Die andere Bedingung bezieht sich auf solche Stellen des Leiters, wo Theile von verschiedener Leitungsfähigkeit an einander stossen, ohne dass daselbst eine elektromotorische Kraft sässe. Grenzt z. B. bei *u*, Fig. 106, eine Substanz geringerer Leitungsfähigkeit (oben) an eine andere grössere (unten), so müssen isoelektrische Flächen gleicher Spannungsdifferenz oben näher an einander liegen als unten, so dass auf dieselbe Wegstrecke der Strömungscurve (*ab*) entlang oben eine grössere Spannungsdifferenz — und somit eine grössere treibende Kraft — kommt als unten. Im oberen Theile geringerer Leitungsfähigkeit ist ja in der That eine bedeutendere Triebkraft nothwendig als im unteren, damit in jedem Augenblicke ebenso viel Elektricität gegen ein Flächenelement bei *u* hingeschafft wird, als sich davon nach unten entfernt. Die dritte Hülfsbedingung endlich sagt aus, dass an jedem Punkte, wo eine elektromotorische Kraft sitzt, die Spannung eine sprungweise Aenderung erleidet, wie schon weiter oben gezeigt wurde.

Fig. 106.

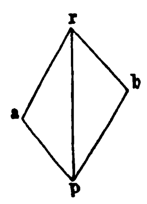
Wir haben uns bisher nur eine elektromotorische Stelle in dem körperlichen Leiter gedacht; soll nun nach der im allgemeinsten Umrisse hier vorgetragenen Theorie der Strömungsvorgang in einem Leiter mit mehreren, räumlich beliebig vertheilten, elektromotorischen Stellen beurtheilt werden, so ist sie noch durch ein neues Princip zu vervollständigen, das sich übrigens aus den aufgestellten Grundsätzen mathematisch ableiten lässt — das Princip „der Superposition der elektrischen Ströme" [1]). Das Princip wird in folgender Form ausgesprochen wenigstens einigermaassen anschaulich und wahrscheinlich sein. Denken wir uns zuerst alle elektromotorischen Kräfte bis auf die erste weg und berechnen für jeden Punkt des Leiters die Spannung, welche ihm jene, allein vorhanden, ertheilen würde. Denken wir uns zweitens alle elektromotorischen Kräfte weg, ausser der zweiten, und berechnen wieder die Spannungen für alle Punkte des Leiters. Kurz, berechnen wir jedesmal, so viele elektro-

[1]) Von Smaasen zuerst ausgesprochen (Pogg. Ann. Bd. 69, S. 161); von du Bois-Reymond angewandt (Untersuchungen über thierische Elektricität Bd. I, S. 647); von Helmholtz zuerst allgemein bewiesen (Pogg. Ann. Bd. 89, S. 212).

motorische Kräfte vorhanden sind, die Spannungen, welche jede derselben einzeln in allen Punkten hervorbringen würde. Die Spannung, die in irgend einem Punkte des Leiters herrscht, wenn alle elektromotorischen Kräfte zusammen wirken, ist nun die abgebraische [1]) Summe der sämmtlichen Spannungen, welche daselbst vorhanden sein würden, wenn die elektromotorischen Kräfte einzeln vorhanden wären.

Bloss ein anderer Ausdruck für dasselbe Princip ist es, wenn man in Beziehung auf die Stromelemente sagt: Das in einem Punkte durch mehrere elektromotorische Kräfte hervorgebrachte Stromelement ist nach Richtung und Grösse gleich der Resultante der als Kräfte nach der Regel des Parallelogramms behandelten Stromelemente, welche an demselben Punkte die einzelnen elektromotorischen Kräfte allein wirksam hervorbringen würden. Stellte also z. B. die Linie pa (Fig. 107) nach Richtung und Grösse das Stromelement vor, welches in p unter dem alleinigen Einflusse einer elektromotorischen Kraft A vorhanden wäre. Wäre ebenso pb das daselbst vorhandene Stromelement, wenn nur die Kraft B wirkte, so würde unter dem gemeinsamen Einfluss von A und B in p ein Stromelement fliessen, das nach Richtung und Grösse durch die Diagonale pr dargestellt würde.

Fig. 107.



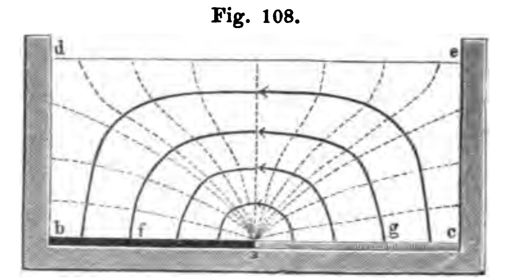
Nach diesen Vorbereitungen wollen wir einige besondere Strömungsvorgänge [2]), die in das Verständniss der thierisch elektrischen Erscheinungen einführen, etwas genauer betrachten. Wir beginnen mit der von du Bois als „flaches Erregerpaar“ bezeichneten Vorrichtung. Der Boden eines parallelepipedischen Gefässes sei zur Hälfte mit einer Zink-, zur anderen Hälfte mit einer Kupferplatte bedeckt, welche — beide rechteckig — in einer zu den längeren Seitenwänden des Gefässes senkrechten Linie zusammenstossen. Das ganze Gefäss ist mit einer elektrolytischen Flüssigkeit, etwa mit Wasser, gefüllt. Alle Bedingungen zum Entstehen von elektrischen Strömungen sind hier gesetzt, denn man hat eine elektromotorisch wirksame Berührung heterogener Metalle und ausserdem noch leitende Verbindung zwischen anderen Stellen der beiden Metalle hergestellt durch Leiter zweiter Classe, d. h. Elektrolyten. Zwei Besonderheiten dieser Vorrichtung fallen sofort in die Augen. Die Fläche, in welcher die elektromotorische Kraft ihren Sitz hat, ist auf eine Linie

[1]) D. h. negative Spannungen sind als Subtrahenden zu behandeln.

[2]) Du Bois-Reymond, Untersuchungen. Bd. I, Abschn. 3, §. 2. Die nachstehenden Entwickelungen des Textes hatten ursprünglich den ausschliesslichen Zweck, den Leser in das Verständniss der Theorie du Bois-Reymond's von der elektromotorischen Wirksamkeit thierischer Gewebe einzuführen. Obgleich nun heutzutage wohl nur noch wenige Physiologen jene Theorie für begründet halten, habe ich diese Entwickelungen in die neue Auflage doch aufgenommen, weil sie passende Beispiele zur Erläuterung der Grundprincipien der Elektricitätsbewegung in körperlichen Leitern bilden.

ohne Breite zusammengeschrumpft, wenigstens wenn man die Dicke der Metallplatten gegen die Höhe der darüber stehenden Flüssigkeit vernachlässigt. Diese elektromotorische Linie ist die Berührungslinie der Zink- und Kupferplatte. Sie muss nach unseren oben aufgestellten Grundsätzen von allen Strömungscurven geschnitten werden. Zweitens: Alles, was in einer den langen Wänden des Gefässes parallelen Ebene vorgeht, ereignet sich genau ebenso in jeder anderen. Wir brauchen also nur die Elektricitätsbewegung nach zwei Ausmessungen in einer solchen Ebene zu verfolgen; sofort haben wir darum nicht mehr von isoelektrischen Flächen, sondern von isoelektrischen Curven zu sprechen, und die elektromotorisch wirksame Stelle zieht sich nun gar auf einen Punkt zurück, nämlich den Durchschnittspunkt der linearen Zinkkupfergrenze, mit derjenigen dazu senkrechten und zu den langen Wänden parallelen Ebene, welche wir als Vertreterin aller solchen herausgegriffen haben. Die Fig. 108 stellt einen solchen Längendurchschnitt des flachen Erregerpaares dar. Das schräg Schraffirte ist die Wand; *bced* ist der Binnenraum; von *b* bis *a* erstreckt sich am Boden die Kupferplatte, von *a* nach *c* die Zinkplatte. Da die Metalle der Ausgleichung elektrischer Spannungen nur einen verschwindenden Widerstand entgegensetzen, im Vergleich mit dem Wasser, so wird sich die an der elektromotorischen Stelle *a* auf der Zinkseite statthabende positive Spannung über das ganze Zink ohne Unterschied verbreiten; ebenso die negative Spannung auf der Kupferseite bei *a* über das ganze Kupfer.

Fig. 108.



Die Zinkfläche wird also die erste isoelektrische Fläche mit der grössten, die Kupferoberfläche die letzte mit der kleinsten Spannung sein. Auf unserem Durchschnitte wäre also *ac* die erste, *ab* die letzte isoelektrische Curve. Die übrigen werden sich, da sie alle die äussere Begrenzung senkrecht treffen müssen, etwa wie die in der Fig. 108 gezeichneten punktirten Linien ausnehmen. Senkrecht zu diesen steht das System der Strömungscurven in der Figur ausgezogen. Durch Pfeilspitzen in der Mitte ist die Richtung der Strömung in ihnen angedeutet. Man sieht, dass diese Curven, wie die Theorie verlangt, sich nach aussen immer mehr der äusseren (gebrochenen) Begrenzungslinie des ganzen Leiters anschliessen. Zu jeder Strömungscurve ist übrigens noch als Schluss des Kreislaufes das zwischen ihren Endpunkten enthaltene Stück der Linie *bc* zu rechnen. So z. B. besteht die dritte Strömungscurve von *a* aus gezählt aus dem gekrümmten Stücke, das die punktirten Linien senkrecht schneidet, und aus dem geraden Linienstücke *fg*, so dass sie im Ganzen einen in sich geschlossenen Ring darstellt. In der

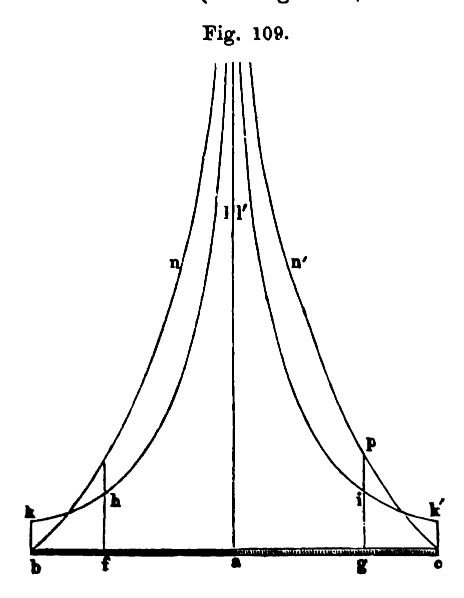
That verfolgen wir ein diese Bahn durchlaufendes elektrisches Theilchen: bei *g* verlässt es, durch die hier herrschende grösste positive Spannung gedrückt, das Zink, durchsetzt alle isoelektrischen Curven senkrecht, indem es immer von einer solchen höherer zu einer niederer Spannung getrieben wird, so gelangt es endlich bei *f* zur Kupferoberfläche; in derselben läuft es nach der elektromotorischen Stelle *a* hin, und wird hier durch die elektromotorische Kraft von der Kupferseite auf die Zinkseite, der dort herrschenden höheren Spannung zum Trotze, hinübergeschafft; ebenso gleitet es an der Zinkfläche wieder nach *g* hin, um den geschilderten Kreislauf von Neuem zu beginnen.

Was die Intensität der Strömung in den einzelnen Strömungscurven unserer Vorrichtung betrifft, so lässt sich nur wenig darüber aus unmittelbarer Anschauung sagen. So viel sieht man auf den ersten Blick, dass die Strömungscurven, je weiter sie beiderseits von *a* entfernt auf den Metallen aufstehen, einen um so schwächeren Strömungsvorgang führen müssen, weil sie bei gleicher elektromotorischer Kraft eine um so grössere Länge und folglich einen um so grösseren Leitungswiderstand besitzen. Die Strömungscurve unmittelbar um den Punkt *a* herum sollte theoretisch, weil sie unendlich kurz ist, einen unendlich starken Strom führen; doch „kann dies Unendlichwerden“ — um mit du Bois-Reymond's Worten zu reden — „ebensowenig stattfinden, als die gewöhnliche Ohm'sche Formel sich verwirklicht finden kann, wenn man den Nenner derselben gleich Null setzt; es ist deutlich, dass man in Gedanken die Bedingung festzuhalten hat, dieser Nenner (der Widerstand, der Wegstrecke direct proportional) könne nie Null werden, nie unter den Werth einer sehr kleinen Constanten sinken, welche den Widerstand ausdrückt, den ein aus drei kleinsten einander berührenden Theilen der drei ungleichartigen Stoffe dem Strome darbietet“.

Bedeutet in Fig. 109 (a. f. S.) *a* den Ursprung eines Coordinatensystems und die nach *b* und *c* hin gemessenen negativen und positiven Abscissen die Entfernungen der einzelnen Punkte der Metalloberfläche unseres flachen Erregerpaares von der Zinkkupfergrenze, so wird etwa die Curve $k\,l\,l'\,k'$ die Intensitäten der einzelnen Stromfäden graphisch darstellen; eine Ordinate dieser Curve soll nämlich die Intensität desjenigen Stromfadens darstellen, welcher in der ihrer Abscisse entsprechenden Entfernung von der Zinkkupfergrenze in die Metallfläche einmündet, so dass z. B. *fh* die Intensität in dem Stromfaden ist, der bei *f* in das Kupfer geht. Dieselbe Ordinate ig $(= fh)$ muss auf *g* stehen, wenn $ag = fa$ ist, weil ja derselbe Stromfaden, der bei *f* in das Kupfer einmündet, bei *g* aus dem Zink wieder auftaucht. Die Curve muss natürlich mit einer gewissen kleinen endlichen Ordinate *bk* beginnen und mit einer gleich grossen ck' schliessen — dem äussersten an der Wand laufenden Stromfaden entsprechend. Ueber *a* muss sie jederseits der Ordinatenaxe entlang gehen, jedoch in einer endlichen, wenn auch noch so grossen Höhe abbrechen.

Die Intensität des Totalstromes, welcher einen irgendwo gelegten ganzen senkrechten Querschnitt der Vorrichtung durchfliesst, oder die gesammte Elektricitätsmenge, welche einen solchen ganzen Querschnitt während der Zeiteinheit durchsetzt, ist begreiflicherweise gleich der Summe derjenigen Partialströme, welche von der Stelle des Querschnitts bis an das nächste Ende der ganzen Vorrichtung aus der Metallfläche auftauchen, resp. darin verschwinden (wenn nämlich der gedachte Querschnitt in den Bereich des Kupfers fällt). Stellte man z. B. auf den Punkt *g* einen senkrechten Querschnitt, so würde derselbe offenbar von allen den Strömungscurven geschnitten, die jenseits *g*, d. h. zwischen *g* und *c* auf dem Zinkboden fussen. Die Gesammtmasse der diesen Querschnitt durchströmenden Elektricität wäre also derjenigen gleich, welche auf der Strecke *gc* aus dem Zink hervorquillt. Ebenso liesse ein durch *f* gelegter Querschnitt offenbar die ganze (jener übrigens gleiche) Elektricitätsmenge passiren, die auf der Strecke *fb* sich in das Kupfer ergiesst. Man kann somit (vorausgesetzt, dass die Curve der Partialstromstärken bekannt ist) leicht eine Curve der Gesammtstromstärken verzeichnen, d. h. eine Curve, deren Ordinaten die Intensität des Gesammtströmungsvorganges in den Querschnitten messen, welche am Endpunkte der betreffenden Abscissen angelegt werden. Jede Ordinate dieser Curve müsste nämlich proportional gemacht werden dem Flächenraume zwischen dem Stücke der Abscissenaxe von der betreffenden Abscisse bis zum Ende des metallischen Bodens, dem darüber liegenden Stücke der Partialstromcurve und den beiden Grenzordinaten dieses Stückes der Curve der Partialstromstärken. Eine solche Curve der Gesammtströmungen in den ganzen Querschnitten ist die aus den beiden Zweigen *bn* und *cn'* bestehende, in Fig. 109, sie muss natürlich bei *b* und *c* vom Werthe **Null** an wachsen und sich über *a* der Ordinatenaxe entlang hoch erheben, ohne jedoch aus den schon angeführten Gründen einen unendlich grossen Werth in Wirklichkeit zu erreichen. Ihre Ordinate *gp* über dem Punkte *g* wäre der Definition gemäss proportional dem Flächenraume *gck'i*.

Fig. 109.



Für die Beurtheilung der thierisch-elektrischen Erscheinungen ist es nun ganz besonders wichtig, im Voraus zu wissen, wie grosse Strom-

antheile sich von einem körperlichen Leiter abzweigen, wenn man an bestimmten Stellen der Oberfläche desselben die Endpunkte eines leitenden (lineären) Bogens unwirksam anlegt, d. h. so, dass an den Berührungsstellen nicht neue elektromotorische Kräfte wachgerufen werden. Wie eine solche unwirksame Anlegung eines metallischen Leiters an flüssige Körper zum Behufe thierisch-elektrischer Versuche zu ermöglichen sei, kann hier einstweilen unerörtert bleiben. Wir können uns ja den angelegten leitenden Bogen aus derselben Substanz wie den körperlichen Leiter selbst bestehend denken, und sind alsdann sicher, dass seine Anlegung elektromotorisch unwirksam ist.

Ein wesentlich neues Problem liegt in dem Leiter mit angelegtem Bogen nicht vor. Es lässt sich ja die Zusammenstellung beider von vornherein als ein körperlicher Leiter betrachten. Die Stromvertheilung darin könnte also nach den im Anfange dieses Capitels erläuterten Grundsätzen ermittelt werden. Diese schliessen an sich keine noch so complicirte Form des Leiters aus, also z. B. auch nicht die eines Parallelepipeds mit einem frei hervorragenden lineären Bogen, der nur an zwei Punkten an die Oberfläche jenes anstösst. Gleichwohl hat du Bois in seinen Untersuchungen mit Recht die durch lineär angelegte Leiter abgezweigten Stromtheile einer gesonderten Betrachtung unterworfen, weil man sich leichter orientirt, wenn man zuerst die Stromvertheilung in dem regelmässig gestalteten körperlichen Leiter für sich bestimmt und hernach die Störungen untersucht, welche eine lineäre Abzweigung hervorbringt. Helmholtz hat für diese Lehren neue einfache Gesichtspunkte aufgestellt, die im Folgenden dargestellt werden sollen.

Fig. 110.

Wir nehmen unser Beispiel von oben wieder vor und denken uns an die Oberfläche des Parallelepipedums den leitenden Bogen B (Fig. 110) in u und v unwirksam angelegt, gerade da, wo die isoelektrischen Flächen von der Spannung u und v ($u > v$) an die Oberfläche anstossen. Wir stellen uns nun zunächst vor, am linken Fusse des Bogens hätte eine elektromotorische Kraft ihren Sitz, welche hinreichte, ein elektrisches Theilchen von der Spannung Null zu einem benachbarten Punkte von der Spannung v zu treiben in der Richtung vom Bogen nach dem Innern des Leiters, d. h. also eine Kraft, die einer Spannungsdifferenz $= v$ Gleichgewicht hält. Ebenso denken wir uns am rechten Fusse des Bogens eine von aussen nach innen gerichtete elektromotorische Kraft wirksam, die der Spannungsdifferenz u Gleichgewicht hält (sie müsste also unter unseren Voraussetzungen z. B. grösser als jene sein). Wären

die Füsse des Bogens zu gross, um für Punkte zu gelten oder im Bereiche einer einzigen isoelektrischen Fläche liegend angesehen zu werden, so müssten die den einzelnen Punkten jedes Fusses innewohnenden elektromotorischen Kräfte verschieden gedacht werden, und zwar jedem Punkte müsste eine so grosse innewohnen, dass die ihr Gleichgewicht haltende Spannungsdifferenz gerade gleich der Spannung derjenigen isoelektrischen Fläche ist, welche hier aufsteht. Unter dieser Voraussetzung wird offenbar in dem angelegten Bogen kein Strom kreisen und der Strömungsvorgang in dem körperlichen Leiter wird genau so bleiben, wie er ohne angelegten Bogen gewesen wäre. Die eingebildeten elektromotorischen Kräfte in den Füssen des Bogens würden nämlich im Erfolge ganz mit isolirenden Scheidewänden zwischen Leiter und Bogen übereinkommen; ein elektrisches Theilchen bei u z. B. würde vermöge der gewöhnlichen elektrischen Abstossungskräfte zwar nach dem benachbarten Punkte des angelegten Bogens, weil dort die Spannung kleiner — der Voraussetzung nach gleich Null — ist, hinstreben, wird aber durch die ebenfalls vorausgesetzte elektromotorische Kraft, die einer Spannungsdifferenz $= u - 0 = u$ Gleichgewicht hält, am Ueberströmen verhindert, genau als wäre hier eine isolirende Scheidewand. Das Theilchen wird also die Bahn weiter verfolgen, wie wenn der Bogen nicht angelegt wäre. Man kann nun aber diesen Erfolg unter dem Gesichtspunkte der Superposition der Ströme (siehe S. 352) auch anders ansehen. Die Spannung in jedem Punkte des aus Bogen und Leiter zusammengesetzten Systems muss nach dem angezogenen Principe sein: die algebraische Summe derjenigen Spannung, welche die elektromotorische Kraft des am Boden liegenden flachen Erregerpaares, allein in dem ganzen Systeme gedacht, an dem gewählten Punkte hervorbringen würde, und derjenigen Spannung, welche die in der Oberfläche des Leiters bei den Fusspunkten des Bogens angenommenen elektromotorischen Kräfte, ebenfalls für sich allein im Systeme wirksam gedacht, an eben demselben Punkte hervorbringen würden. Wir wollen jetzt die Spannungen im ganzen Systeme (aus Leiter und Bogen), wie sie durch das flache Erregerpaar hervorgebracht werden würden, durch P_1 bezeichnen, und die durch die angenommenen elektromotorischen Kräfte in den Bogenfüssen für sich hervorgebrachten durch P_2. Natürlich sind P_1 und P_2 nicht constante Grössen, vielmehr hat jede für jeden Punkt des Leitersystems einen im Allgemeinen verschiedenen Werth, beide Grössen sind — mathematisch gesprochen — Functionen der Coordinaten der Punkte des Systems. Bezeichnen wir noch ebenso durch P die Spannung, welche jeder Punkt des Systems bei vereinter Wirksamkeit der beiden elektromotorischen Kräftearten annimmt, so ist offenbar für alle Punkte des Systems die Gleichung gültig $P_1 + P_2 = P$. Eine ähnliche Beziehung, nur nicht so einfach durch eine Gleichung darstellbar, besteht für die Stromelemente in jedem Punkte, so nämlich, dass in jedem Punkte das Stromelement, was das flache Erregerpaar gleichzeitig mit den Oberflächenkräften an den Bogenfüssen wirksam gedacht

hervorbringt, die Resultante darstellt aus dem, was das flache Erregerpaar allein, und aus dem, was die Oberflächenkräfte allein hervorbringen würden. Wir kennen nun in dem vorliegenden Beispiele die Function P bereits vollständig und setzen sie überhaupt bei den hierher gehörigen Problemen immer als bekannt voraus. Wir sahen nämlich, dass im Innern des Leiters alle Verhältnisse gerade so bleiben mussten, wie sie ganz ohne Anlegung des leitenden Bogens waren, und dass im angelegten Bogen überall kein Strom, also auch keine Spannungsdifferenzen vorhanden waren. P ist demnach eine Function der Coordinaten, deren Werthe für alle Punkte im Leiter mit den Werthen der (S. 354) gefundenen Function u übereinstimmen, die durch das System der isoelektrischen Curven in Fig. 108 graphisch dargestellt sind, und deren Werth für alle Punkte des angelegten Bogens der Null gleich ist, wir haben also für alle Punkte des letzteren $P_1 + P_2 = 0$ oder $P_1 = - P_2$ und für alle Punkte des Leiters $P_1 + P_2 = u$. Die Gleichung $P_1 = - P_2$ lautet in Worte übersetzt: Die ursprünglichen inneren Kräfte des Leiters (in unserem Beispiele die des flachen Erregerpaares) bringen allein wirksam in allen Punkten des Bogens Spannungen (P_1) hervor denen (P_2) gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, welche daselbst hervorgebracht werden würden durch die hülfsweise in den Bogenfüssen gedachten Kräfte allein. Wenn es jetzt möglich ist, die Spannungen und Stromelemente zu ermitteln, welche die in der Oberfläche an den Füssen des Bogens hülfsweise angenommenen elektromotorischen Kräfte für sich allein vorhanden im Bogen erzeugen würden, so ist unser Prob em gelöst. Man brauchte nämlich offenbar nur diese mit entgegengesetztem Vorzeichen resp. (die Stromelemente) in entgegengesetzter Richtung bei gleichem Werthe den einzelnen Punkten des Bogens beizulegen und hätte damit die Anordnung der Spannungen und Stromelemente, welche die inneren Kräfte des Leiters im angelegten Bogen hervorbringen. Giebt man von vornherein den hülfsweise angenommenen Oberflächenkräften bei der oben definirten absoluten Grösse die umgekehrte Richtung, d. h. lässt man sie, statt vom Bogen gegen den Leiter, von diesem gegen den Bogen wirken, so bringen sie unmittelbar diejenigen Spannungen und Stromelemente hervor, welche man sucht, ohne dass man die mathematische Operation der Zeichen und Richtungsumkehrung nöthig hätte. Diese letztere Vertheilung elektromotorischer Kräfte in der Oberfläche des Leiters an den Fusspunkten ableitender Bogen bezeichnet Helmholtz kurz mit dem Ausdrucke „der positiv elektromotorisch wirksamen Oberfläche“, während er die zuerst gedachte Vertheilung derselben Kräfte an denselben Orten nur in umgekehrter Richtung (von aussen nach innen) die negativ elektromotorische Oberfläche nennt. Er spricht dann das Resultat des ganzen hier entwickelten Gedankenganges noch kurz in dem Satze aus: Die in den angelegten Bogen abgeleiteten Stromzweige sind dieselben, welche die positiv elektromotorische Oberfläche ohne Mitwirkung irgend welcher innerer Kräfte des Leiters allein für sich

in dem Bogen hervorbringen würde. Die obige Gleichung $P_1 + P_2 = u$ oder $P_1 = u - P_2$ bildet dann noch in Worten ausgesprochen den Zusatz: Die Spannungen, welche die Punkte im Innern des Leiters bei Anlegung des ableitenden Bogens annehmen, sind die Summen der Spannungen u, welche sie im isolirten Leiter haben, und der Spannungen $- P_2$[1]), welche ihnen in Verbindung mit dem ableitenden Bogen die positiv elektromotorische Oberfläche ertheilen würde. Wenn es nun bloss darauf ankommt, die Stärke des abgeleiteten Stromzweiges zu bestimmen, so brauchen wir uns um die letzterwähnten Spannungen im Innern weiter nicht zu bekümmern, wir können vielmehr den ganzen körperlichen Leiter in Gedanken durch einen linearen zwischen die Füsse des Bogens eingeschaltet und ihn zum Kreise schliessend ersetzen, wenn er nur denselben Widerstand leistet, wie der ganze körperliche Leiter. Kennte man also den Widerstand, den der körperliche Leiter bei einer gewissen Stellung der Füsse des Bogens einem im letzteren erregten Strome entgegensetzt, so kennt man sofort auch die Stärke des in den Bogen abgeleiteten Stromzweiges, vorausgesetzt immer, dass auch die Anordnung der Spannungen im isolirten Leiter bekannt ist. Wäre z. B. L, Fig. 111, ein linearer Leiter, welcher, zwischen den Punkten v und u der Fig. 110 eingeschaltet, denselben Widerstand W_l böte, wie das ganze dort gedachte Parallelepiped, so hätte man alle Elemente um den abgeleiteten Stromzweig in B zu berechnen. In dem ganzen Kreise $B + L$ wäre nämlich der Widerstand $W_b + W_l$ (wenn W_b den ebenfalls bekannten Widerstand des Bogens B bedeutet) und zwei elektromotorische Kräfte nach dem Principe der positiven elektromotorischen Oberfläche links in der Richtung des Pfeiles eine solche, die der Spannungsdifferenz v, und rechts in der entgegengesetzten Richtung eine, die der Spannungsdifferenz u Gleichgewicht hält. Beide zusammen bringen einen Strom hervor gleich der Differenz der beiden Ströme, welche jede einzeln bedingen würde, also nach den bekannten Ohm'schen Grundsätzen einen Strom von der Stärke $\frac{u - v}{W_b + W_l}$ in der Richtung der stärkeren Kraft.

Fig. 111.

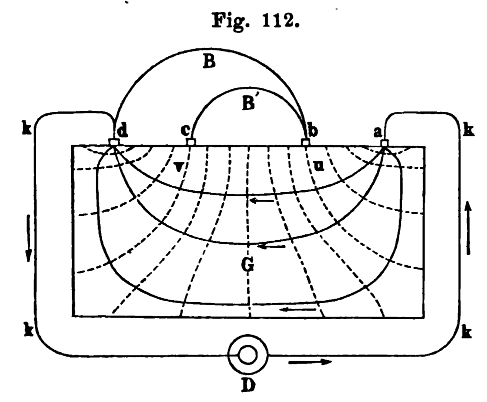
Es steht noch ein zweiter Weg offen, die Stärke eines abgeleiteten Stromzweiges zu finden. Er müsste dann betreten werden, wenn es zwar möglich wäre, die Vertheilung eines im ableitenden Bogen erregten Stromes durch den körperlichen Leiter zu ermitteln, nicht aber die Vertheilung der Ströme, wie sie durch die inneren Kräfte des Leiters in diesem für sich erregt werden. Helmholtz hat nämlich einen Satz bewiesen, der im allgemeinsten Ausdruck so lautet: Wählt man im Innern eines

[1]) Wenn, wie vorausgesetzt wurde, $+ P_2$ die von der negativ elektromotorischen Oberfläche herrührenden Spannungen sind, so müssen offenbar die von der positiv elektromotorischen Oberfläche erzeugten Spannungen durch $- P_2$ dargestellt werden.

zusammengesetzten, aber nicht elektromotorisch wirksamen Leitersystems zwei beliebig gelegene Flächenelemente *a* und *b*, und ertheilt erst dem *a*, später dem *b* eine gleiche elektromotorische Kraft, so fliesst im ersten Falle durch *b* so viel Elektricität wie im zweiten durch *a*. Der Beweis dieses Satzes, den Helmholtz mit Hülfe der höheren Analysis geführt hat, muss natürlich hier übergangen werden, seine Anwendung ergiebt sich von selbst. Hat man, wie hier immer gedacht wurde, im Innern eines körperlichen Leitersystems beliebige Flächen mit elektromotorischen Kräften ausgerüstet und will wissen, einen wie starken Stromzweig alle zusammen durch einen angelegten lineären Bogen senden, so verlegt man die elektromotorische Kraft eines jeden Elements dieser Flächen für einen Augenblick in den Bogen selbst und berechnet die Stärke des Stromzweiges, welchen diese gedachte Anordnung durch das betreffende Flächenelement senden würde. Die (algebraische) Summe aller Einzelstärken wäre die Stärke des im vorgegebenen Falle durch den angelegten Bogen wirklich gehenden Stromzweiges.

Bei dem grossen Interesse, welches die in den letzten Nummern aufgestellten Lehrsätze für die Beurtheilung von Strömungsvorgängen in körperlichen Leitern haben, wird es gut sein, auch die experimentellen Beweise, die Helmholtz dafür gegeben hat, wenigstens im Princip hier mitzutheilen, um so mehr, als dadurch die Sätze selbst noch mehr erläutert und veranschaulicht werden. Als körperliches Leitersystem diente Helmholtz die Zusammenstellung eines Cylinders von Bunsen'scher Kohle (*G* in Fig. 112) mit einem Kupferdrahtkreise (*k*), in welchem eine Daniell'sche Kette (*D*) eingeschaltet war. Die Verbindung zwischen dem Kohlencylinder und dem Leitungsdrahte der Kette war in Quecksilbernäpfchen bei *a* und *d* hergestellt. Der Strömungsvorgang musste sich in dieser Vorrichtung etwa so gestalten, wie es in der Fig. 112, die einen Querschnitt des Cylinders darstellt, angedeutet ist. Im Innern des Cylinders sind drei Strömungscurven als ausgezogene Linien beispielsweise gezeichnet und mit Pfeilen versehen, welche die Strömungsrichtung vergegenwärtigen. Das System der isoelektrischen Oberflächen besteht nun offenbar: 1) aus allen senkrechten Querschnitten des Drahtes *kk*, und 2) aus einem Systeme krummer Flächen im Innern von *G*, deren Durchschnittscurven mit der Ebene der Figur sich etwa ausnehmen dürften wie die punktirten Linien, insbesondere wird ohne Zweifel der eine Querschnitt, der die ganze Länge

Fig. 112.



des Cylinders halbirt, selbst eine isoelektrische Oberfläche sein, und zu beiden Seiten desselben werden die übrigen symmetrisch liegen. — Da hier Alles nur auf die Spannungs unterschiede verschiedener Punkte ankommt, so kann man einem (aber auch nur einem) Punkte eine willkürliche Spannung beilegen. Wir werden also der Einfachheit wegen in den weiteren Auseinandersetzungen unterstellen, am Punkte d herrsche die Spannung Null. Man könnte sogar im wirklichen Versuche diese Voraussetzung ganz einfach wahr machen, indem man den Punkt d in (möglichst) widerstandslose leitende Verbindung mit dem Erdboden brächte. An dem Cylinder G waren mit a und d in einer geraden Linie noch zwei Quecksilbernäpfchen b und c angebracht. Die Versuche bestanden nun einfach darin, dass in je zwei der vier Quecksilbernäpfchen in den verschiedenen möglichen Combinationen ableitende Bogen von verschiedenen, aber immer bekannten Leitungswiderständen eingeschaltet wurden, bald zwischen b und d, wie in Fig. 112 durch die Bogenlinie B angedeutet ist (wobei dann natürlich die Verbindung B' wegzudenken ist), bald zwischen b und c, wie die Linie B' andeutet (wobei die Verbindung B wegfiel). Der im Bogen abgeleitete Stromzweig wurde endlich durch eine darin befindliche strommessende Vorrichtung (Spiegelgalvanometer) gemessen. Sei nun z. B. bei zwei verschiedenen Einschaltungen von bekanntem Widerstande zwischen b und d (in der Art wie B) die Stärke des abgeleiteten Zweiges gemessen, so hat man, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Lehren (s. S. 360), alle Elemente, um die Stromstärke des abgeleiteten Zweiges bei einer beliebigen anderen bekannten Einschaltung zwischen b und d zu berechnen, und wenn diese berechnete mit der nachher beobachteten übereinstimmt, so ist die vorausgesetzte Richtigkeit der Lehren erwiesen. In der That sei, ohne Anlegung eines leitenden Bogens, bei d die Spannung der Null gleich, bei b aber $= u$, entsprechend der auf der ganzen isoelektrischen Oberfläche herrschenden Spannung, die bei b die Oberfläche schneidet. Die Grösse u ist vorläufig noch unbekannt. Das Princip der elektromotorischen Oberfläche verlangt nun, dass in jedem zwischen b und d eingeschalteten Bogen, sein Widerstand mag sein welcher er wolle, ein Stromzweig fliesse, der gerade so gross ist, als ob bei b und d elektromotorische Kräfte sässen gleich den daselbst im Leiter herrschenden Spannungen, also in unserem Falle bei d die Kraft Null, bei b eine Kraft u, und zwar positiv wirksam, d. h. vom Leiter zum Bogen. Die Stärke des Stromzweiges wäre jetzt ganz bekannt, wenn u sowohl als der Widerstand bekannt wäre, den das System $kkkk + G$ von d nach b durchflossen, darbietet. Nennen wir diesen einstweilen noch unbekannten Widerstand, der nothwendig constant ist, W, so haben wir offenbar, nach den Ohm'schen Principien, eine erste Bestimmungsgleichung für die Grössen W und u, nämlich $J_1 = \frac{u}{W + w_1}$, aus einem ersten Versuche, in welchem bei der Einschaltung des Bogens B zwischen b und d vom bekann-

ten Widerstand w_1 der in demselben fliessende Stromzweig von der Stärke J_1 gefunden wurde. Aus einem zweiten Versuche, wo in einem anderen zwischen b und d eingeschalteten ableitenden Bogen vom bekannten Widerstand w_2 ein Stromzweig von der Stärke J_2 vorgefunden wurde, ergiebt sich eine zweite Bestimmungsgleichung für W und u, nämlich $J_2 = \frac{u}{W + w_2}$. Aus diesen beiden Gleichungen zusammen lassen sich die beiden unbekannten W und u bestimmen. Macht man jetzt einen dritten Versuch mit einem Bogen vom Widerstand w_3, so kann man mittelst der berechneten Werthe von W und u die zu erwartende Stärke $J_3 = \frac{u}{W + w_3}$ berechnen und mit der beobachteten vergleichen. Helmholtz fand nun die Beobachtung mit der Rechnung in so genügender Uebereinstimmung, dass u und W in der That für Constante gelten dürfen, wie es das Princip der elektromotorischen Oberfläche verlangt.

In einer zweiten Versuchsreihe wurden ableitende Bogen in der Weise wie B' in Fig. 113 zwischen die Quecksilbernäpfe b und c eingeschaltet (wobei natürlich die Verbindung B, wie oben schon allgemein bemerkt wurde, wegzudenken ist) und wiederum, wie in der vorigen, aus zwei Versuchen bestimmt: 1) der Widerstand W_1, welchen das Leitersystem $kkkk + G$ von c nach b hin durchflossen darbietet. (Er ist offenbar kleiner als unser obiges W, was indessen für die vorliegende Frage ohne Interesse ist.) 2) Diejenige elektromotorische Kraft, welche in dem uns nunmehr beschäftigenden Stromkreise von dem Widerstande W_1 + dem Widerstande des Bogens B' denselben Strom hervorbringen würde, wie er als abgeleiteter Zweig in B' zur Messung kommt. Nach unseren Lehrsätzen müsste aber diese letztere Kraft $u - v$ sein, wenn u seine obige Bedeutung beibehält und v die Spannung auf derjenigen isoelektrischen Fläche ist, welche bei c die Grenze von G schneidet. Man hätte nämlich am Fusse c des Bogens die elektromotorische Kraft v, am Fusse b die Kraft u, beide vom Leiter G nach dem Bogen B' hin, also in entgegengesetzter Richtung, wirksam zu denken. Beide zusammen brächten einen Strom zu Wege, als wäre ihre Differenz $u - v$ in der Richtung der stärkeren Kraft wirksam. Nach diesen Versuchen lässt sich, da u aus obiger Versuchsreihe bereits bekannt ist, v bestimmen. Es wurde ferner der ableitende Bogen zwischen d und c eingeschaltet (in Fig. 112 ist dieser Fall nicht gezeichnet) und wiederum aus mehreren Versuchen mit verschiedenen zwischen c und d eingeschalteten bekannten Widerständen ermittelt: 1) der Widerstand W_2, den das System $kkkk + G$ von d nach c hin durchflossen leistet, und 2) die am Fusse des Bogens wirksam zu denkende elektromotorische Kraft, die für sich den beobachteten abgeleiteten Stromzweig erzeugen würde. Das Princip der elektromotorischen Oberfläche fordert nun, dass diese elektromotorische Kraft in unserem Falle $= v$ sein müsse; da der Voraussetzung gemäss im Leiter ohne Bogen bei d die Spannung gleich Null, bei c gleich v ist, und eben

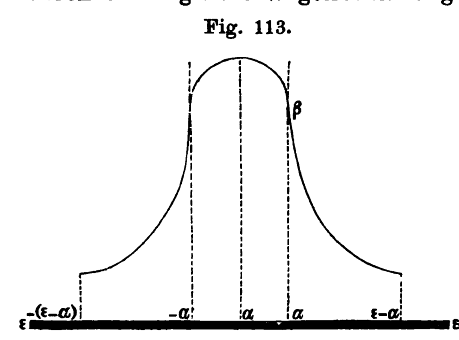
nach unserem Princip an jedem Bogenfusse eine elektromotorische Kraft gedacht werden muss, gleich der dort im unabgeleiteten Körper herrschenden Spannung. Also hätten wir bei c die elektromotorische Kraft v zu denken, wenn hier ein Bogenfuss steht, der andere Fuss des Bogens mag stehen wo er will; im Bogenfuss bei d aber die Kraft Null. Wir würden demnach eine neue Bestätigung des Princips haben, wenn sich aus beiden Arten von Versuchen v gleich gross fände, oder wenn sich die Summe der beiden zuletzt berechneten elektromotorischen Kräfte gleich der in der ersten Versuchsreihe berechneten Kraft fände, da ja nach unserem Principe diese $= u$, jene beiden zuletzt berechneten aber beziehentlich v und $u - v$ sein müssen, man aber nothwendig $u = (u - v) + v$ hat. Helmholtz fand auch hier die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung so vollständig, wie man es bei derartigen Versuchen nur immer erwarten kann.

Endlich fand auch noch Helmholtz das (S. 360 unten) ausgesprochene Reciprocitätsgesetz elektromotorischer Flächenelemente experimentell bestätigt. Es musste nämlich nach diesem Gesetze in dem Bogen $kkkk$ dieselbe Stromstärke gefunden werden, wenn in den Bogen B' die Kette D gebracht wurde, welche sich in B' zeigte, wenn sich die Kette in $kkkk$ befand, vorausgesetzt, dass die Widerstände beider Leitungen durch das Vertauschen von Kette und Galvanometer nicht geändert wurden. In der That entsprach der Versuch dieser Vorhersage.

Gehen wir nun mit diesen Kenntnissen ausgerüstet wieder zu unserem flachen Erregerpaare (S. 353 u. 354) zurück, so werden wir uns mit Leichtigkeit eine ungefähre Vorstellung machen können von der Grösse der Stromzweige, die durch verschiedentlich angelegte Bogen davon abgeleitet werden. Der grösseren Einfachheit wegen wollen wir dem angelegten Bogen einen ein- für allemal constanten Widerstand beilegen und jeden seiner Füsse, linear ausgedehnt, so lang denken, als das flache Erregerpaar breit ist. Jeder Fuss steht alsdann auf der Oberfläche in der ganzen Ausdehnung einer Durchschnittslinie derselben, mit einer gewissen isoelektrischen Fläche, und man nimmt aus jeder der identischen Längsschichten einen gleichen Stromzweig auf, so dass wir wieder die Betrachtung einer einzigen der Betrachtung des Ganzen substituiren können. Unter der „Spannweite“ des Bogens verstehen wir dann noch die Entfernung seiner Fusspunkte (resp. Fusslinien) von einander. Wir fragen uns nun zuerst: Wie wird die Intensität des abgeleiteten Stromzweiges variiren, wenn wir den Bogen mit constanter Spannweite über die Oberfläche des flachen Erregerpaares hinschieben, so dass im Anfang der rechte Fuss des Bogens bei e (Fig. 108), am Ende stände. Da einerseits der Widerstand des Bogens constant vorausgesetzt wurde, andererseits aber auch der Widerstand des körperlichen Leiters zwischen den Fusspunkten des Bogens bei den verschiedenen Stellungen, wie die unmittelbare Anschauung zeigt, nicht sehr verschieden ausfallen wird, so ist der Gesammtwiderstand des Stromkreises, den wir zu betrachten haben, annähernd

constant zu setzen. Die ganze Frage nach der Intensität zieht sich also zurück auf die Frage nach den ihr proportionalen elektromotorischen Kräften, die bei den verschiedenen Stellungen in Wirksamkeit treten. Diese Frage ist nun unmittelbar beantwortet, wenn man die Anordnung der isoelektrischen Flächen und die auf jeder einzelnen herrschenden Spannungen kennt. Wir setzten das Alles bisher immer als bekannt voraus, müssen aber hier, wo wir uns der Vergleichung mit dem Experimente nähern, uns bewusst werden, dass das Problem der Spannungsvertheilung selbst in den einfacheren Fällen nicht streng lösbar ist. Die in Fig. 108 gezeichnete Spannungsvertheilung für unser gegenwärtiges Beispiel war ja auch nichts Anderes als eine gegründete Vermuthung. Indessen ist sie eben doch so weit gegründet, dass wir berechtigt sind, für die abgeleiteten Ströme einige Schlüsse darauf zu bauen. Insbesondere wird das nicht zu leugnen sein, dass zwei isoelektrische Flächen von gleicher Spannungsdifferenz um so näher an einander liegen, je mehr man sich der Mitte des flachen Erregerpaares nähert. Jede isoelektrische Fläche wird ja, wie wir sahen, von allen Stromfäden durchbohrt, ihre Ausdehnung misst also geradezu die Breite des Gesammtstrombettes. Wo dies enger ist, müssen die treibenden Kräfte wegen des grösseren Widerstandes grösser sein. Die treibenden Kräfte sind aber den Spannungsdifferenzen auf gleiche Wegstrecken längs der Strömungscurven proportional. Es müssen also da, wo die isoelektrischen Flächen weniger ausgedehnt sind, z. B. gegen die Mitte unseres Apparates, zwei solche von gleicher Spannungsdifferenz näher an einander liegen als da, wo die isoelektrischen Flächen ausgedehnter, das Strombett breiter ist, und folglich dieselbe Spannungsdifferenz, auf eine grössere Wegstrecke vertheilt, hinreicht, um die Bewegung zu erhalten. Es wird demnach die Spannungsdifferenz an den Füssen des Bogens um so grösser sein, je näher derselbe dem Mittelpunkte der Oberfläche rückt. Ganz unzweifelhaft ist sie geradezu ein Maximum, wenn die Mitte zwischen den Bogenfüssen gerade auf dieser Mitte der Oberfläche steht. Du Bois-Reymond hat die Intensitäten der abgeleiteten Stromzweige in einem Bogen von constanter Spannweite graphisch dargestellt durch eine Curve, die ungefähr die Gestalt wie Fig. 113 hat. Die Abscissen bedeuten die Lage der Bogenfüsse, ausgedrückt durch die Entfernung der Mitte zwischen beiden von dem Querschnitte, welcher die Zinkkupfergrenze enthält; die Ordinaten sind die zugehörigen Stromstärken im abgeleiteten Zweig. Offenbar muss die Curve von der äussersten Stellung rechts, wo die Abscisse gleich der

Fig. 113.



ganzen Länge des Kupfers (ε) vermindert um die halbe Spannweite (α) ist, mit einer gewissen endlichen Ordinate beginnen, dann mit abnehmenden Abscissen ohne ausgezeichneten Punkt ansteigen, bis der eine Fuss über die Zinkkupfergrenze gekommen, die Abscisse also $= \alpha$ geworden ist. Hier muss sich in der Curve ein ausgezeichneter Punkt (β) finden — ein Wendepunkt —, denn das Wachsthumsgesetz der Spannungsdifferenz zwischen den Bogenfüssen wird ein anderes, nachdem der eine die Zinkkupfergrenze überschritten hat. Das Maximum gehört, wie schon gezeigt wurde, zur Abscisse Null; links von derselben gestaltet sich der weitere Verlauf der Curve zur rechten Seite symmetrisch, da sich Alles dort genau ebenso verhält.

Zu denselben Resultaten würden wir gekommen sein, hätten wir den Satz von der Reciprocität elektromotorischer Flächenelemente (S. 360 u. 361) zur Auffindung der Stromstärke benutzt. Die Frage wäre alsdann so zu formuliren gewesen: Ein wie grosser Stromzweig geht durch die Zinkkupfergrenze des flachen Erregerpaares, wenn bei jeder Stellung des Bogens in diesem die elektromotorische Kraft Zink-Kupfer mit Wegdenkung aller übrigen angebracht wird. Ein Blick auf die Fig. 114 zeigt nun, dass bei der Stellung des Bogens, wie sie unter *A* gezeichnet ist, ein weit grösserer Stromarm die Zinkkupfergrenze bei *a* durchsetzen muss, als bei der unter *B* gezeichneten Stellung. Man muss dabei nur daran denken, dass überhaupt in das Metall, wegen seiner grösseren Leitungsfähigkeit, sich verhältnissmässig viel mehr Stromzweige ergiessen werden, als in die Flüssigkeit; diese müssen aber bei der symmetrischen Stellung *A* sämmtlich die Zinkkupfergrenze passiren, während bei der Stellung *B* ihrer viele ins Zink hineingehen und aus ihm wieder hervortauchen, ohne die Grenze überschritten zu haben.

Fig. 114.

Dass mit wachsender Spannweite des Bogens, dessen Widerstand immer noch constant gedacht wird, die Stärke des abgeleiteten Stromzweiges wachsen muss, ergiebt sich aus unseren Principien unmittelbar. Es ist nämlich ersichtlich, wenn man den einen Fuss des Bogens festhält und nun den anderen immer weiter von ersterem entfernt — die Spannweite vergrössert —, dass man dann mit letzterem auf immer neue isoelektrische Curven zu stehen kommt, deren Spannung immer mehr von jener verschieden ist, die bei dem festgedachten Bogenfusse herrscht. Man wird also geradezu den grösstmöglichen Stromzweig mit dem gegebenen Bogen ableiten, wenn man seine Füsse an den beiden entgegengesetzten Enden aufsetzt, seine Spannweite $= 2\varepsilon$ macht.

Du Bois-Reymond stellte ein flaches Erregerpaar wirklich her, indem er am Boden eines parallelepipedischen, inwendig gefirnissten Holzgefässes ein in der oben beschriebenen Weise hergerichtetes Plattenpaar

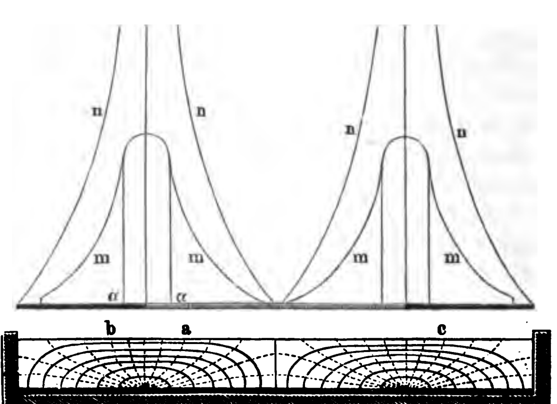
befestigte und dasselbe mit Wasser übergoss. An die Oberfläche des Wassers wurden Platinbleche angelegt, die durch eine stromprüfende Vorrichtung zum Bogen verbunden waren. Um zunächst den Einfluss der Stellung bei gleicher Spannweite zu prüfen, wurden die beiden Platinbleche unter Beibehaltung ihrer Entfernung über die Oberfläche hingeschoben. Im Ganzen bestätigte der Versuch die theoretischen Vorhersagen, nur mischten sich die Erscheinungen der Polarisation in hohem Grade störend ein. Das konnte nicht anders erwartet werden, da zwei Polarisationen, die der Kupferplatte und die der Platinelektroden, im Spiele waren. Letztere konnte freilich nur die absolute Grösse der Stromzweige vermindern; jene aber trübte sogar die Gesetzmässigkeit der Erscheinung. Die Kupferplatte wird sich da mit der stärksten polarisirenden Wasserstoffschicht belegen, wo die dichtesten Stromarme in sie einmünden, d. h. also in der Nähe der Zinkkupfergrenze. Diese stärker polarisirten Stellen der Kupferplatte verhalten sich nun selbst wieder positiv gegen die weniger polarisirten und erzeugen so secundäre Ströme in der Flüssigkeit, von denen ebenfalls Arme in den Bogen abgeleitet werden und also die reine Wirkung der primären nicht erkennen lassen. Da diese secundären Ströme vor dem Kupfer, wie die primären von der Zinkkupfergrenze zum Ende des Kupfers gerichtet sind, so werden sie hier die primären unterstützen, und in der That fanden sich die abgeleiteten Stromzweige stärker, wenn beide Bogenfüsse über dem Kupfer standen, als wenn sie symmetrische Stellungen über dem Zinke hatten. Weit unverhüllter trat die Gesetzmässigkeit in der oben entwickelten Weise hervor, wenn statt Wassers eine andere Flüssigkeit angewandt wurde, in welcher das Kupfer weniger polarisirt wird, also z. B. Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd oder rauchende Salpetersäure.

Wir denken uns jetzt zwei flache Erregerpaare neben einander gelegt, so dass die Zinkenden an einander stossen und also zusammen eine Vorrichtung bilden, in welcher zwei Kupferplatten nebst einer zwischen ihnen liegenden doppelt so langen Zinkplatte in einer Flucht ausgebreitet sind. Es wird sich in dieser Vorrichtung ein Strömungsvorgang bilden, der aus zwei um die Mitte ganz symmetrisch angeordneten Strömungsvorgängen zusammengesetzt ist, von denen jeder einzeln genau der im einfachen flachen Erregerpaare beschriebene ist. In der That denken wir uns für den Augenblick in der Mitte eine isolirende Scheidewand aufgestellt, so würde unzweifelhaft der soeben beschriebene Sachverhalt stattfinden; es kann aber das Wegnehmen der Scheidewand daran nichts ändern, weil rechts und links von derselben überall Punkte gleicher Spannung an einander stossen und folglich kein Grund vorhanden ist, dass Elektricität von der einen Hälfte in die andere überfliesst, auch wenn keine Scheidewand da ist. Fig. 115 (a. f. S.) giebt also ein wahres Bild von diesem Strömungsvorgange und die Curve *nnnn* ist die graphische Darstellung der Gesammtströme in den einzelnen Querschnitten dieses Systems. Ebenso muss die Curve *mmmm* die graphische Darstellung

sein für die Intensität des Stromzweiges, den ein Bogen von der constanten Spannweite 2α, an verschiedenen Stellen angelegt, ableitet.

Vorausgesetzt, dass der Leitungswiderstand des zwischen den Füssen des Bogens begriffenen Stückes vom körperlichen Leiter gegen den Widerstand des Bogens selbst verschwindend klein ist, also der Widerstand des ganzen Kreises durch Entfernung der Füsse von einander nicht merklich geändert wird, so lassen sich allemal zwei Stellungen der Bogenfüsse angeben mit verschiedener Spannweite, bei denen der abgeleitete Stromzweig gleich stark ist. In der That stellen wir den einen Bogenfuss in a auf die Oberfläche, wo sie eine isoelektrische Fläche mit der Spannung u schneidet, so können wir den anderen Bogenfuss sowohl in b als in c aufstellen, um dieselbe elektromotorische Spannungsdifferenz $u - v$ in den Kreis zu bekommen; v mag nämlich die Spannung derjenigen isoelektrischen Fläche heissen, die in b die Oberfläche schneidet; dieselbe

Fig. 115.



Spannung hat aber auch die symmetrisch von der zweiten Zinkkupfergrenze ausgehende isoelektrische Fläche. Unter der gemachten Voraussetzung merklich gleiches Widerstandes würde also in beiden Fällen ein gleich grosser Stromantheil den Bogen durchfliessen.

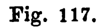
Wir werden nunmehr in einigen etwas verwickelteren Vorrichtungen leicht die Strömungsvorgänge übersehen, da sie auf das einfache oder doppelte flache Erregerpaar zurückführbar sind. Denken wir uns — um sogleich diese Zurückführung im Auge zu behalten — die ganze soeben behandelte Vorrichtung an beiden Zinkkupfergrenzen in ausspringenden rechten Winkeln geknickt, so hätten wir zwei Kupferplatten, die unter rechten Winkeln an eine doppelt so lange Zinkplatte anstossen, und um die erhabenen Seiten der Winkel herum daran stossend eine Schicht feuchtes Leiters. Die factische Herstellung einer solchen Vorrichtung würde übrigens einfacher sein, wenn man alle drei Metallplatten vertical aufstellte und in eine Rinne von entsprechender Gestalt die Flüssigkeit

ausgösse [1]). Lassen wir jetzt noch eine dieser gegenbildlich gleiche Vorrichtung daran stossen, so hätten wir im Ganzen vier flache Erregerpaare, deren jedes an der Zinkkupfergrenze unter einem ausspringenden rechten Winkel geknickt wäre, so zu einem Apparate vereinigt, dass allemal gleichnamige Metalle zweier benachbarter Paare zusammenstossend in eine Ebene zu liegen kämen. Die Strömungsvorgänge der einzelnen Paare würden bei dieser Anordnung offenbar nicht in einander übergreifen. Es wäre ein Leichtes, den zusammengesetzten Strömungsvorgang jetzt an dieser im Ganzen quadratischen Vorrichtung in der schon mehrfach befolgten Weise zu ermitteln. Bevor wir jedoch dies thun, wollen wir noch eine kleine unwesentliche Veränderung anbringen. Wir lassen die beiden Kupferseiten um die Hälfte ihrer Länge zusammenschrumpfen; dadurch werden die isoelektrischen und Strömungscurven eine Verzerrung erleiden, die jedoch, so weit wir überhaupt mit der Anschauung folgen können, leicht zu übersehen ist. Das System der isoelektrischen Flächen und Strömungscurven in der so modificirten, in sich zurückkehrenden rechteckigen Rinne mit vier geknickten Erregerpaaren, deren Kupfer halb so lang als ihr Zink ist, wird sich etwa so ausnehmen, wie Fig. 116 (a. f. S.); die punktirten Linien sind wieder die isoelektrischen, die ausgezogenen die Strömungscurven. Es ist jedoch zu bemerken, dass nunmehr unsere Figur nicht wie die Fig. 108 einen verticalen, sondern einen horizontalen Schnitt der ganzen Vorrichtung vorstellt, weil wir ja jetzt die Erregerplatten senkrecht gestellt haben. Diese selbst bilden das innere, die Grenze des feuchten Leiters das äussere Rechteck. Im inneren Rechteck ist wieder Kupfer als voller schwarzer Strich an den kurzen Seiten QS, Zink durch schraffirte schmale Streifen an den langen Seiten LS angedeutet. Auch die Stromzweige im angelegten Bogen lassen sich ebenso finden wie früher, und würde das Gesetz ihrer Stärken wesentlich aus dem des einfachen flachen Erregerpaares leicht abzuleiten sein. In Fig. 117 (a. f. S.) stellt in der schon mehrfach gebrauchten Weise die ausgezogene Curve die Gesammtstromstärken graphisch dar, d. h. die Elektricitätsmengen, die während der Zeiteinheit einen im Fusspunkte der Ordinate senkrecht aufgerichteten Querschnitt der Flüssigkeit passirt; die punktirte Curve stellt die Stärken des in einem Bogen von constanter Spannweite bei seinen verschiedenen Stellungen fliessenden Stromzweiges dar. Der Uebersichtlichkeit wegen wurden die einzelnen Punkte, über welche die Querschnitte des feuchten Leiters und die Mitte des leitenden Bogens gestellt waren, nicht zu einer geraden Abscissenaxe ausgestreckt, sondern in ihrer rechteckigen Anordnung belassen. Es mussten deshalb, um die Continuität der einzelnen Curvenzweige zu erhalten, die Ordinaten unter Winkeln von 45° gegen die Seiten des

[1]) Es mag hier bemerkt sein, dass diese Anordnung von Du Bois auch schon für das einfache flache Erregerpaar beliebt wurde, als er die weiter oben beschriebenen Versuche anstellte.

Rechtecks geneigt werden, was übrigens den Charakter der Curve nicht verändern kann. Man hat alle über einem einzelnen der vier geknickten flachen Erregerpaare errichteten Ordinaten unter einander und zu den Geraden parallel zu denken, die von der diesem Erregerpaare angehörigen Ecke ausgeht.

Von unserer viereckigen Rinne mit vier geknickten an einander gelegten flachen Erregerpaaren ist nun leicht der Uebergang zu machen zu einer anderen Anordnung elektromotorisch wirksamer Stoffe, die für die Deutung der Resultate thierisch elektrischer Versuche nach Du Bois-Reymond's Theorie vom unmittelbarsten Interesse ist — zu einem



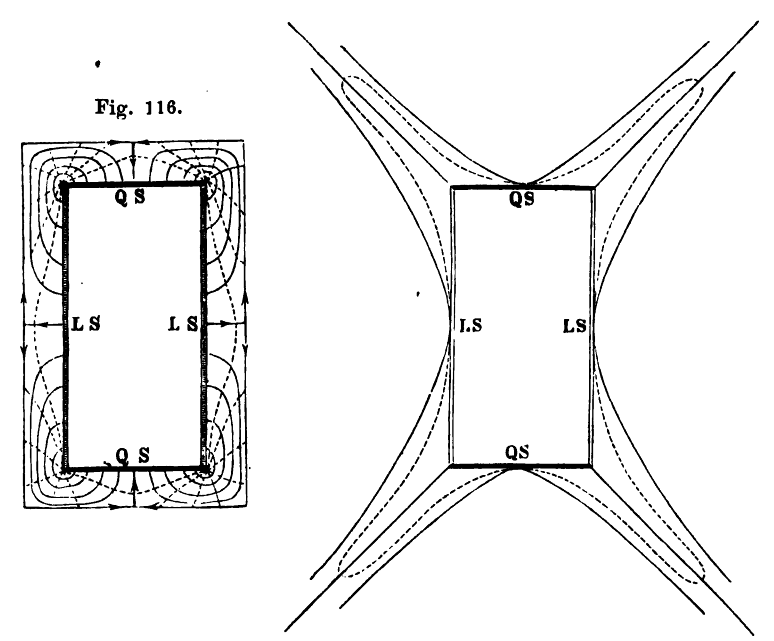


Fig. 116.

Fig. 117.

kupfernen, am Mantel verzinkten Cylinder (die Endflächen behalten das Kupfer frei), der in eine ringsum, sowie oben und unten gleich dicke, also ebenfalls cylindrische Schicht eines feuchten Leiters eingesenkt ist. Lässt man nämlich unsere viereckige Rinnenvorrichtung in ein unendlich dünnes Element zusammenschrumpfen, begrenzt durch zwei beinahe horizontale Ebenen, die sich längs der Verbindungslinie der beiden Punkte QS (siehe Fig. 116) unter einem unendlich kleinen Winkel schneiden, so muss offenbar der darin stattfindende Strömungsvorgang in allen wesentlichen Beziehungen übereinstimmen mit demjenigen an einem Elemente der gedachten cylindrischen Vorrichtung, welches durch zwei einander längs der Axe derselben ebenfalls unter einem unendlich kleinen Winkel schneidende Ebenen begrenzt wird. Durch die soeben

beschriebene Reduction der rechteckigen Rinne wird nun zwar jede der beiden Kupferplatten aus einem schmalen Rechteck verwandelt in zwei sehr spitze Dreiecke, die bei ihren Spitzen mit QS zusammenstossen, während die Zinkplatten schmale Rechtecke bleiben; doch kann diese Gestaltveränderung keine wesentliche Veränderung in der Gestalt der Curven des Gesammtstromes und des abgeleiteten Stromes hervorbringen. Die Figuren 116 und 117 können daher immer noch als Darstellung der Strömungsvorgänge an der veränderten Vorrichtung und namentlich auch an den beiden keilförmigen Elementen der cylindrischen gelten. Die einzige Veränderung, die etwa in der Gestalt der Curven begegnen könnte, wäre ein allmäligeres Ansteigen beider Curven von den Punkten QS aus, weil durch die Zuspitzung gegen diese Punkte hin daselbst der Widerstand vermehrt wird, ohne dass die elektromotorischen Kräfte eine entsprechende Vermehrung erführen. Die Fig. 117 können wir nun sofort auch gebrauchen, um den Vorgang an der ganzen cylindrischen Vorrichtung anschaulich zu machen, da ja bei derselben um die Axe rings herum Alles symmetrisch ist, und folglich, was von einem in der beschriebenen Weise aus derselben herausgeschnittenen keilförmigen Elemente bewiesen ist, sofort von allen gilt. Wir wollen eine Vorrichtung von der Beschaffenheit unserer cylindrischen eine peripolar elektromotorische nennen. Als Resultat der ganzen bisherigen Betrachtungen ergiebt sich über die Wirksamkeit einer solchen Folgendes: In der Schicht feuchtes Leiters fliessen überall Elementarströme, die von Punkten des verzinkten Mantels ausgehen und in Punkte der kupfernen Endflächen einkehren. Die stärksten Ströme biegen kurz um die Ränder der Endflächen um; schwächere Ströme umgehen diese Ränder in weiteren Curven. Eine durch die Axe in ihrem Mittelpunkt senkrecht gelegte Ebene — die Aequatorialebene — theilt die ganze Vorrichtung in zwei symmetrische Hälften. Alle darüber vom Zink ausgehenden Elementarströme münden in die obere, alle darunter ausgehenden in die untere kupferne Endfläche. Die Stromzweige, welche ein an die Oberfläche des feuchten Leiters angelegter Bogen führt, sind stark, wenn zwischen seinen Füssen der Rand einer Endfläche begriffen ist, unverhältnissmässig schwach, wenn beide Füsse über dem Mantel, oder beide über einer Endfläche stehen. Die abgeleiteten Stromzweige sind Null, wenn beide Füsse des Bogens gleich weit vom Aequator abstehen, mögen sie übrigens beide auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Aequators angelegt sein. Ueberhaupt gilt die Regel, dass bei der Berechnung der abgeleiteten Stromzweige bloss die zum Aequator parallelen Kreise in Frage kommen, auf denen die Bogenfüsse aufstehen; in welchem Punkte eines solchen Kreises der Bogenfuss die Oberfläche des Leiters berührt, ist gleichgültig, vorausgesetzt, dass man den Widerstand des Leiters gegen den eigenen Widerstand des Bogens vernachlässigen darf. Jede isoelektrische Fläche tritt nämlich in einem Parallelkreise an die Oberfläche; es herrscht daher auf allen Punkten eines solchen dieselbe Spannung,

und die Anlegung des Bogenfusses an verschiedene Punkte desselben Parallelkreises kann nur auf den Widerstand der Leiterstrecke zwischen den Bogenfüssen, nicht auf die ins Spiel kommenden elektromotorischen Kräfte von Einfluss sein.

Die Gesetze der Ströme in solchen peripolar elektromotorischen Vorrichtungen (die übrigens Du Bois ebenfalls durch den Versuch bestätigt hat) können natürlich nicht von den Abmessungen derselben abhängen. Wir dürfen uns daher unseren Cylinder so klein denken als wir wollen. Lassen wir ihn in Gedanken zu verschwindender Kleinheit zusammenschrumpfen, runden wir gleichzeitig die Ränder ab und geben wir der umspülenden Flüssigkeit die Würfelgestalt statt der cylindrischen. Auch diese Veränderungen werden das Wesen des ganzen Herganges nicht beschlagen. Wir haben so den Cylinder verwandelt in das, was Du Bois eine „peripolar elektromotorische Molekel" nennt; d. h. ein kupfernes — oder besser allgemein ein elektronegatives — Kügelchen, dessen beide Polarzonen roth geblieben sind, während die Aequatorialzone einen elektropositiven (Zink-) Ueberzug hat; das Ganze ist versenkt in einen etwas grösseren Würfel aus elektrolytischer Substanz. In diesem kleinen Apparate werden auch die isoelektrischen Flächen hoher Spannung im Bereiche der verzinkten Aequatorialzone, die niederer Spannung über den kupfernen Polarzonen zu Tage treten. Von der Aequatorialzone werden Ströme ausgehen, die im feuchten Leiterwürfel zu beiden Seiten gegen die Pole hin abfliessen. Könnte man die Füsse eines ableitenden Bogens so klein machen, dass man ihnen noch verschiedene Stellungen an den Würfelflächen geben könnte, so würden auch noch die abgeleiteten Stromzweige in der Weise, wie am Cylinder, gesetzmässig auftreten. Legen wir jetzt zwei solche peripolare Molekel mit entsprechenden Flächen an einander, d. h. entweder so, dass den Polen benachbarte, oder so, dass der Aequatorialzone benachbarte Würfelflächen einander berühren, so stossen sie offenbar überall mit Punkten gleicher Spannung an einander, und es ist nirgend Grund zu einem Ueberströmen aus der einen in die andere vorhanden. In jeder einzelnen bleibt die Spannungs- und Stromvertheilung als ob sie isolirt wäre. Dasselbe gilt, wie sich von selbst versteht, von mehr als zwei in der beschriebenen Weise zusammengelegten Molekeln. Denken wir uns jetzt, indem wir unzählige über einander, hinter einander und neben einander legen, einen nach den drei Abmessungen des Raumes endlich ausgedehnten Körper, aufgebaut aus peripolar elektromotorischen Molekeln, deren Axen sämmtlich parallel und lothrecht stehen. Wäre die Anzahl der über einander liegenden viel grösser als der hinter einander und neben einander liegenden, so hätten wir jetzt einen länglichen, parallelepipedischen Körper vor uns, von dessen elektromotorischer Wirksamkeit nach aussen wir uns Rechenschaft geben wollen. Fig. 118 mag ungefähr andeuten, wie man sich die elektromotorisch wirksamen Theilchen in einer von zwei beliebigen Längsschnitten begrenzten Schicht des Körpers zu denken hat. Die

elektropositiven Aequatorialzonen sind hell und mit + bezeichnet; die elektronegativen Polarzonen dunkel und mit — bezeichnet; die elektrolytische Substanz ist senkrecht schraffirt; endlich ist die allgemeine Richtung der Elementarströmchen durch Pfeile angedeutet. Man sieht jetzt leicht, dass man unter den langen Seitenflächen oder auch unter jedem beliebigen Längsschnitte immer zunächst auf positive Aequatorialzonen stossen wird; unter den Endflächen oder unter jedem beliebigen Querschnitte begegnet man aber immer zunächst negativen Polarzonen der elektromotorischen Molekel. An den Langseiten werden daher überall isoelektrische Flächen von höherer Spannung zu Tage treten; an den Endflächen solche von niederer Spannung. Gehen wir z. B., um es mit bestimmten Vorstellungen zu thun zu haben, auf einer der Längsrichtung des Parallelepipeds parallelen Linie an einer seiner Seitenflächen herab, so treffen wir zunächst oben an der Randkante die Spannung, die in Fig. 116 den vier Ecken zukommt; von diesem in der Langseite überhaupt möglichen Minimalwerth wächst sie, bis wir über den Aequator der ersten Molekel gekommen sind; sie hat hier dieselbe Grösse, wie auf dem Aequatorialschnitte der cylindrischen Vorrichtung, siehe S. 370 und Fig. 116, bei weiterem Heruntergehen nimmt sie wieder ab und erreicht von Neuem den Minimalwerth, wenn wir auf unserer Linie die Grenze zwischen der ersten und zweiten Molekel erreicht haben. Dasselbe Ansteigen und Abnehmen wiederholt sich natürlich beim weiteren Herabgehen im Bereiche jeder Molekel. Im Ganzen hätten wir also auf einer Langseite ein in sehr kurzen Raumintervallen (der Länge einer Molekel) wiederholtes periodisches Steigen und Fallen der Spannungen, so jedoch, dass sie nie unter einen gewissen Werth v sinkt, der, wie wir sahen, der Spannung an den Ecken von Fig. 116 ungefähr gleich ist. Schreiten wir hingegen auf irgend einer geraden Linie fort, die in einer der Endflächen unseres Parallelepipedes gezogen ist (entsprechend der oberen oder unteren Grenzlinie Fig. 118), so finden wir zwar wieder ein periodisches Sinken und Steigen der Spannungen, aber wir begegnen jetzt keiner Spannung, deren Werth grösser als jenes v wäre, das an den Langseiten das Minimum war. In der That kommen an den Endflächen nur solche isoelektrische Flächen zu Tage, die sich über elektronegativen Polarzonen erheben und deren Spannungen also jenen gleich sind, die in Figur 116 über den

Fig. 118.



Kupferflächen an den kürzeren Seiten der Rinne herrschen; sie sind sämmtlich kleiner als die an den Ecken herrschende Spannung v, da ja der Strom von den Ecken nach der Kupferfläche hinfliesst. Hieraus lässt sich nun auf die elektromotorische Wirksamkeit des aus peripolaren Molekeln zusammengesetzten Körpers schliessen. Zunächst ergiebt sich, dass, wie schon bemerkt, weder in dem Körper noch an seiner Oberfläche Gesammtströme fliessen werden, da die elementaren Stromsysteme der einzelnen Molekel keinen Grund finden, in einander überzufliessen. Zweitens lässt sich in einen angelegten Bogen **nur** dann ein Stromzweig ableiten, wenn derselbe mit dem einen Fusse auf einer End-, mit dem anderen auf einer Seitenfläche des Parallelepides steht. Dies zeigt sich so: Die elektromotorischen Molekel denken wir verschwindend klein, es liegen also immer unzählig viele im Bereiche eines Bogenfusses, und ob an den Grenzen noch ein halbes mehr hineinragt, kann keinen Unterschied machen. Sei nun ein Fuss an der Langseite angelegt, so wird sich in seinem Bereiche die periodische Schwankung der Spannung zwischen dem Minimalwerthe v und einem Maximalwerthe, der grösser als v ist, er mag $v + \delta$ heissen, unendlich oft wiederholen. Wir hätten also nach dem Principe der elektromotorischen Oberfläche im Bogenfusse neben einander von innen nach aussen elektromotorisch wirksame Punkte zu denken, deren Kräfte ebenfalls zwischen v und $v + \delta$ periodisch variiren. Nach einem — ich möchte sagen — ursprünglichen logischen Princip (das sich übrigens auch mathematisch erweisen lässt) können wir statt dessen, ohne am Erfolg etwas zu ändern, den ganzen Bogenfuss mit einer für alle Punkte constanten Kraft ausgestattet denken, die nothwendig zwischen den Grenzen v und $v + \delta$ liegen muss. Sie braucht nicht gerade das arithmetische Mittel $v + {}^1/_2\,\delta$ einzuhalten, lässt sich aber jedesfalls durch $v + n\,d$ darstellen, wenn n einen positiven echten Bruch bedeutet, also grösser als Null und kleiner als Eins ist. Legt man jetzt den anderen Bogenfuss an irgend einen anderen Punkt der Langseiten an, so hätte man demselben gleichfalls die nach aussen (der ersteren also im Bogen entgegen) gerichtete elektromotorische Kraft $v + n\,\delta$ zu ertheilen, denn die ganze soeben entwickelte Schlussfolgerung fände von Neuem Anwendung; es könnte also kein Strom im Bogen entstehen. Legte man aber den anderen Bogenfuss an einen Punkt der Endflächen, so variirten in seinem Bereiche die Spannungen unzählige Male zwischen dem Maximalwerthe v und einem Minimalwerthe, kleiner als v, der $v - \delta'$ heissen mag. Man kann nun wieder eine mittlere elektromotorische Kraft statt der eigentlich variirenden gleichmässig über den ganzen Bogenfuss verbreitet denken; ihr Werth ist aber hier zwischen v und $v - \delta'$ anzunehmen, also $= v - m\,\delta'$, wo m ein positiver echter Bruch ist. Wir hätten also nunmehr in dem an der Langseite angelegten Bogenfusse die von innen nach aussen gerichtete Kraft $v + n\,\delta$, und in dem an der Endfläche angelegten Fusse die ebenfalls von innen nach

aussen, also jener entgegen gerichtete Kraft $v - m\delta'$ zu denken. Das ergiebt zu Gunsten der ersteren eine wirksame Differenz $= n\delta + m\delta'$. Es muss also bei dieser Anordnung im Bogen ein Strom von der Langseite zur Endfläche fliessen, dessen Intensität $J = \frac{n\delta + m\delta'}{W}$ ist, wenn W den ganzen Widerstand des Bogens und des Parallelepipeds zwischen den Bogenfüssen bedeutet. Legen wir endlich beide Bogenfüsse an Punkte der Endflächen, so kann wieder in keinem Falle ein Strom abgezweigt werden; denn wir müssten in jedem Bogenfusse die nach aussen gerichtete Kraft $v - m\delta$ annehmen, deren Wirkungen einander aufheben.

Ferner ist noch zu sehen: Die Entfernung der Bogenfüsse von einander und von der Grenze zwischen Endflächen und Langseite — d. h. also die Spannweite des Bogens — kann bei einer überhaupt wirksamen Anordnung nur dadurch auf die Stärke des abgeleiteten Stromzweiges Einfluss üben, dass sie den Widerstand der zwischen den Bogenfüssen befindlichen Körperstrecke verändert. Die im Spiel zu denkenden elektromotorischen Kräfte sind immer dieselben, nämlich $v + n\delta$ und $v - m\delta'$; daher muss auch der abgeleitete Stromzweig bei constantem Leitungswiderstande des Bogens immer derselbe sein, sobald der Widerstand des Körpers gegen jenen überall verschwindet.

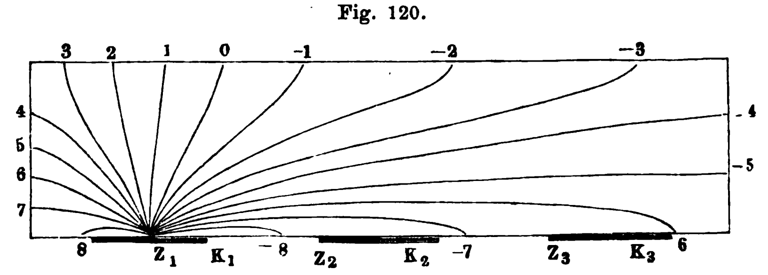
Als ferneres Beispiel von Elektricitätsbewegung in körperlichen Leitern wollen wir noch eine Reihe „dipolar" elektromotorischer Molekel betrachten. Im Anschluss an die soeben gegebene Definition einer peripolaren Molekel verstehen wir unter einer dipolaren ein Kügelchen, zusammengesetzt aus zwei in der Aequatorialebene zusammenstossenden Halbkugeln von elektromotorisch differenter Natur, so dass die Kugel eine negative und positive Hemisphäre besitzt, und mitten in den Hemisphären einen positiven und einen negativen Pol. Wir denken uns dieses Kügelchen (das etwa halb aus Zink und halb aus Kupfer bestehen könnte) umgeben von einer Schicht unwirksamen feuchten Leiters, die würfelförmig nach aussen begrenzt sein mag. Das Kügelchen ist offenbar rings umflossen von einem Stromsysteme, dessen Elementarströme alle von Punkten der positiven Hemisphäre im feuchten Leiter zu Punkten der negativen hingehen. Legen wir nun mehrere dipolare Molekel in eine Reihe zusammen, so dass die Axen aller eine und dieselbe Richtung haben (Fig. 119), so treffen offenbar nicht in den Berührungsflächen isoelektrische Flächen gleicher Spannung zusammen, und es werden somit die Stromsysteme der verschiedenen Molekeln in einander überfliessen und zu einem neuen resultirenden gemeinsamen Stromsysteme der ganzen Reihe sich vereinigen. Aus diesem Grunde ist die Erörterung einer Reihe dipolarer

Fig. 119.



Molekeln weit schwieriger als die einer Reihe peripolarer, trotz der grösseren Einfachheit des Elementes. Um von dem höchst verwickelten Vorgange zuerst das Wesentlichste in möglichst einfacher Gestalt zu erfassen, gehen wir wieder auf flache Erregerpaare (siehe S. 354) zurück. Wir wollen beispielsweise drei solche an der einen langen Wand eines rechtwinklig parallelepipedischen Gefässes, das mit unwirksamem feuchtem Leiter gefüllt ist, anbringen, jedoch so, dass sie einander nicht berühren, etwa wie $z_1 k_1$, $z_2 k_2$, $z_3 k_3$ in Fig. 120. Mit Hülfe des Principes der Superposition der Spannungen werden wir uns leicht eine ungefähre Vorstellung von dem Strömungsvorgange machen können, den die gedachte elektromotorische Anordnung in der parallelepipedischen Flüssigkeitsmasse hervorbringt. Wir brauchen nämlich nur die Spannungen zu berechnen, welche in jedem Punkte jedes Erregerpaar allein für sich wirksam hervorbringen würde, und dann diese drei Spannungen für jeden Punkt algebraisch zu summiren. In Fig. 120 sind nun die Spannungen verzeichnet, die das erste Paar $z_1 k_1$ allein hervorbringen würde. Es ist dabei willkürlich angenommen, die Spannungsdifferenz, welcher der zwischen Kupfer und Zink wirksamen elektromotorischen Kraft Gleich-

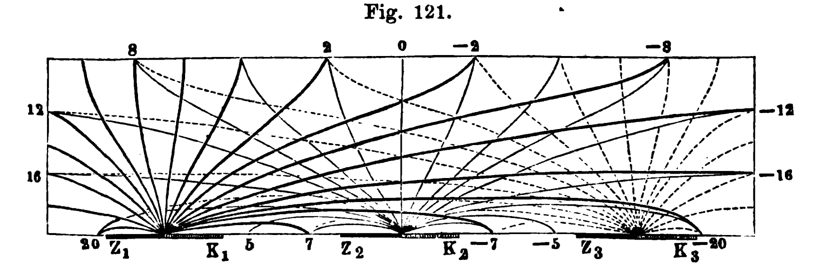
Fig. 120.



gewicht hält, sei = 18 Einheiten. Diese Annahme ist erlaubt, da ja die Maasseinheit der Spannungen an sich willkürlich ist. Die Zinkfläche z_1 wäre also die erste isoelektrische Fläche mit der Spannung + 9, die Kupferfläche wäre die letzte mit der Spannung — 9. Dazwischen sind 17 isoelektrische Flächen im Durchschnitt verzeichnet und die auf ihnen herrschende Spannung allemal mit einer Zahl da angegeben, wo die Curve die Grenze des Leiters senkrecht schneidet. Wie man sieht, ist angenommen, die isoelektrischen Curven hätten im Vergleich mit einem symmetrischen flachen Erregerpaare sämmtlich eine Verzerrung nach rechts — nach der Seite des geringeren Widerstandes d. h. der grösseren Leitermasse erlitten. Diese Annahme steht mit dem früher ausgesprochenen Grundsatze wenigstens nicht im Widerspruch, dass die isoelektrischen Flächen an Stellen grösseres Widerstandes sich dichter zusammendrängen müssen als an Stellen geringeres Widerstandes. Es sind vielmehr in der That hier die isoelektrischen Curven linker Hand trotz der Verzerrung dichter als rechts, und nur, weil überhaupt mehr Raum vorhanden ist, nicht so dicht als in einem symmetrischen flachen Erreger-

paare, wo die Seitenfläche rechts ebenso weit von k_1 abstehen würde als die linke von z_1. In ähnlicher Weise kann man nun für das Paar $z_2 k_2$ und für das Paar $z_3 k_3$ diejenigen 17 isoelektrischen Curven zeichnen, auf denen die Spannung 8, 7, 6 .... — 6, — 7, — 8 statthaben würden, wenn $z_2 k_2$ oder $z_3 k_3$ allein in Thätigkeit wäre. In Fig. 121 sind die drei Systeme isoelektrischer Curven in dasselbe Rechteck eingezeichnet. Grösserer Uebersichtlichkeit wegen ist das zum ersten Paare $z_1 k_1$ gehörige stark ausgezogen; das zu $z_2 k_2$ gehörige ist durch feine und das zu $z_3 k_3$ gehörige durch punktirte Linien angedeutet. Für diejenigen Punkte, wo sich drei Curven — den drei Systemen angehörig — schneiden, kann man jetzt unmittelbar die Spannung angeben, welche dort herrscht, wenn alle drei Paare zusammen wirksam sind. Z. B. muss der mit 16 bezeichnete Punkt des linken Randes in der That die Spannung 16 haben; denn wie man aus der Abzählung der drei dort einschneidenden Curven ersieht, würde dort vermöge der Wirkung des Paares $z_1 k_1$ die Spannung + 6, vermöge $z_2 k_2$ die Spannung + 5 und vermöge $z_3 k_3$ die Spannung + 5 Platz greifen: Die Summe dieser drei Spannungen ist + 16. Der Punkt am oberen Rande mit — 2 bezeich-

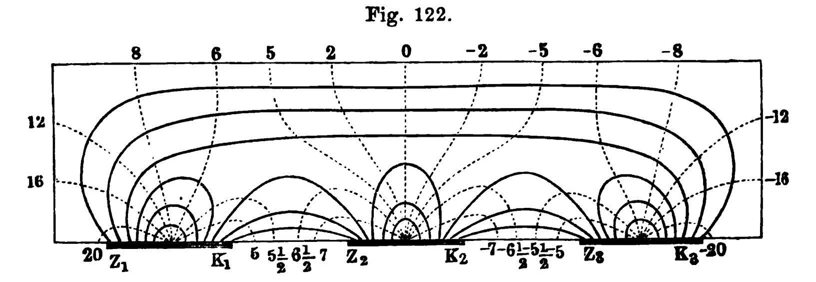
Fig. 121.



net, würde (um noch ein Beispiel auszuführen) von $z_1 k_1$ die Spannung — 2, von $z_2 k_2$ die Spannung — 1, von $z_3 k_3$ die Spannung + 1 erhalten; es ist aber die algebraische Summe $-2 + 1 - 1 = -2$. So sind die am Rande herum geschriebenen Zahlen berechnet. Nur bei den Zahlen 5 rechts von k_1 und — 5 links von z_3 ist noch eine Interpolation zu Hülfe genommen, weil hier keine vom ersten und dritten Paare wirklich gezeichneten Curven ausmünden. Was den Punkt 5 betrifft, so erhält er von $z_2 k_2$ aus die Spannung + 7, von $z_1 k_1$ aus aber (weil er zwischen der Kupferfläche dieses Paares und der Curve mit der Spannung — 8 liegt) etwa die Spannung — $8^1/_2$, und von $z_3 k_3$ aus (weil er zwischen den Curven 7 und 6 liegt) etwa die Spannung + $6^1/_2$; es ergiebt sich die algebraische Summe $+ 7 - 8^1/_2 + 6^1/_2 = + 5$; dem Punkte — 5 müssen wir schon wegen der Symmetrie die Spannung — 5 zuschreiben. Fassen wir das Resultat der ganzen Betrachtung noch einmal zusammen, indem wir am Rande der Figur herumgehend den Gang der Spannungen beachten: Die erste Zinkfläche z_1 mag als erste isoelektrische Fläche die Spannung + 21 haben; gehen wir von

ihrem linken Ende weiter, so kommen wir continuirlich zu Spannung 20; dann um die linke untere Ecke am linken Rande zur Spannung 16, 12 u. s. w.; immer noch stetig nimmt am oberen Rande die Spannung durch Null hindurch ab und bekommt auf der rechten Seite negative Werthe. Diese stetige Abnahme geht bis zur dritten Kupferfläche k_3, wo die Spannung $= - 21$ sein muss. Die daran stossende Zinkfläche z_3 muss — das fordert schon ohne weitere Rechnung die constante elektromotorische Differenz — eine um 18 Einheiten höhere Spannung $= - 3$ besitzen. Gehen wir von z_3 aus wieder am Rande weiter, so fängt die Spannung wieder an stetig abzunehmen; von — 3 nimmt sie ab auf — 5, von da auf — 7, und auf der Kupferplatte k_2 wird sie den Werth — 9 haben. An der Berührungsstelle zwischen k_2 und z_2, muss wieder eine sprungweise Zunahme um 18 Einheiten stattfinden, so dass auf z_2 die Spannung + 9 kommt. Endlich sehen wir zwischen z_2 und k_1 wieder eine stetige Abnahme von + 9 durch die Werthe + 7 und + 5 zum Werthe + 3, welcher auf der Kupferplatte k_1 stattfindet, was denn auch damit zusammentrifft, dass auf z_1 die Spannung $21 = + 3 + 18$ angenommen wurde.

Fig. 122.



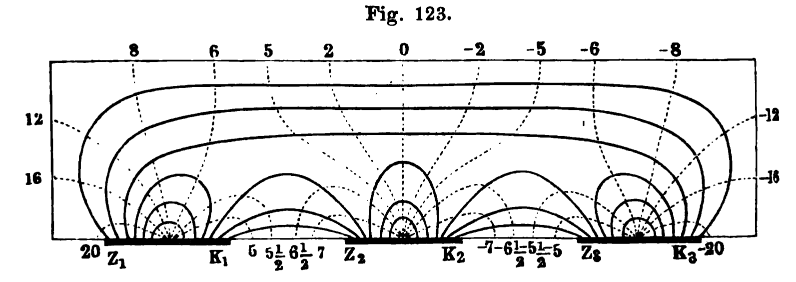
Nach den soeben abgeleiteten Resultaten können wir nun mit Hülfe der allgemeinen Eigenschaften der isoelektrischen Flächen und Strömungscurven diese und jene verzeichnen, mit der Genauigkeit, die überall mit der blossen Anschauung zu erreichen ist. In Fig. 122 ist dies geschehen. Ueber die isoelektrischen (punktirten) Curven der Figur ist zunächst Folgendes zu bemerken. Die Spannungen zwischen + 3 und + 9, sowie zwischen — 3 und — 9 kommen zweimal am Rande der Figur vor. Zwei solche Punkte gleicher Spannung — z. B. der Punkt mit der Spannung + 5 am oberen, und der Punkt mit der Spannung + 5 am unteren Rande — können aber nicht auf einer isoelektrischen Fläche liegen, weil diese sonst den Leiter in zwei vollständig getrennte Stücke theilen würde und der Elektricität keinen Weg offen liesse, um von ihrer einen zu ihrer anderen Seite zu kommen, ohne sie selbst zu durchsetzen (siehe S. 350). Es müssen also jedem Spannungswerth zwischen + 3 und + 9, sowie jedem zwischen — 3 und — 9 zwei isoelektrische Curven entsprechen, die von verschiedenen elektromotorischen Scheidungsstellen ausgehen. So sieht man z. B. von der Berührungsstelle des Paares $z_1 k_1$

eine isoelektrische Curve mit der Spannung + 5 ausgehen und an dem unteren Rande der Figur einmünden. Eine zweite isoelektrische Curve mit der Spannung + 5 geht von der Berührungsstelle des Paares $z_2 k_2$ aus, um am oberen Rande die Oberfläche zu treffen, u. s. w. Vermöge dieser eigenthümlichen Spannungsvertheilung gestaltet sich nun auch die Elektricitätsbewegung in besonderer Weise. Verfolgen wir ein elektrisches Theilchen, das in der ersten Strömungscurve links dicht am Punkte z_1 die erste Zinkfläche verlässt. Es beginnt seinen Kreislauf mit der Spannung + 21, geht dann, indem es nahe an der Begrenzungslinie der Figur die isoelektrischen Flächen durchsetzt, stetig zu immer geringeren Spannungen über und kommt mit der Spannung — 21 bei k_3 wieder auf Metall. Die elektromotorische Kraft des Paares $z_3 k_3$ vermag es nun von dem Punkte mit der Spannung — 21 zu einem Punkte überzuführen, der eine um 18 Einheiten höhere Spannung besitzt — d. h. zu der Zinkfläche des dritten Paares, auf der ja die Spannung — 3 = — 21 + 18 herrscht; hier angekommen, gehorcht es nun wieder den anziehenden und abstossenden Kräften der frei vertheilten elektrischen Massen, und strebt von Punkten höherer zu Punkten niederer Spannung. Es verlässt somit das Zink dicht bei z_3 und bewegt sich in dem zwischen z_3 und k_2 flach gespannten Bogen, wie man sieht, durch die isoelektrischen Curven mit den Spannungswerthen — 5, — $5^1/_2$ etc., also mit stetig abnehmender Spannung nach dem Kupfer k_2 hin. In dem zweiten Paare angelangt, wird es wieder vermöge der dort wirkenden elektromotorischen Kraft zu einem Punkte befördert, dessen Spannung um 18 Einheiten höher ist, d. h. vom Kupfer des zweiten Paares zum Zinke desselben. Von z_2 geht es wieder aus mit der Spannung + 9 und kommt durch die Flüssigkeit mit stetig abnehmender Spannung zum Kupfer k_1, wo die Spannung + 3 herrscht. Endlich wird es durch die elektromotorische Kraft des ersten Paares wieder auf dessen Zink mit der Spannung + 21 gehoben und kann alsdann den beschriebenen Kreislauf von Neuem beginnen. Dieser lange Kreislauf mit drei elektromotorischen Erhebungen auf höhere Spannung wird in einer ganzen Reihe von Strömungscurven vollzogen; in der Fig. 122 sind als Beispiele drei davon gezeichnet. Daneben kommen aber in unserem Apparate noch vor jedem Paare kurz umbiegende Strömungscurven vor, die nicht alle isoelektrischen Curven durchsetzen. Ebenfalls drei solcher Curven sind in der Figur vor jedem Paare gezeichnet. In einer kurzen Curve des ersten Paares sinkt, wie man sieht, ein vom Zink ausgehendes Theilchen von der Spannung + 21 nur herab bis zur Spannung + 3, fliesst mit dieser in der Kupferfläche k_1 und wird dann durch die elektromotorische Kraft $z_1 k_1$ wieder zur Zinkfläche z_1 mit der Spannung + 21 hinaufgeschafft und kann so ohne Weiteres seinen kleinen Kreislauf von Neuem beginnen. In ähnlicher Weise sinken die elektrischen Massen in den kleinen Strömchen vor dem Paare $z_2 k_2$ und $z_3 k_3$ bloss von der Spannung + 9 bis — 9, und von der Spannung — 3 bis — 21, um hernach

durch die Wirkung einer einzigen elektromotorischen Kraft wieder auf die erste gehoben zu werden.

Von der hier behandelten Vorrichtung ist der Uebergang zu einer Reihe dipolarer elektromotorischer Molekel, wie sie Seite 375 beschrieben wurden, leicht zu machen. 1) Die Hinzufügung neuer flacher Erregerpaare in der Längenrichtung würde offenbar nur das Quantitative des Vorganges beschlagen, im Wesen bliebe er derselbe, d. h. man hätte neben Partialströmchen mit der einfachen Spannungsdifferenz der elektromotorischen Kraft vor jedem Paare einen Gesammtströmungsvorgang, der sämmtliche Paare durchsetzte und in dessen Kreise eine grössere Spannungsdifferenz wirksam wäre. 2) Ein halbkreisförmiges Hineinbiegen der flachen Erregerpaare in die Masse des Leiters kann ebenfalls keine wesentlichen Aenderungen bedingen. 3) Man lasse die ganze Vorrichtung zusammenschrumpfen auf eine unendlich dünne keilförmige Schicht. Die Seitenflächen derselben sollen beide auf der Wand des zuerst gedachten Parallelepipeds, welche die flachen Erregerpaare enthielt, nahezu senkrecht stehen. Die Linie, in welcher sie sich schneiden,

Fig. 123.



soll die Grundlinie der Fig. 123 sein. Auch in der so veränderten Vorrichtung wird immer noch ein der Fig. 123 analoger Strömungsvorgang stattfinden. Sie ist aber nunmehr nichts Anderes als das keilförmige Element einer cylindrischen Reihe von dipolaren elektromotorischen Molekülen, aus dieser herausgeschnitten, durch zwei in der Axe unter sehr kleinem Winkel sich treffende Ebenen. Was also an der langen schmalen Seite den elektromotorischen Paaren gegenüber (an der oberen Langseite Fig. 123) gilt, das muss an dem ganzen Mantel der cylindrischen Molekelreihe gelten, und was von den kurzen Seiten der Vorrichtung gesagt wurde, lässt sich sofort auf jeden Radius der Endfläche der cylindrischen Reihe übertragen. Endlich gilt von der Axe des Cylinders Alles, was von der Schneide des keilförmigen Apparates (untere Grenze der Fig. 123) bewiesen wurde. Dass wir uns oben Seite 375 den unwirksamen Leiter, in den die Reihe elektromotorischer Moleküle eingebettet war, vierseitig prismatisch statt cylindrisch begrenzt dachten, ist eine ganz gleichgültige Abänderung, die nur gerade erwähnt zu werden braucht, ohne dass wir weiter Gewicht darauf legen. Wir können demnach von der Oberfläche einer dipolaren Molekülreihe Folgendes aus-

sagen: Die höchste Spannung herrscht an der Endfläche, welcher die Moleküle ihre positiven Pole zukehren, die niedrigste an der gegenüber liegenden; die Differenz zwischen diesen beiden Spannungen wird mit zunehmender Länge der Reihe (wenn auch nicht gerade proportional) zunehmen. An den langen Seitenflächen nimmt die Spannung stetig ab von der positiven bis zur negativen Endfläche. Ein ableitender Bogen, an die Reihe angelegt, wird also nach dem Principe der elektromotorischen Oberfläche unter allen Umständen einen Strom führen — es wird keine unwirksame Anlegung geben können. Es ist dabei vorausgesetzt, dass der Bogen der Länge nach an die dipolare Molekelreihe angelegt wird. Die Stärke des abgeleiteten Stromzweiges wird mit der Spannweite des ableitenden Bogens *ceteris paribus* zunehmen, vorausgesetzt, dass der Widerstand im Leiter vernachlässigt werden darf; denn je weiter die Bogenfüsse aus einander stehen, um so grösser ist die Spannungsdifferenz der Oberflächenpunkte, auf denen sie stehen. Die Richtung des abgeleiteten Stromarmes geht allemal im Bogen von dem Fuss, der dem positiven Endquerschnitt näher, zu dem, welcher von diesem ferner angelegt ist.

Zweites Capitel.

Anwendung der allgemeinen Grundsätze auf Elektrotherapie.

Bei der Elektrotherapie haben wir es in der Regel mit elektrischen Strömen in nichtlineären, sondern nach allen drei Dimensionen ziemlich gleichmässig ausgedehnten Leitern zu thun, denn der Zweck der Elektrotherapie im engeren Sinne des Wortes ist ja, die erregbaren Gewebe, Nerven und Muskeln in ganz unregelmässig gestalteten Theilen des menschlichen Körpers elektrisch zu erregen. Die im vorigen Capitel entwickelten Grundsätze über Bewegung der Elektricität in körperlichen Leitern kommen also hier zur unmittelbaren Anwendung.

Legt man zwei Elektroden einer stromerregenden Vorrichtung an zwei beliebige Stellen eines menschlichen Körpers an, so breitet sich die Elektricität, welche bis zur positiven Elektrode auf den Leitungsdraht zusammengedrängt gewesen war, in dem menschlichen Körper nach allen Seiten aus, um sich erst an der negativen Elektrode wieder zu vereinigen und, von Neuem auf den Leitungsdraht zusammengedrängt, nach dem negativen Pol der elektromotorischen Vorrichtung hinzufliessen. Der ganze menschliche Körper wird, theoretisch betrachtet, von Strömungscurven erfüllt sein. In keinem Punkte desselben wird vollständige

Ruhe der elektrischen Fluida stattfinden. Dies gilt ebensowohl, wenn die Elektroden mit den Polen einer constanten galvanischen Kette in Verbindung stehen, als wenn sie mit einem Apparate verknüpft sind, der nur zeitweise kurz dauernde Ströme liefert, wie z. B. die viel gebrauchten Inductionsapparate. Natürlich im letzteren Falle gilt die Erfüllung des ganzen Körpers mit elektrischen Strömungscurven nur für die Zeiträume, während welcher der Apparat überhaupt Ströme liefert. Hiernach scheint es, als könne man gar nicht einzelne Theile des menschlichen Körpers isolirt der Einwirkung der Elektricität aussetzen. In der That ist es, streng genommen, absolut unmöglich, und dies ist ein Satz, der gar nicht genug eingeschärft werden kann. Sobald in einer zusammenhängenden Leitermasse — und eine solche stellt der menschliche Körper dar — irgendwo das elektrische Gleichgewicht gestört wird, so kann es darin gar nirgends mehr vollkommen erhalten bleiben.

Wenn von Einschränkung der Wirkung elektrischer Ströme auf einzelne Theile des menschlichen Körpers die Rede ist, so kann immer nur eine relative Einschränkung gemeint sein, und diese ist allerdings möglich. Man kann es nämlich leicht dahin bringen, dass nur an besonderen Stellen die Stromdichtheit so gross ist, dass daselbst eine merkliche physiologische Wirkung ausgeübt wird, während in den übrigen Theilen des Leibes die Stromdichtheit so klein ist, dass ihre physiologische Wirkung nicht in Betracht kommt. Es ist nun vor allen Dingen ersichtlich, dass die elektrische Strömung unbedingt am dichtesten ist in der Hautstelle, wo die kleinere von beiden Elektroden (wofern sie nicht beide gleich sind) angelegt ist, denn von hier aus breitet sie sich sofort über grössere Querschnitte (isoelektrische Flächen) aus. Ist die eine Elektrodenfläche sehr klein und die andere sehr gross, dann ist es allerdings möglich, dass in einiger Tiefe unter der ersteren, z. B. in einem daselbst gelegenen Muskel, die Stromdichtheit noch immer grösser ist, als unmittelbar unter der *grossen* Elektrode, aber dichter als unter der *kleineren* Elektrode, kann sie wie gesagt *nirgend* sein. Es wird daher wohl nicht möglich sein, ein in der Tiefe gelegenes Gebilde (Muskel oder Nerv) zu reizen, ohne wenigstens an einer Stelle, nämlich da, wo die kleinere Elektrode anliegt, auch die Hautnerven zu reizen. Mit ganz unzweifelhafter Gewissheit geht dies zwar noch nicht aus der vorstehenden rein physikalischen Betrachtung hervor. Obgleich nämlich unter der kleineren Elektrode die Stromdichtheit im Allgemeinen am grössten ist, könnte sie doch möglicherweise gerade in den hier gelegenen *Nervenenden* nicht so sehr gross sein, wofern der Leitungswiderstand der nervösen Gebilde bedeutend grösser ist, als der des umgebenden Hautgewebes. In der That gehört bekanntlich das Nervengewebe zu den schlechter leitenden des thierischen Körpers, aber etwas Bestimmtes lässt sich hieraus doch nicht in Betreff der vorliegenden Frage folgern, namentlich auch darum nicht, weil die Leitungsfähigkeit der in der Haut liegenden nervösen Endorgane nicht ohne Weiteres mit der der Nervenstämme

gleich gesetzt werden kann. Ferner kommt auch noch eine rein physiologische Frage in Betracht. Es könnte nämlich, selbst vorausgesetzt, dass auch wirklich die Stromdichtheit in den Hautnervenenden höher ist als in den tiefer liegenden Geweben, hier eine Reizung zu Stande kommen, dort nicht, weil etwa die Erregbarkeit der tiefer gelegenen Theile grösser wäre als die der Hautnervenenden. Dies ist jedoch, soweit die Physiologie darüber gegenwärtig Aufschluss geben kann, nicht der Fall, und es scheint auch wirklich niemals eine Erregung irgend eines tiefer gelegenen Gebildes, sei es Muskel oder Nervenstamm, zu Stande zu kommen, ohne dass an der Anlegungsstelle, wenigstens der kleineren Elektrode, auch Erregung in einigem Grade stattfindet.

Gleichwohl ist es eine bekannte Erfahrung aller Elektrotherapeuten, dass bei gehöriger Durchfeuchtung der Haut an den Anlegungsstellen der Elektroden die Erregung der Hautnerven wenig hervortritt und namentlich sich selten bis zum Schmerzhaften steigert, selbst bei so hohen Werthen der Stromstärke, dass tiefer gelegene Muskeln zur stärksten Zusammenziehung kommen. Dahingegen wird die Erregung der Hautnervenenden unter den Elektroden, wenn diese mit blanken Metallflächen die trockene Haut berühren, ausserordentlich stark, schon für Werthe der Stromstärke, bei denen kein Muskel in der Tiefe zuckt. So kann es sich ereignen, dass unter sonst genau gleichen äusseren Bedingungen — d. h. bei gleicher Stellung des Inductionsapparats gleich grosser Elektrodenflächen etc. — bei feuchter Anlegung der Elektroden, namentlich wenn sie stark angedrückt werden, sich Muskeln contrahiren und in der Haut kaum merkliche Gefühle zu Stande kommen, während bei trockener Anlegung der peinlichste Schmerz in der Haut gefühlt wird, aber die Muskeln in Ruhe bleiben.

Versuchen wir es, von dieser rein empirisch festgestellten Regel uns physikalisch Rechenschaft zu geben. Zuerst haben wir uns zu fragen, welchen Unterschied wohl die trockene und feuchte Anlegung der Elektroden im Strömungsvorgange bedingen wird. Wir wissen, dass die trockene Oberhaut des Menschen fast Nichtleiter der Elektricität ist, dass sie dagegen im durchfeuchteten Zustande einigermaassen leitend ist. Bei trockener Anlegung der Elektroden wird also, besonders, wenn sie noch dazu weit aus einander liegen, wegen des ungeheuren Leitungswiderstandes — das ist vor Allem klar — weit weniger Elektricität durch den Körper abgeglichen, als bei feuchter Anlegung. Die Schwankungen der Intensität des Gesammtstromes, wenn ein Inductionsapparat zur Reizung angewandt wird, geschehen demnach zwischen viel weniger von einander verschiedenen positiven und negativen Maximis, wenn die Elektroden trocken, als wenn sie feucht angelegt sind. Es ist daher leicht begreiflich, dass bei trockener Elektrodenanlegung in der Tiefe der Gewebe, und namentlich in den Muskeln, nirgend hinlänglich umfangreiche Dichtigkeitsschwankungen vorkommen, um eine Reizung des Muskels (sei es unmittelbar, sei es vermittelst der motorischen Nervenfäden) zu bewirken.

Am allerwenigsten wird dann eine Reizung der Muskeln zu erwarten sein, wenn die beiden Elektroden weit aus einander gelegt sind; alsdann breitet sich der Strom ziemlich gleichmässig über den Querschnitt des ganzen Gliedes, woran sie angelegt sind, aus, und kann natürlich nirgend zu bedeutender Dichtheit anschwellen, selbst wenn die ganze abgeglichene Elektricitätsmenge viel bedeutender wäre, als sie es in Wirklichkeit ist. Wie kommt es nun aber, dass gleichwohl gerade in diesem Falle die Erregung der Hautempfindungsnerven an der Anlegungsstelle der Elektroden am stärksten ist? Die Antwort ist, glaube ich, so zu geben. Wegen der ungeheuer geringen Leitungsfähigkeit der trockenen Oberhautsubstanz wird wohl die Elektricität gar nicht in einem zusammenhängenden Strome aus der Elektrode hervorquellen; die ganze Elektricitätsmenge wird sich vielmehr in einzelne Strahlen vertheilen, in denen dann die Dichtheit sehr bedeutend ist, weil eine gewisse Elektricitätsmenge (die freilich nicht im Ganzen sehr gross ist) auf einen verhältnissmässig *sehr kleinen* Querschnitt zusammengedrängt ist, nämlich auf den Gesammtquerschnitt der einzelnen Strahlen. Jedesmal da, wo die Oberhaut sehr dünn oder gar durchlöchert (Schweisscanäle) ist, wird ein solcher Strahl dieselbe durchbrechen; trifft er hier gerade die Endigung eines Empfindungsnerven, so wird er denselben stark reizen, sofort aber, nachdem er einmal die schlechtleitende Oberhautschicht hinter sich hat und in nahezu gleichmässig leitender Substanz angekommen ist, löst sich der gewissermaassen zusammengedrängt gewesene Strahl in einzelne Stromfäden auf, die nun, wie schon ausgeführt wurde, das ganze Glied stetig erfüllen, und eben deshalb ist hier nirgend eine namhafte Stromdichtigkeit zu finden.

Ganz anders gestaltet sich der Vorgang bei feuchter Anlegung der Elektroden. Dass 1) in diesem Falle wegen der erhöhten Leitungsfähigkeit der Epidermis im Ganzen weit mehr Elektricität durch den Körper abgeglichen wird, wurde schon oben angeführt. 2) Bildet aber jetzt die aus der positiven Elektrode hervorquellende Elektricität einen zusammenhängenden Strom, sie braucht, eben weil die ganze Oberhaut vermöge der Durchfeuchtung leitend geworden ist, nicht mehr deren Lücken aufzusuchen, sondern kann sich durch ihre Substanz selbst ergiessen. Hieraus folgt aber, dass sie an der Anlegungsstelle in den oberflächlichsten Hautschichten nirgend mehr den Grad der Dichtigkeit erreicht, den sie vorher in jenen einzelnen isolirten Strahlen erreichte; denn wenn auch jetzt im Ganzen mehr Elektricität strömt, so ist sie auch auf einen unverhältnissmässig grösseren Querschnitt vertheilt; der Querschnitt des Stromes an der Anlegungsstelle ist nämlich offenbar jetzt die ganze Berührungsfläche zwischen Elektrode und Haut, während vorher an derselben Stelle der Gesammtquerschnitt nur die Summe der Querschnitte der einzelnen Stromstrahlen war. Daher kommt es, dass im Falle feuchter Elektroden die Hautnervenenden weit weniger gereizt werden. Ganz *ungereizt* bleiben sie freilich auch hier nicht; eine gelinde Empfindung

hat man immer noch in der Hautstelle, die mit den feuchten Elektroden berührt wird, nur steht ihre Intensität in gar keinem Verhältniss zu den stechenden Schmerzen, die eine trockene Anlegung verursacht.

Wir haben jetzt noch zu untersuchen, wie man eine relativ locale Muskelreizung erzielen könne. Erläutern wir dies durch ein Beispiel. Sei in Fig. 124 die eine Elektrode in der Nähe der Schulterhöhe, die andere am Vorderarme — beide feucht — angelegt. Vergleicht man nun die verschiedenen Wege, welche die Elektricität in dem Arme einschlagen kann, so ergiebt sich, dass sie alle von ziemlich gleicher Länge und folglich ziemlich gleichem Widerstande sind. Zu grösserer Deutlichkeit sind einige Strömungscurven in der Figur gezeichnet. Man sieht, dass ihre Längen nicht sehr bedeutend differiren; der Strömungsvorgang wird deshalb in einer nahezu ebenso stark sein als in der anderen. Die ganze sich abgleichende Elektricitätsmenge wird sich also über den



Fig. 124. Fig. 125.



Gesammtquerschnitt des Armes gleichmässig vertheilen. Sie wird daher nirgend die nöthige Dichtheit erlangen, um die auf ihrem Wege gelegenen Muskeln zu reizen. Nur wenn die abgeglichene Elektricitätsmenge ganz enorm gross ist, dann steigt doch die Dichtheit bis zu dem erforderlichen Grade, dann aber auch auf dem ganzen Querschnitte gleichmässig, und so sehen wir, z. B. wenn wir die Elektroden übermässig starker Vorrichtungen in beide Hände nehmen, die sämmtlichen Muskeln beider Arme in krampfhafte Contraction gerathen. Die Musculatur des Rumpfes bleibt jedoch selbst in diesem Falle in Ruhe, weil hier die strömende Elektricität über einen gar zu grossen Querschnitt gleichmässig vertheilt ist, um selbst in der Menge, wie sie von den stärksten gebräuchlichen Apparaten geliefert wird, irgendwo die zur Muskelreizung erforderliche Dichtigkeit zu erlangen. Denken wir uns dagegen jetzt nicht, wie in Fig. 124, sondern wie in Fig. 125, die beiden feuchten Elektroden dicht neben einander angelegt; beide beispielsweise über den *Musc. deltoideus*. Die Figur zeigt eine Reihe von Strömungscurven, d. h. Wegen, welche

die Elektricität von einer zur anderen Elektrode einschlagen kann. Man sieht sogleich, dass dieselben im Gegensatze zu Fig. 124 an Länge ausserordentlich verschieden sind. Es wird also auch in ihnen die Stromintensität sehr verschieden sein. Auf den kürzeren Bahnen wird ungleich mehr Elektricität zur Abgleichung kommen als auf den längeren. Das Verhältniss dieser Mengen ist in der Figur dargestellt durch die Dicke der Linien, welche die Strömungscurven andeuten. Aus dieser Betrachtung erhellt, dass in unserem Beispiel in der zunächst unter den Elektroden gelegenen Partie des *Musc. deltoideus* (da, wo die kurzen, dick gezeichneten Curven verlaufen) eine sehr grosse Stromdichtheit wechselweise eintritt; selbst wenn die im Ganzen abgeglichenen Elektricitätsmengen nicht sehr gross sind, weil eben der überwiegend grösste Theil derselben auf einen engen Querschnitt zusammengedrängt ist. In den entfernteren Gegenden und im *Musc. biceps*, *pectoralis major* etc. steigt dagegen die Dichtheit nie sehr hoch. Während also die bezeichnete Partie des Deltoideus in Erregung versetzt wird, bleiben die anderen Muskeln in Ruhe. Aus der Erläuterung dieses einen Beispiels wird das ganze Princip der localen elektrischen Muskelreizung hinlänglich klar sein.

Aus vorstehenden allgemeinen Betrachtungen lassen sich die in jedem einzelnen Falle anzuwendenden Handgriffe leicht ableiten. Es stimmt dazu auch unter anderen vortrefflich die auf Erfahrungen gegründete Bemerkung Duchenne's[1]), dass man eine mit sehr dicker Epidermis überzogene Hautstelle doch ein wenig anfeuchten solle, wenn man sie reizen will. Offenbar würde nämlich eine sehr dicke Hornschicht im ganz trockenen Zustande als vollkommener Nichtleiter den Strom ganz verhindern. Eine mässige Befeuchtung macht hingegen deren oberste Schichten leitend und wirkt demnach ähnlich wie eine Verdünnung. Bei der Hautreizung muss die Form der einen, eigentlich reizenden Elektrode den Umständen angepasst werden. Die andere, an einer von der zu reizenden weit entfernten und möglichst unempfindlichen Hautstelle angelegte Elektrode kann allemal die Form eines nassen Schwämmchens haben. Die üblichsten Formen der reizenden Elektrode sind volle Metallelektroden und Metallfäden. Ueber die Formen und die Behandlung voller Metallelektroden ist nichts Besonderes zu bemerken. Die metallischen Fäden werden vorzugsweise gern in grösserer Anzahl besenartig zusammengebunden und an Holzgriffen befestigt angewandt. Mit diesen Besen kann die Haut leicht gepeitscht werden („elektrische Geisselung“), was eine ganz ausserordentlich wirksame Reizung der Hautnerven abgiebt.

Als feuchte Elektroden zur Muskelreizung dienen am besten knopfartig gestaltete, mit recht dünnem Leder überzogene Metallstücke. Das

---

[1]) Duchenne-Erdmann, die örtliche Anwendung der Elektricität etc. Leipzig, 1856. S. 20.

Leder wird wohl durchfeuchtet und die Stücke werden grösser oder kleiner genommen, je nach der Grösse des zu reizenden Muskels. Häufig wendet man auch feuchte Schwämme an, die in cylindrische Röhren gesteckt werden, so dass sie nur wenig daraus hervorragen. Schwämme bieten jedoch mehr Widerstand als eine dünne feuchte Lederschicht, und sind daher jene erstbeschriebenen Elektroden im Allgemeinen vorzuziehen. Die Form der Stiele und Griffe für die Elektroden kann hier nicht näher besprochen werden. Es versteht sich von selbst, dass sie den anatomischen Verhältnissen angepasst werden muss, wo es sich um Reizung innerer Theile (Blase, Mastdarm etc.) handelt. Unpolarisirbarkeit der Elektroden scheint für die Elektrotherapie kein wesentliches Erforderniss, namentlich wo es sich um Anwendung inducirter Wechselströme handelt. Sie wäre übrigens leicht herstellbar. Man brauchte nur die metallische Elektrodenfläche aus amalgamirtem Zink herzustellen und dieselbe zu überziehen mit Leder, welches in Zinkvitriollösung getränkt wäre.

Muskeln können, wenn gewisse anatomische Bedingungen gegeben sind, auch indirect zur isolirten Zusammenziehung gebracht werden. Der zum Muskel tretende Nerv muss an irgend einer Stelle nahe unter der Haut liegen und an dieser Stelle in nicht reizbare Gewebe eingebettet sein. Setzt man hier feuchte Elektroden dicht bei einander auf, so wird aus den oben entwickelten Gründen im Nerven eine stark schwankende Elektricitätsabgleichung stattfinden; der Nerv kommt also in den Reizzustand und die von ihm abhängigen Muskeln ziehen sich zusammen. Wäre freilich der fragliche Nerv da, wo er oberflächlich liegt, von Muskeln umgeben, so würden von diesen bei dem beschriebenen Verfahren grössere oder kleinere Theile mit in Zusammenziehung gerathen. Auf den Nerven würde sich nämlich der Strom um so weniger beschränken, da sein Leitungsvermögen von dem des Muskels bedeutend übertroffen wird.

Vollkommen gleiche und in gleicher Weise angebrachte elektrische Reizungen bringen nicht bei allen Muskeln gleich starke Zusammenziehungen hervor. Die Elektrotherapeuten [1]) schreiben daher verschiedenen Muskeln eine verschiedene elektrische Reizbarkeit zu. Es ist an sich durchaus nicht unwahrscheinlich, dass die verschiedenen Muskeln des Körpers nicht gerade absolut gleiche elektrische Reizbarkeit besitzen, aber wenn derselbe elektromotorische Apparat an verschiedenen Hautstellen angelegt, die unterliegenden Muskeln in verschiedenem Maasse reizt, so ist doch nur mit grosser Vorsicht auf eine verschiedene specifische Reizbarkeit derselben zu schliessen, denn es können vielerlei Nebenumstände bewirken, dass trotz der gleichen elektromotorischen Kraft der eine Muskel eine ganz andere Stromdichtigkeit erhält als der andere. Vor Allem muss offenbar die Dicke der als Nebenschliessung wirkenden Haut und Unterhautzellgewebschicht von bedeutendem Einfluss sein. Fer-

[1]) Duchenne-Erdmann S. 25.

ner wird wohl auch ein Muskel auf den gleichen Reiz mit ausgiebigeren und namentlich einen grösseren Theil seiner Fasern beschlagenden Zusammenziehungen antworten als ein anderer, wenn vermöge der besonderen anatomischen Verhältnisse die elektrischen Entladungen gerade grössere Aeste des in ihm sich verbreitenden Nerven treffen. Eine genaue Untersuchung dieser Dinge erspart es uns vielleicht in vielen Fällen, zu physiologischen Besonderheiten gewisser Muskeln unsere Zuflucht zu nehmen, wenn auch im Allgemeinen die Annahme solcher nichts Unwahrscheinliches hat.

Duchenne hat die Erfahrung gemacht, dass der sogenannte Extrastrom [1]) mehr geeignet ist, die Muskeln zur Contraction zu bringen, während der Strom der inducirten Rolle mehr auf die Hautempfindung wirkt. Es scheint mir, als erkläre sich diese Verschiedenheit sehr leicht aus den Nebenbedingungen der Versuche, in Verbindung mit der gewöhnlichen Einrichtung der Inductionsapparate. Bekanntlich besteht in der Regel die inducirte Rolle aus sehr vielen Windungen eines äusserst feinen Drahtes, während die inducirende weit weniger Windungen eines dicken Drahtes besitzt. Wenn kein fremder Widerstand vorhanden ist, jede der beiden Rollen z. B. in den geeigneten Augenblicken durch unmittelbares Aneinanderlegen ihrer Enden für sich geschlossen würde, so dürfte wohl der Extrastrom in der inducirenden Rolle bei den meisten Apparaten eine sehr viel bedeutendere Intensität besitzen, als der in der inducirten Rolle, weil in der einzelnen Windung der ersten Rolle eine grössere elektromotorische Kraft wirkt, eine Summation der elektromotorischen Kräfte der Windungen aber nicht zur Vermehrung der Stromstärke beitragen kann, da die Widerstände in demselben Verhältniss wachsen. Kommt nun aber ein fremder Widerstand ins Spiel, so kann sich die Sache umkehren. Bei der Muskelreizung, sahen wir, werden die Elektroden feucht und nahe bei einander angelegt, d. h. ein unbedeutender Widerstand eingeschaltet. Es werden daher die wenig zahlreichen elektromotorischen Kräfte des Extrastromes in der immer noch wenig Widerstand bietenden Bahn, die aus der dickdrahtigen inducirenden Rolle und dem Muskel besteht, hinlänglich starke Ströme erzeugen, um den Muskel zur Zusammenziehung zu bringen. Sie reichen aber nicht aus, um in der den kolossalen Widerstand einer trockenen Epidermis enthaltenden Bahn bei der üblichen Hautreizung starke Ströme hervorzubringen, wie sie zu einer energischen Hautreizung erfordert werden. Umgekehrt sind trotz der grösseren Gesammtsumme elektromotorischer Kräfte die

[1]) Extrastrom nennt man bekanntlich den in der inducirenden Rolle selbst inducirten Strom, der seine Entstehung der Wirkung verdankt, die jede Windung dieser Rolle auf die anderen ausübt. Duchenne selbst bezeichnet ihn in seinen Schriften sehr unglücklich als den „primären", obgleich er doch ein secundärer, d. h. inducirter ist, so gut wie der in der zweiten Rolle kreisende. Bei vielen käuflichen Inductionsapparaten sind übrigens keine Vorrichtungen angebracht, um den Extrastrom bequem abzuleiten.

Ströme der langdrahtigen inducirten Rolle, die durch den Widerstand des Muskels immer noch etwas, wenn auch in kleinerem Verhältniss, geschwächt werden, schon an sich nicht stark genug, um den Muskel in dem Grade zu reizen, wie es die Extraströme thun. Dahingegen ist bei dem grossen neu eingeführten Widerstande einer trockenen Epidermis die langdrahtige Rolle im Vortheil. Um es noch einmal kurz zusammenzufassen: Die grössten Stromintensitäten kommen ins Spiel bei kleinem Widerstande und inducirender Rolle, d. h. bei Muskelreizung durch den Extrastrom; etwas kleinere bei Muskelreizung durch den Strom der inducirten Rolle; viel kleinere bei Hautreizung durch denselben, und endlich die kleinsten bei Hautreizung durch den Extrastrom. Es ist bei dieser Betrachtung übrigens wieder stillschweigend vorausgesetzt — was auch schon oben bemerkt wurde —, dass zur Reizung der Empfindungsnerven mit trockener Anlegung der Elektroden offenbar eine viel geringere Gesammtstromstärke gehört als zur Muskelreizung.

Auch einige indirecte Anwendungen sind neuerlich von der Elektricität in der Therapie gemacht worden. Man hat nämlich einen im Kreise des galvanischen Stromes erglühenden Platindraht theils wie das chirurgische Messer, theils wie das *Ferrum candens* angewandt. Die Einzelheiten der zu solchen Zwecken angewandten Verfahrungsarten gehören natürlich nicht hierher. Nur mag hier noch erinnert werden an zwei rein physikalische Ueberlegungen, die dem galvanisch erglühenden Platindraht vor dem *Ferrum candens* den Vorzug geben. Einmal kann man ihn kalt mit aller Musse an die Stelle bringen, wo die hohe Temperatur einwirken soll, und ihn nachher an Ort und Stelle erst glühend machen, dadurch, dass man erst jetzt den vorher offenen Stromkreis schliesst. Ferner ist ein anderer Vorzug darin begründet, dass der Platindraht in sich selbst eine fortwährend fliessende Wärmequelle besitzt, die immer die Verluste ersetzt, welche er durch Ausstrahlung und Ableitung erleidet, so dass man eine gewisse Temperatur durch jede beliebige Zeitdauer einwirken lassen kann. Das *Ferrum candens* bringt bloss eine bestimmte Wärmequantität mit, die, einmal verloren, ihm nicht an Ort und Stelle wiedergegeben werden kann.

Die Wahl der elektromotorischen Apparate zu therapeutischen Zwecken ergiebt sich sehr leicht aus den einfachsten physikalischen Betrachtungen. Was die Inductionsapparate betrifft, so bedarf es hier keiner weiteren Bemerkungen. Diese Apparate sind genau in den für die Elektrotherapie zweckmässigsten Formen durch den Handel zu beziehen. Sollen länger dauernde Ströme angewandt werden, so müssen natürlich die Elektroden einer galvanischen Batterie direct an die zu reizenden Theile angelegt werden, und die nöthigen Unterbrechungen und Schliessungen des Kreises durch geeignete Vorrichtungen (Schlüssel etc.) irgendwo an passender Stelle besonders bewirkt werden. Der specifische Leitungswiderstand thierischer Gewebe ist bekanntlich mehrere Millionen Male grösser, als der der meisten Metalle. Man hat daher, sowie sich thierische Gewebe

im galvanischen Stromkreise befinden, darin regelmässig einen Leitungswiderstand, gegen welchen der Widerstand der galvanischen Kette selbst und der sonst unentbehrlichen Zuleitungsdrähte verschwindend klein ist. Nach dem Ohm'schen Gesetz [1]) wird also eine Veränderung des Leitungswiderstandes der Kette selbst keine merkliche Aenderung der Stromstärke bewirken können. Man kann insbesondere bei gegebener Anzahl der galvanischen Elemente nicht darauf rechnen, mit grossen Elementen gleicher Art, die weniger Widerstand bieten, einen wesentlich stärkeren Strom zu erzielen als mit kleinen. Die Anwendung grosser Elemente, von welcher Art sie auch seien, kann demnach als nutzlose Verschwendung bezeichnet werden. Dahingegen wächst in unserem Falle die Stromstärke offenbar der Anzahl der säulenartig hinter einander verbundenen Elemente nahezu proportional, denn mit dieser Anzahl wächst die elektromotorische Kraft proportional und der Widerstand des ganzen Kreises wird durch Hinzufügung neuer Elemente kaum merklich erhöht, da derselbe zum weit überwiegenden Theile gar nicht in den Elementen, sondern in den durchströmten thierischen Geweben liegt. Will man also mit möglichst geringen Mitteln einen möglichst starken Strom durch thierische Gewebe senden, so muss man recht viele kleine Elemente nehmen. Die Kleinheit der Elemente dürfte kaum eine andere Grenze haben, als die ihr durch die Unbequemlichkeit der Handhabung gesetzt wird. So wird man beispielsweise mit zehn fingerhutgrossen Grove'schen Bechern dasselbe leisten, wie mit zehn Grove'schen Bechern von den Dimensionen grosser Trinkgläser. Man kann sich leicht davon durch den Versuch überzeugen.

Genau das Entgegengesetzte gilt bei der Galvanokaustik, wenn es sich zum Zwecke chirurgischer Operationen darum handelt, einen kurzen Draht von ganz unbedeutendem Leitungswiderstande im galvanischen Stromkreise erglühen zu machen. Hier nützt es nichts, eine grosse Anzahl von Elementen zu nehmen. Da nämlich hier der Widerstand des ganzen Kreises fast allein in der Kette selbst liegt, so kann Vermehrung der Anzahl der Elemente bei gleicher Grösse derselben keine bedeutende Vermehrung der Stromstärke bewirken, weil der Widerstand des gesammten Stromkreises fast proportional mit der Vermehrung der elektromotorischen Kräfte wächst. Vergrösserung der einzelnen Elemente wird dagegen fast proportionale Steigerung der Stromstärke zur Folge haben; denn dadurch wird jetzt der gesammte Leitungswiderstand des Stromkreises fast proportional vermindert bei gleichbleibender elektromotorischer Kraft. Für den Zweck des Glühendmachens von Drähten wird man also mit Vortheil wenige recht grosse Elemente verwenden.

Welcher Art von galvanischen Elementen zu therapeutischen Zwecken am brauchbarsten seien, lässt sich nicht wohl allein aus bloss physikali-

---

[1]) Siehe Müller-Pfaundler Physik, Bd. III, S. 295 unter der Ueberschrift Ohm'sches Gesetz.

schen Erwägungen bestimmen. Es haben auf diese Wahl auch noch allerlei Nebenrücksichten berechtigten Einfluss. Wenn es auf grosse Stärke und Constanz des Stromes ankommt, so dürften aus rein physikalischen Gesichtspunkten die Grove'schen Elemente vor allen übrigen den Vorzug haben. Namentlich sollen sie, was die Constanz betrifft, den Daniell'schen Elementen überlegen sein, weil der Leitungswiderstand der Kupfervitriollösung viel stärker mit der Concentration variirt, als der der Salpetersäure. Dagegen führt die Anwendung der Grove'schen Elemente die Unbequemlichkeit der salpetrigsauren Dämpfe mit sich. In neuerer Zeit wendet man allgemein Zinkkohleelemente an, die ohne Diaphragma in verdünnte Schwefelsäure mit einem Chromsäurezusatz eintauchen. Sie sind allerdings nicht constant, doch scheinen sie den Anforderungen der Elektrotherapie vollständig zu genügen.

Drittes Capitel.

Anwendungen der Stromverzweigung.

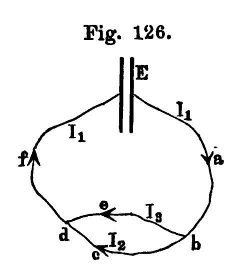
1. Abstufung der Stromstärke durch Nebenschliessung.

Es ist bei physiologischer und therapeutischer Anwendung der Elektricität stets erforderlich, dass man über die Stromstärke in den die thierischen Theile enthaltenden Leitungen vollständig Herr ist. Zu diesem Zwecke lassen sich sehr verschiedene Mittel denken. In irgend einem unverzweigten geschlossenen Kreise kann man die Stromstärke auf jeden geforderten Werth bringen, indem man die darin vorhandenen elektromotorischen Kräfte zu den gesammten Widerständen ins richtige Verhältniss setzt, denn die Stromstärke in einem solchen Kreise ist ja gleich dem Quotienten der elektromotorischen Kräfte, dividirt durch die Widerstände. Ist also in einem aufs Gerathewohl zusammengestellten Kreise die Stromstärke grösser als man sie haben will, so kann man entweder die elektromotorischen Kräfte vermindern, z. B. indem man weniger oder schwächere galvanische Elemente nimmt, oder indem man die Widerstände vermehrt, z. B. durch Verlängerung der Leitungsdrähte. Wollte man die Stromstärke vermehren, so hätte man das Entgegengesetzte zu thun. Natürlich würde es aber bei derartigem Verfahren ziemlich lange dauern, bis man einen verlangten Werth der Stromstärke auch nur einigermaassen mit der erforderlichen Genauigkeit hergestellt hätte. In vielen physiologischen oder therapeutischen Fällen würde man aber überhaupt nur mit ganz ausserordentlichen und nur selten zu beschaffenden Mitteln zum Ziele kommen. Es werde beispielsweise gefordert, durch einen dünnen Froschnerven von 5 cm Länge einen elektrischen Strom

von einer gewissen ganz ausserordentlich geringen Stärke zu senden. Nehmen wir an, man hätte den Nerven mit Hülfe kurzer metallischer Zuleitungsdrähte und unpolarisirbarer Elektroden in den Kreis einer möglichst schwachen Kette aufgenommen, also z. B. einer einelementigen Daniell'schen. Dann könnten wir durch Herabminderung der elektromotorischen Kraft den Strom nicht wohl weiter schwächen, da andere noch schwächere Elektromotoren, etwa Thermoketten, für diese Zwecke nicht bequem verwendbar sind. Der Strom sei nun aber noch viel zu stark. Wir könnten uns jetzt vorsetzen, ihn durch Einschaltung grösserer Leitungswiderstände auf den gewünschten Werth herabzubringen. Nun ist aber der Widerstand eines 5 cm langen Nervenstückes schon mindestens so gross wie der eines feinen Kupferdrahtes von 1000 m Länge, eine solche Drahtlänge müsste also allein schon der Leitung hinzugefügt werden, um die Stromstärke nur auf die Hälfte ihres ersten Werthes herabzubringen, wie viel mehr Draht müsste man also einschalten, um noch viel kleinere Werthe der Stromstärke zu erzielen. Allerdings könnte man Flüssigkeitssäulen in den Stromkreis einführen, deren Widerstand auch bei mässigen Abmessungen unverhältnissmässig viel grösser ist als der von Metalldrähten. Es ist aber immer misslich, Flüssigkeiten in einem Stromkreise zu haben, obwohl man jetzt Mittel kennt, die Polarisation so gut wie vollständig zu vermeiden. Ueberdies würde es selbst mit Hülfe von Flüssigkeitssäulen grosse Schwierigkeiten haben, durch blosses Vermehren und Vermindern der Widerstände im unverzweigten Kreise die Stromstärke aufs Feinste abzustufen.

Nach diesen Betrachtungen wird es leicht ersichtlich sein, welchen grossen Dienst du Bois - Reymond der experimentellen Technik geleistet hat, indem er das Princip der Stromverzweigung zum Zwecke der Abstufung der Stromstärke eingeführt hat. Die Methode läuft darauf hinaus, eine Anordnung herzustellen, wie sie in Fig. 126 schematisch dargestellt ist. Der eine Pol einer galvanischen Kette E sendet einen Strom durch den Draht a, welcher sich bei b in zwei Zweige c und e theilt, die bei d wieder zusammenkommen, so dass der Gesammtstrom durch f wieder zur Kette zurückkommt. Es ist nun offenbar, dass in dem einen Zweige der Leitung, z. B. in c, die Stromstärke verändert werden kann durch blosse Veränderung des Widerstandes im anderen Zweige (e), wenn auch alles Uebrige gleich bleibt. Es ist insbesondere ohne weitere Rechnung anschaulich, dass ceteris paribus die Stromstärke in c um so kleiner sein wird, je kleiner der Widerstand in e ist, denn ein um so grösserer Bruchtheil der gesammten von a herkommenden Elektricität wird den Weg e betreten.

Fig. 126.



Nach den in jedem Lehrbuche der Physik (Müller-Pfaundler Bd. III, S. 332 u. flgd.) dargestellten Sätzen Kirchhoff's über Stromverzweigung

ist es leicht zu ermitteln, in welcher Weise die Stromstärke im Zweige c abhängt vom Widerstande im Zweige e. Sie stellt sich nämlich dar als ein Quotient, dessen Dividend das Product ist der elektromotorischen Kraft der in der Stammleitung befindlichen Kette, multiplicirt mit dem Widerstande in dem anderen Zweige e, dessen Divisor eine Summe der drei Producte ist, welche sich bilden lassen aus den drei Widerstandswerthen in den beiden Stromzweigen c und e und in der Stammleitung fEa, wenn man je zwei dieser Widerstandswerthe mit einander multiplicirt. Es erhellt hieraus eine sehr wichtige Beziehung, wenn nämlich der Widerstand in der Stammleitung sowohl als der Widerstand in dem Zweige c, den wir die Hauptschliessung nennen wollen, unverhältnissmässig grösser ist als der Widerstand in dem Zweige e, der als Nebenschliessung bezeichnet werden mag, dann überwiegt das Product der beiden ersteren Widerstandswerthe so sehr über die beiden anderen Producte, welche mit ihm zusammen den Divisor des die Stromstärke in der Hauptschliessung darstellenden Quotienten ausmachen, dass jener Divisor vom Widerstande in der Nebenschliessung so gut wie unabhängig wird. Da nun eben dieser Widerstand im Dividend einfach als Factor auftritt, so muss sich unter der gemachten Annahme die Stromstärke in der Hauptschliessung proportional wie der Widerstand in der Nebenschliessung ändern. Der hier gedachte Fall ist nun bei physiologischen und therapeutischen Anwendungen der Elektricität in der Regel annähernd realisirt, in der Hauptschliessung befinden sich thierische Gewebe, die sehr bedeutenden Widerstand leisten, und in der Stammleitung befindet sich meist eine vielgliedrige galvanische Kette, deren Widerstand gleichfalls gross ist, während man als Nebenschliessung verhältnissmässig wenig Widerstand bietende Drahtlängen anwendet. Durch Variation dieser Drahtlängen kann man alsdann die Stromstärke innerhalb gewisser Grenzen ziemlich proportional variiren machen.

Soll nun das soeben aus einander gesetzte Princip zur praktischen Anwendung kommen, so muss man einen Apparat herstellen, der es gestattet, den Widerstand in der Nebenschliessung beliebig und womöglich continuirlich, d. h. durch unendlich kleine Abstufungen zu verändern. Solche Apparate nennt man Rheostaten. Der zu physiologischen Anwendungen vorzüglichste Apparat derart ist das sogenannte Rheochord in der Form, die ihm von du Bois-Reymond gegeben ist. In Fig. 127 (a. f. S.) ist dies Instrument halb schematisch dargestellt. Ueber einen etwas mehr als 1 m langen Kasten sind zwei Platindrähte sw und $s'w'$ parallel neben einander ausgespannt und bei $\sigma\sigma'$ mit einem Elfenbeinsteg unterstützt. Bei s und s' sind sie an zwei von einander wohl isolirten Messingstücken befestigt, deren eines die Drahtklemme P trägt, das andere ist mit 1 bezeichnet. Unter den Drähten befindet sich eine Holzleiste, auf welcher ein Messingschlitten der Richtung der Drähte genau parallel läuft. Seine Stellung kann an einer neben der Holzleiste aufgeklebten Millimeterscala abgelesen werden. In unserer Figur steht

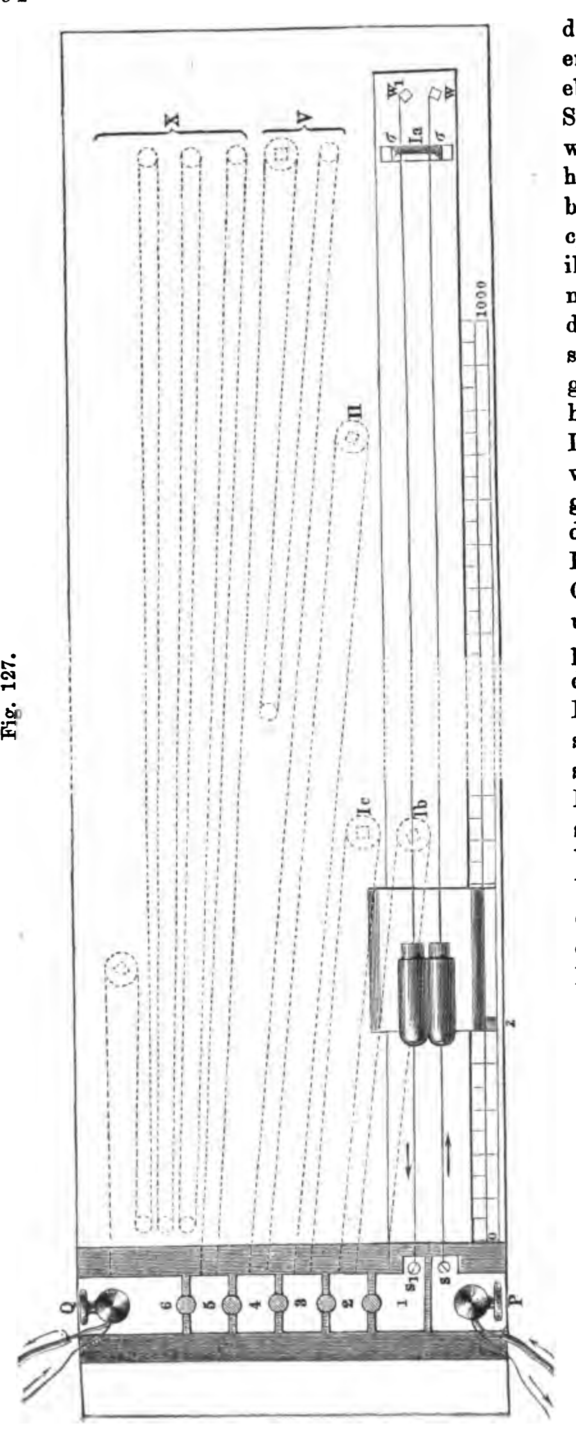


Fig. 127.

der Schlitten bei *z*, er trägt zwei daselbst ebenfalls sichtbare Stahlbüchsen, durch welche die Drähte hinduchlaufen. Diese beiden Büchsen sind cylindrisch, hängen ihrer ganzen Länge nach zusammen. Auf der linken Seite sind sie kuppenförmig abgerundet und haben hier ganz kleine Löchelchen, durch welche die Drähte gerade bequem hindurchgehen. Die Büchsen sind mit Quecksilber gefüllt und rechts mit Korkpfröpfen geschlossen, durch welche die Drähte durchgezogen sind. Das Quecksilber umspült die Platindrähte vollständig, und somit bildet das beschriebene Stück zwischen den beiden Drähten eine so gut leitende Brücke, dass ihr Widerstand selbst gegen den eines kurzen Drahtstückes vernachlässigt werden darf. Wenn nun der Zeiger am Schlitten auf den Nullpunkt der Scala zeigt, dann stehen die Kuppen der Stahlbüchsen gerade an den Metallstücken bei *s* und *s'*.

Es ist alsdann von P nach dem Messingstücke 1 hin so gut wie kein Leitungswiderstand vorhanden. Wird aber der Schlitten weiter nach rechts geschoben, dann muss ein elektrischer Strom, um von P nach 1 zu kommen, zuerst im einen Draht bis zu den Büchsen, und dann von hier im anderen Drahte nach s' zum Messingstück 1 gelangen. Er hat alsdann also einen Widerstand von einem Stück Draht, dessen Länge doppelt so gross ist als das Scalenstück, an dessen Endpunkt der Zeiger des Schlittens steht. Diesen Widerstand kann man natürlich durch stetige Bewegung des Schlittens vollkommen stetig verändern, d. h. wenn man eben den Schlitten um ein unendlich kleines Stück verschiebt, so wird auch der Widerstand nur um einen unendlich kleinen Bruchtheil seines Werthes verändert, sei es vergrössert oder verkleinert. Auf dem Kasten sind nun noch fünf andere von einander durch Zwischenräume getrennte Messingklötze 2, 3, 4, 5, 6 in einer Reihe befestigt, und je zwei benachbarte derselben sind durch Drähte verbunden, die im Innern des Kastens verborgen, so ausgespannt sind, wie es durch die punktirten Linien in der Figur angedeutet ist. Der Draht, welcher von 1 nach 2 um ein Röllchen (siehe Ib) herumgeführt ist, hat einen Widerstand gleich dem der beiden äusseren Platindrähte zusammen, wenn der Schlitten auf 1000 mm steht. Denselben Widerstand hat der Draht von 2 über Ic nach 3. Der Draht von 3 nach 4 hat doppelt so viel Widerstand (II), der von 4 nach 5 fünfmal so viel (siehe V in der Figur) und der von 5 nach 6 zehnmal so viel (siehe X in der Figur). Da diese beiden letzteren Drähte, wofern sie noch eine handliche Stärke behalten sollten, mehr als doppelt so lang als der ganze Kasten genommen werden mussten, so sind sie, wie die Figur zeigt, mehrfach im Zickzack hin- und hergeführt. Dass sie nicht auf Rollen gewickelt sind, hat darin seinen Grund, dass man jede Gelegenheit zu Inductionen beim Schliessen und Unterbrechen der Ströme vermeiden wollte.

Zwischen je zweien der Metallstücke 1, 2, 3, 4, 5, 6 kann durch einen in den runden Theil des Zwischenraumes genau passenden Metallzapfen eine Verbindung hergestellt werden, deren Widerstand verschwindend klein ist gegen den Widerstand des dieselben Metallstücke im Innern des Kastens verbindenden Drahtes. Sobald also der Zapfen zwischen 3 und 4 z. B. steckt, wird Elektricität von 3 nach 4 nur durch ihn und nicht mehr durch den Draht II hindurchgehen. Ist dagegen der Zapfen ausgezogen, so ist die Elektricität gezwungen, ihren Weg durch den Draht zu nehmen.

Nach dieser Beschreibung wird klar sein, dass uns der Apparat das Mittel giebt, dem Leitungswiderstande zwischen den Klemmschrauben P und Q durch einige fast momentan ausführbare Manipulationen jeden beliebigen zwischen 0 und 20 eingeschlossenen Werth zu ertheilen, wofern man den Widerstand der beiden Platindrähte als Eins annimmt. In der That nehmen wir zuerst an, die fünf Zapfen wären in die fünf Zwischräume zwischen 1 und 2, zwischen 2 und 3 etc. eingesteckt und

der Schlitten wäre ganz nach links an die Metallstücke angeschoben. Dann wird zwischen P und Q so gut wie gar kein Leitungswiderstand vorhanden sein, denn der Elektricität steht nun eine breite metallene Bahn offen von s unmittelbar zu den grossen Stahlbüchsen, von da nach s' und weiter in den durch die Zapfen gleichsam in ein Stück verwandelten Metallklötzen 1, 2, 3, 4, 5, 6 nach Q. Jetzt gelte es z. B., dem Widerstande zwischen P und Q den Werth 0,257 zu geben, dann wird man die Zapfen alle stecken lassen und einfach den Schieber so stellen, dass sein Zeiger 257 mm vom Anfange der Scala entfernt ist. Alsdann kann die Elektricität nicht mehr von 3 direct durch die widerstandslosen Stahlbüchsen nach s' gelangen, sondern es muss 257 mm in jedem der Platindrähte durchlaufen, um von s nach s' zu kommen. Dies ist aber der einzige in Betracht kommende Widerstand, und er beträgt $\frac{257}{1000}$ von dem Gesammtwiderstande der Platindrähte, den wir zur Einheit genommen haben. Der Widerstand ist also wie verlangt $= 0{,}257$. Soll hernach der Widerstand z. B. 13,605 betragen, so zieht man erstens den Zapfen zwischen 5 und 6 aus, das vermehrt den Widerstand um 10 Einheiten, denn nun muss die Elektricität von 5 nach 6 durch den Draht im Kasten gehen, der 10 Widerstandseinheiten bietet. Dann zieht man den Zapfen zwischen 3 und 4 sowie den Zapfen zwischen 2 und 3 aus. Dadurch werden noch zwei und eine, also im Ganzen drei Widerstandseinheiten eingeführt. Endlich stellt man den Schlitten 605 mm vom Nullpunkte der Scala ein. Durch diese Beispiele wird ersichtlich sein, wie man jeden beliebigen Widerstand zwischen 0 und 20 hervorbringen kann.

Soll nun der Rheochord als Hülfsmittel zur Regulirung der Stromstärke durch Verzweigung angewandt werden, so verbindet man zunächst die Pole der Elektromotorischen Vorrichtung mit den Klemmschrauben P und Q, so dass ein vollständig geschlossener Kreis zu Stande kommt, von ihm wird dann die Hauptschliessung abgezweigt; indem man die beiden Enden der den Nerven oder überhaupt das Versuchsobject enthaltenden Leitung gleichfalls mit P und Q verknüpft. Der Elektricität stehen alsdann von P nach Q zwei Wege offen, der eine durch die Hauptschliessung, der andere durch den Rheochord. Auf dem letzteren Wege kann, wie wir sahen, dem Widerstande jeder beliebige Werth gegeben werden, zwischen 0 und 20. Ist nun z. B. anfangs im Rheochord der Widerstand = Null gemacht durch Einsteckung aller Zapfen und Anschieben des Schlittens, dann wird kein merklicher elektrischer Strom durch die Hauptschliessung gehen, sondern der ganze Strom geht durch den Rheochord. Ertheilt man dagegen dem Widerstande im Rheochord durch Ausziehen von Zapfen und Abschieben des Schlittens einen endlichen Werth, dann theilt sich die Elektricität nach Maassgabe dieses Widerstandes zwischen die beiden Wege von P zu Q, und es geht ein um so stärkerer Strom durch die Hauptschliessung, je grösser der Widerstand in der Nebenschliessung, d. h. im Rheochord, gemacht ist.

Das vorstehend beschriebene Instrument gestattet, wie wir sahen,

nur geringe Widerstandswerthe einzuschalten. Für physiologische Zwecke indessen reicht man meist mit denselben aus und hat bei so geringen Widerständen in der Nebenschliessung den Vortheil, einigermaassen sicher zu sein, dass die Annahme der Proportionalität zwischen der Stromstärke in der Hauptschliessung und dem Widerstande in der Nebenschliessung gerechtfertigt ist, und dass man mithin in dem direct bekannten Widerstande des Rheochords ein Maass für die Stromstärke in der Hauptschliessung hat. In manchen Fällen dagegen hat man doch stärkere Ströme nöthig, die von dem beschriebenen Rheochord abgezweigt nur hervorzubringen wären, wenn man unverhältnissmässig starke elektromotorische Vorrichtungen anwendete. Will man, wo derartige Stromstärken erforderlich sind, dennoch nicht vom Principe der Stromverzweigung abgehen, so muss man Rheostaten von grösserem Widerstande anwenden. Dies dürfte namentlich erforderlich sein bei therapeutischen Anwendungen. Bis jetzt ist auf diesem Gebiete das Princip der Stromverzweigung seltsamerweise noch nicht eingebürgert. Es mag daher hier den Elektrotherapeuten aufs Dringendste empfohlen sein, denn es bietet, wie aus dem vorigen sattsam erhellt, die unbedingt bequemste und sicherste Methode, die Stromstärke in der Gewalt zu haben.

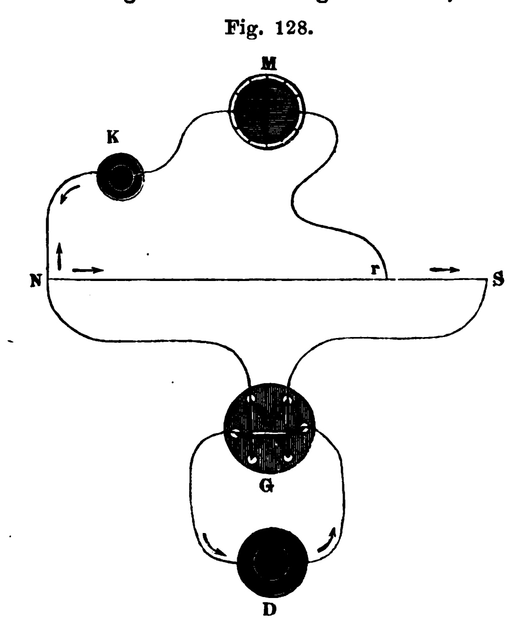
Bei Rheostaten mit grösseren Widerständen sind die Drähte der Raumersparniss wegen auf Rollen gewickelt. Sehr zweckmässige Rheostaten dieser Art werden von Siemens und Halske gebaut. Sie enthalten 16 Rollen, und gestatten jeden Widerstandswerth herzustellen, welcher durch eine vierzifferige ganze Zahl ausgedrückt werden kann. Widerstandseinheit ist dabei die von Siemens vorgeschlagene, nämlich der Widerstand einer 1 m langen Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt. Diese Siemens'schen Rheostaten haben noch den besonderen Vortheil für physiologische und therapeutische Zwecke, dass in den Rollen die einzelnen Lagen des Drahtes in entgegengesetzter Richtung gewickelt sind, wodurch die Inductionswirkung der Drahtlagen auf einander soviel als möglich vermieden wird.

Wo es nicht auf allzu grosse Genauigkeit ankommt, kann man auch Flüssigkeitsrheostaten anwenden, die man sich mit Leichtigkeit selbst verfertigen kann. In das eine Ende einer Glasröhre wird als Endfläche des Cylinders ein amalgamirtes Zinkplättchen eingekittet, an welches ein Kupferdraht angelöthet ist. Das andere Ende der Röhre ist mit einem Korke verschlossen, durch welchen ein gut lackirter Draht sich hin- und herschieben lässt. Er trägt an dem in der Röhre befindlichen Ende ebenfalls ein amalgamirtes Zinkplättchen, das dem vorerwähnten also in jeder beliebigen Entfernung gegenübergestellt werden kann. Die Röhre wird nun mit Zinkvitriollösung gefüllt und in einem geeignetem Stativ befestigt. Ausserdem ist an derselben eine Scala angeschrieben, an welcher man die Entfernung der beiden Zinkplättchen von einander direct ablesen kann. Der Widerstand in diesem Apparate ist natürlich der Entfernung der beiden Zinkplättchen von einander proportional.

2. Du Bois-Reymond's Compensator.

Von den Gesetzen der Stromverzweigung macht man noch eine andere wichtige Anwendung zur Bestimmung elektromotorischer Kräfte. Diese Methode ist in einer Form schon früher von Poggendorff angewandt. Später hat sie du Bois-Reymond modificirt und zu ihrer Ausführung eine Vorrichtung construirt, welche er Compensator genannt hat. Das Princip der Methode beruht auf folgendem, aus den allgemeinen Kirchhoff'schen Grundsätzen leicht ableitbaren besonderen Satze: Denken wir uns eine Anordnung wie Fig. 128, K sei die zu messende elektromotorische Kraft, und bei D wirke eine zweite elektromotorische Kraft, dann kann, wenn diese die Elektricität in entgegengesetztem Sinne wie K zu treiben strebt, möglicherweise die Stromstärke in dem K enthaltenden Theile der Leitung ($NKMr$) der Null gleich werden. Um es allemal mit Leichtigkeit dahin zu bringen, dass die Kraft D der Kraft K in $NKMr$ entgegenwirkt, schaltet man in den D enthaltenden Theil der Leitung $NDSr$ einen Stromwender ein, der bei G in der Figur zu sehen ist. Der Fall, dass die Stromstärke in $NKMr$ der Null gleich ist, tritt nun ein, wenn sich die Kraft K zur Kraft D verhält, wie der Widerstand im Leiterstücke Nr zum Widerstande in der ganzen Leitung $NrSDN$, natürlich vorausgesetzt, dass die beiden Kräfte die entgegengesetzte Richtung haben. Hat man also Stromlosigkeit in $NKMr$ beobachtet und kennt die beiden genannten Widerstandswerthe, so kennt man das Verhältniss der elektromotorischen Kraft K zu der von D, mithin, wenn diese letztere ebenfalls bekannt ist, auch jene selbst.

Fig. 128.



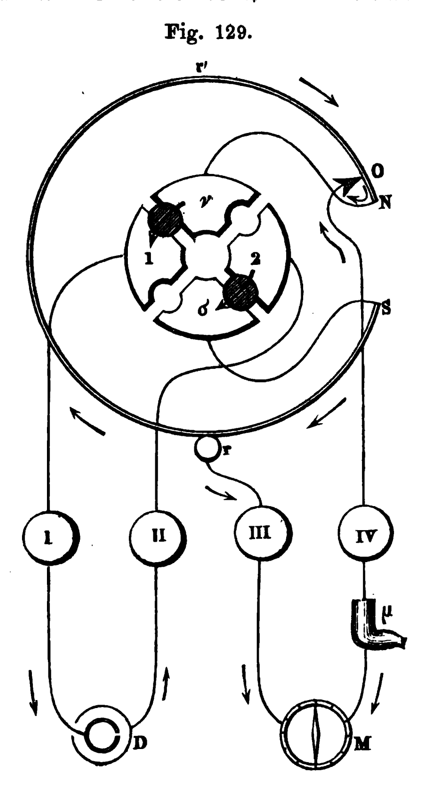
Wie das Verfahren wirklich auszuführen, ist in der soeben schon gebrauchten Figur ebenfalls angedeutet. Es sei K (Fig. 128) ein Körper mit elektromotorischen Kräften, deren Werth zu ermitteln ist, z. B.

ein Muskel oder ein galvanisches Element von unbekannter Kraft oder was es sonst sei. Wir schalten ihn, wie in der Figur angedeutet ist, in eine Drahtleitung $rMKN$ ein, welche ausserdem eine stromprüfende Vorrichtung — z. B. einen Multiplicator — (siehe M, Fig. 128) enthält. Das eine Ende der Leitung ist bei N fest verknüpft mit einem gerade ausgespannten Drahte NS. Dieser bildet einen Theil eines geschlossenen Kreises $NDSN$, in welchem sich erstens eine Kette D von constanter und bekannter elektromotorischer Kraft, z. B. ein Daniell'sches oder Grove'sches Element, befindet, und zweitens ein Stromwender G, um die Richtung des Stromes nach Bedürfniss umzukehren. Das andere Ende r der vorerwähnten Drahtleitung ($rMKN$) kann an dem gespannten Drahte in Berührung verschoben werden, etwa indem es einen Steg bildet in der Weise, wie es bei Gelegenheit der bekannten Wheatstone'schen Brücke üblich ist. Soll mit Hülfe dieser Einrichtung die unbekannte elektromotorische Kraft, z. B. die nach aussen wirksame elektromotorische Kraft des Muskels, gemessen werden, so muss man kennen: 1) die elektromotorische Kraft von D; 2) den Widerstand im ganzen Kreise $NDSrN$; 3) wie viel Widerstand jede Längeneinheit des Drahtes NS leistet. Der Widerstand in der Leitung $NKMr$ braucht dagegen weder bekannt noch überhaupt constant zu sein. Soll nun eine Messung ausgeführt werden, so stellt man vor allen Dingen die Wippe bei G so, dass der von D in die Leitung $NKMr$ gesendete Stromzweig die entgegengesetzte Richtung haben muss wie der von K herrührende Strom. Dann verschiebt man das Ende r so lange an NS hin und her, bis der Multiplicator bei M keinen Strom mehr anzeigt. Die Entfernung des so gefundenen Punktes r von N kann man an einer unter NS angebrachten Scala ablesen und hat darin unmittelbar ein proportionales Maass für die elektromotorische Kraft von K, denn diese verhält sich ja zu der bekannten von D wie der Widerstand im Drahtstücke Nr (der durch seine Länge gegeben ist) zum Widerstande im ganzen Kreise $NDSrN$, welcher letztere so wie die Kraft von D bei derselben Einrichtung des Instrumentes immer gleich bleibt. Man misst also hier, wie sich du Bois-Reymond ausdrückt, die elektromotorische Kraft wie das Zeug an der Elle. Dies ist eine sehr bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit der du Bois'schen Leitercombination, die sie namentlich auch vor der älteren von Poggendorff auszeichnet.

Für genauere Messungen dieser Art hat du Bois-Reymond ein besonderes Instrument construiren lassen, dessen wesentliche Eigenthümlichkeit darin besteht, dass der Draht NS gleichsam kreisförmig zusammengebogen ist, jedoch natürlich nicht so, dass die Enden N und S einander berühren, vielmehr bleibt dazwischen immer noch ein Zwischenraum. Die Messung des Abstandes zwischen dem veränderlichen Berührungspunkte r der Multiplicatorleitung mit dem Drahte NS und dessen Endpunkt N läuft daher hier auf eine Winkelmessung hinaus, die bekanntlich viel leichter genau ausgeführt werden kann als eine

Längenmessung. Ausserdem ist in dem Instrumente selbst eine Umschaltungsvorrichtung angebracht, so dass man nicht nöthig hat, ein besonderes Gyrotrop in den Kreis der Maasskette einzuführen. Fig. 129 wird das Princip des Instrumentes verständlich machen. $Srr'O$ ist der kreisförmig gebogene Draht, welcher dem Drahte SN im Schema Fig. 128 entspricht. Seine beiden Enden O und S sind ein- für allemal mit den Messingklötzen ν und σ verbunden, die davon isolirten Klötze 1 und 2 sind ein- für allemal verbunden mit zwei am Fussgestell des Instrumentes angebrachten Schraubenklemmen I und II, in welche die Drähte der Maasskette eingespannt werden, der dem Kreise $DNrSD$ im Schema Fig. 128 entsprechende Stromkreis wird nun hier geschlossen, indem man zwischen die vier Messingklötze 1, ν, 2, σ diametral gegenüber zwei Zapfen einsteckt. Der Strom fliesst im kreisförmigen Drahte in der einen oder in der anderen Richtung je nachdem die Zapfen stecken, wie es in der Figur gezeichnet ist, oder aber der eine zwischen 1 und σ, der andere zwischen 2 und ν. Ist der positive Pol der Kette D (wie in der Figur angenommen ist) mit II verbunden, dann fliesst ihr Strom bei der in der Figur gezeichneten Anordnung der Zapfen in der Richtung $DII2\sigma Srr'oN\nu 1ID$, bei der anderen Lage der Zapfen (zwischen 1 und σ und zwischen 2 und ν) aber in der Richtung $DII2\nu Norr'rS\sigma 1ID$, also im kreisförmigen Drahte entgegengesetzt. An dem kreisförmigen Drahte rollt nun federnd angelegt ein Platinröllchen r, das auf einem Arme steckt, der um eine den Mittelpunkt des Kreises enthaltende Axe drehbar ist. Dieser Arm trägt, beiläufig bemerkt, zugleich eine Lupe, um die Theilung abzulesen, auf einer Scheibe, um deren Rand der kreisförmige Draht gelegt ist. Das Röllchen r ist ein- für allemal verbunden mit der Klemmschraube III, und ebenso ist der Punkt o des Drahtes ein- für allemal verbunden mit der Klemmschraube IV. Diese beiden Klemmschrauben befinden

Fig. 129.



sich wie *I* und *II* am Fussgestell des Instrumentes. Mit *III* und *IV* werden die Enden der Leitung verbunden, welche den Multiplicator (*M* Fig. 129) und die zu messende elektromotorische Kraft, z. B. einen Muskel (siehe μ Fig. 129), enthält: Der Leitung *r M K N* des Schemas 128 entspricht also hier die Leitung *r III M* μ *IV o*. Das ganze Instrument ist in Fig. 130 perspectivisch dargestellt.

Die Anstellung des Versuches gestaltet sich ganz analog wie mit dem einfacheren Apparate. Es wurde schon bemerkt, dass zunächst die beiden Poldrähte der Maasskette, d. h. diejenige Kette von bekannter elektromotorischer Kraft, mit welcher man die unbekannte elektromotorische Kraft vergleichen will, mit den Drahtklemmen *I* und *II* verbunden werden, und dass die beiden Enden derjenigen Leitung, welche die zu bestimmende elektromotorische Kraft und den Multiplicator enthält, in *III* und *IV* ein-

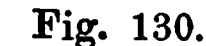


Fig. 130.



gesetzt werden. Nun steckt man die Zapfen so, dass der von der Maasskette in die Leitung *r III M* μ *IV o* gesandte Stromzweig die entgegengesetzte Richtung hat, wie der durch μ hervorgerufene Strom. Endlich sucht man durch probeweises Hin- und Herdrehen des Armes die Stellung des Röllchens *r* auf, bei welcher der Multiplicator *M* die Stromstärke Null anzeigt, dann ist die elektromotorische Kraft von μ proportional dem längs *or′r S* gemessenen Abstande zwischen *o* und *r*. Sie verhält sich nämlich zur bekannten elektromotorischen Kraft von *D*, wie sich jener Abstand oder eigentlich der darin geleistete Leitungswiderstand verhält zum Leitungswiderstande in dem ganzen Stromkreise *D II* 2 σ *S r r′ o N v* 1 *I D*.

Man thut bei allen diesen Versuchen gut, den Kreis, welcher die zu messende elektromotorische Kraft enthält, nicht während des ganzen probeweisen Hin- und Herschiebens des beweglichen Contactes ge-

schlossen zu lassen, weil sich sonst störende Polarisationen darin entwickeln können. Es bleibt am besten im Ganzen offen und wird nur allemal für einen Augenblick geschlossen, wenn man dem beweglichen Contacte (r) eine neue Stellung gegeben hat. Man sieht bei einem solchen momentanen Schlusse schon genügend an einem feinen Multiplicator, ob die neue Stellung diejenige ist, bei welcher der Kreis stromlos ist. Besteht immer noch ein Strom, so versucht man wieder eine neue Stellung. Natürlich wird man dieses Probiren von vornherein planmässig einrichten, so dass man den zu findenden Punkt in immer engere Grenzen einschliesst.

Viertes Capitel.

Unpolarisirbare Elektroden.

In allen Fällen, wo entweder thierische Gewebe auf Elektricitätsentwickelung zu prüfen sind, oder wo zu physiologischen und therapeutischen Zwecken elektrische Ströme durch thierische Gewebe gesandt werden sollen, werden nothwendig Stellen vorkommen, an denen der Strom eine Grenzscheide zwischen metallischen und feuchten Leitern passirt, denn wenn auch sonst keine Elektrolyten im Kreise vorhanden wären, so sind doch die thierischen Gewebe selbst schon feuchte Leiter, die irgendwo mit dem metallischen Theile der Leitung verknüpft sein müssen. Ueberall aber, wo ein metallischer Leiter und eine elektrolytische Flüssigkeit in Berührung kommen, hat im Allgemeinen eine elektromotorische Kraft ihren Sitz. Wir haben demnach in einem geschlossenen Leiterkreise aus thierischen Theilen und Metallen der Natur der Sache nach regelmässig noch elektromotorische Kräfte ausser denen, auf deren Wirkung oder Beobachtung es abgesehen ist. Sie werden je nach Maassgabe ihrer Stärke das Ergebniss der Versuche trüben, wenn es nicht gelingt, sie entweder genau in Rechnung zu bringen oder auf irgend eine Weise unwirksam zu machen. An das erstere ist kaum zu denken. Das letztere ist aber an sich möglich und scheint auf den ersten Blick sehr leicht ausführbar. In den geschlossenen Leiterkreisen, mit denen wir es zu thun haben, sind nämlich allemal nur zwei kritische Stellen, die in Betracht gezogen werden müssen, nämlich die beiden Enden des metallischen Theiles der Leitung (in welchen wir uns allesfalls noch zu gebrauchende galvanische Ketten eingeschaltet denken wollen), zwischen denen die betreffenden feuchten thierischen Gewebe unmittelbar oder mittelbar den Kreis schliessen sollen. Es scheint nun, als müsste es genügen, wenn wir nur die beiden Enden der metallischen Leitung aus demselben Metall verfertigten und damit den thierischen Theil unmittelbar in

Berührung brächten. Die überall gleichartige Tränkungsflüssigkeit des Gewebes wäre dann hüben und drüben mit demselben Metalle, z. B. Kupfer, in Berührung, und die durch diese Berührung erzeugte elektromotorische Kraft wirkte an beiden Stellen offenbar in entgegengesetzter Richtung, so dass durch sie kein Strom hervorgebracht und mithin keine Störung anderer zu beobachtender Kräfte veranlasst würde. Sollte man etwa noch der vollkommenen Gleichartigkeit der Tränkungsflüssigkeit des thierischen Gewebes an allen Stellen misstrauen, so dass man fürchten müsste, bei directer Anlegung der Kupferenden doch hüben und drüben Kupfer mit verschiedenartigen Flüssigkeiten in Berührung zu haben, so könnte man noch an beiden Stellen eine entschieden gleichartige Zwischenflüssigkeit einschieben, z. B. Kochsalzlösung. Man würde also etwa jedes der beiden kupfernen Enden der Leitung mit einer abgegrenzten Masse von Kochsalzlösung in Berührung bringen und den thierischen Theil zwischen diesen beiden Massen eine Brücke bilden lassen, so wäre dann der Kreis geschlossen, in welchem die unvermeidliche Berührung metallischer und flüssiger Leiter hüben und drüben zwischen demselben Metall und derselben Flüssigkeit zu Stande gebracht wäre. Stellt man eine solche Anordnung wirklich her, so wird man sich sehr getäuscht finden in der Erwartung, dass die beiden Berührungen vollkommen gleiche und entgegengesetzte Kräfte entwickeln. Allerdings sind diese Kräfte sehr nahezu gleich, aber für unsere Zwecke ist die Gleichheit im Allgemeinen durchaus nicht hinreichend. Taucht man beispielsweise zwei noch so gleich aussehende Kupferdrähte, welche die Enden eines feinen Multiplicators bilden, in ein und dasselbe Gefäss mit Kochsalzlösung oder irgend einer anderen Flüssigkeit, so wird man unter Tausenden von Fällen kaum einmal einen kräftigen Nadelausschlag vermissen, zum Beweise, dass kaum jemals zwei Stücke Kupfer in Berührung mit derselben Flüssigkeit genau dieselbe elektromotorische Kraft entwickeln, oder wie man sich auszudrücken pflegt, vollkommen gleichartige Oberflächen besitzen. Dasselbe gilt von jedem anderen Metalle, allerdings in verschiedenem Grade. So ist es namentlich bei den edeln Metallen, z. B. Platin, verhältnissmässig nicht allzu schwer, durch sorgfältige Reinigung, Ausglühen etc. zwei Stücke von elektromotorisch gleichartiger Oberfläche herzustellen, derart, dass, wenn man beide Stücke metallisch mit den Multiplicatorenden verbindet und den Kreis zwischen ihnen durch irgend eine Flüssigkeit schliesst, kein Nadelausschlag erfolgt.

Für manche Zwecke genügt es nun allerdings, im Anfange des Versuches, vollständig gleichartige Elektroden zu besitzen. So hat du Bois-Reymond den grössten Theil seiner classischen Untersuchungen über elektromotorische Wirkung thierischer Gewebe mit Multiplicatorenden von Platin angestellt. Jedes dieser Enden tauchte in ein Gefäss mit gesättigter Kochsalzlösung. Ueberzeugt man sich jetzt von der vollkommenen Gleichartigkeit der beiden Platinplatten, indem man zwischen den beiden Massen von Kochsalzlösung den Kreis unwirksam durch

eine dritte Masse von Kochsalzlösung schliesst und keine Ablenkung der Multiplicatornadel beobachtet, so kann man einen Versuch anstellen. Weicht nämlich jetzt die Multiplicatornadel ab, sowie man zwischen den beiden Massen von Kochsalzlösung den Kreis durch ein zu prüfendes thierisches Gewebe schliesst, so kann man den berechtigten Schluss machen, dass der beobachtete Strom durch elektromotorische Kräfte in Bewegung gesetzt ist, die in jenem thierischen Gewebe ihren Sitz haben.

Die Gleichartigkeit zweier Platinplatten in Kochsalzlösung oder irgend zweier Metallplatten in irgend welcher Flüssigkeit hört aber sofort auf, sowie ein elektrischer Strom durch den Leiterkreis circulirt. Es tritt alsdann das bekannte Phänomen der galvanischen Polarisation ein (siehe Müller-Pfaundler, Lehrbuch der Physik, Bd. III, S. 262), das durch die Elektrolyse der Flüssigkeit hervorgerufen wird. Bleiben wir bei dem Beispiele der Platinplatten in Kochsalzlösung stehen, so belegt sich die Platte, durch welche der Strom in die Flüssigkeit eintritt, mit einer Sauerstoffschicht, die, durch welche er austritt, mit einer Wasserstoffschicht. Eine mit Wasserstoff belegte Platinplatte ist aber einer mit Sauerstoff belegten, resp. vollkommen reinen, nicht mehr gleichartig, sondern verhält sich zu ihr analog wie eine Zinkplatte. Es ist also dann sofort ausser der elektromotorischen Kraft, deren Wirkung beobachtet werden soll, noch eine andere vorhanden, die im Allgemeinen der ersteren entgegengesetzt gerichtet ist. Freilich kommen auch zuweilen räthselhafte Fälle vor, wo anscheinend das Umgekehrte statthat. Wir wollen hier die Erscheinungen der Polarisation nicht weiter verfolgen, darüber sind die Lehrbücher der Physik hinlänglich ausführlich. Es genügt hier, darauf hingewiesen zu haben, wie die Polarisation uns hindern würde, Versuche anzustellen, in denen es darauf ankommt, in einem Leiterkreise, der thierische Theile enthält, längere Zeit hindurch einen vollständig constanten Strom zu erhalten. Wir müssen uns daher nach Mitteln umsehen, auch die Polarisation der Elektroden zu beseitigen.

Die Physik giebt nun in der That bekanntlich zwei verschiedene Mittel zu diesem Zwecke an die Hand. Das eine besteht darin, dass man die Elektrode, durch welche der Strom den feuchten Leiter verlässt und welche mithin der Polarisation durch Wasserstoff ausgesetzt ist, mit einer stark oxydirenden Flüssigkeit, z. B. rauchender Salpetersäure, umgiebt. Diese lässt es zu keiner Ablagerung freies Wasserstoffes kommen, sondern oxydirt denselben im Entstehungsmomente. Natürlich muss in diesem Falle die Elektrode aus einem Metalle verfertigt sein, das von der Salpetersäure nicht angegriffen wird. Am besten eignet sich Platin. Dies ist das Princip, auf welchem bekanntlich die Constanz der Grove'schen und Bunsen'schen Kette beruht. Das zweite Mittel, die Polarisation zu vermeiden, besteht darin, dass man die Elektroden zunächst in Berührung bringt mit einer ziemlich concentrirten Lösung eines Salzes von demjenigen Metalle, aus welchem sie selbst bestehen. Tauchen beispielsweise Kupferelektroden in eine Lösung von Kupfervitriol, so

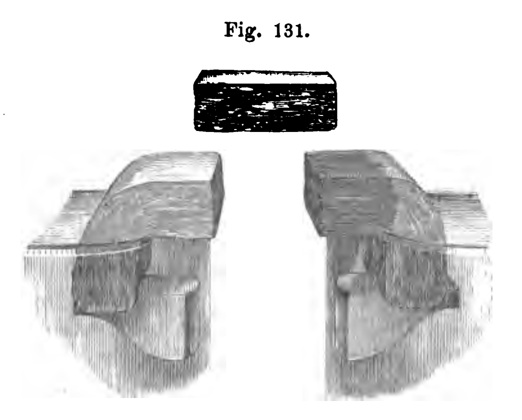
wird an der Stelle, wo der Strom eintritt, Schwefelsäure und Sauerstoff frei, welches sofort von der Elektrode ein Aequivalent Kupfer löst, um damit wieder Kupfervitriol zu bilden, und es bleibt also die Kupferfläche immer blank. An der Austrittsstelle des Stromes wird nicht Wasserstoff, sondern Kupfer frei, welches sich auf der Elektrodenfläche ablagert, so dass auch hier stets eine unveränderte Kupferfläche bleibt. Für gewöhnliche physikalische Zwecke sind nun in der That alle derartige Anordnungen vollkommen ausreichend, und namentlich die Combination Kupfer und Kupfervitriol vielfach in Gebrauch. Für physiologische Versuche dagegen ist die Gleichartigkeit und Unpolarisirbarkeit solcher Combinationen im Allgemeinen noch nicht ausreichend. Die meisten derselben geben doch noch Spuren von Polarisation, oft einer anomalen, d. h. es entstehen oft elektromotorische Kräfte, die mit den erregenden gleiche Richtung haben. Ausserdem ist es überall schwierig oder unmöglich, die betreffenden Metallplatten von vornherein ganz gleichartig herzustellen, denn man ist hier auf die leichter oxydirbaren Metalle angewiesen, und von einem solchen kann man kaum jemals zwei Stücke von absolut gleichartiger Oberfläche beschaffen, während dies, wie oben angedeutet, bei den edeln Metallen eher möglich ist. In physiologischen Versuchen sind aber selbst die kleinsten Spuren der Polarisation oder ursprünglicher Ungleichartigkeit störend. Wo es gilt, die elektromotorische Wirksamkeit von thierischen Theilen selbst zu ermitteln, ist dies leicht begreiflich, weil diese Wirksamkeit nach aussen so schwach ist, dass sie vollständig verdeckt werden kann durch die Wirkung der Ungleichartigkeit scheinbar noch so gleicher Elektroden. Aber auch in feineren Reizversuchen kann die kleinste Spur von Polarisation gefährlich werden, weil bekanntlich der Nerv für Schwankungen der Stromstärke so ausserordentlich empfindlich ist.

Glücklicher Weise ist nun unter den möglichen Combinationen eines Metalls mit Lösung eines Salzes vom selben Metalle eine gefunden, welche auch den strengsten von physiologischer Seite zu stellenden Anforderungen genügt, was leicht herstellbare Gleichartigkeit und Unpolarisirbarkeit betrifft. Diese Combination ist Lösung von schwefelsaurem Zinkoxyd mit amalgamirtem Zink. Der Grund, warum sich gerade diese Combination vor allen anderen auszeichnet, welche theoretisch ebenso beschaffen sein sollten, ist rein räthselhaft. Insbesondere ist gar nicht abzusehen, was die Amalgamirung des Zinkes leistet, und dennoch ist sie unerlässliche Bedingung. Man darf übrigens Zink, Zinkvitriol und Quecksilber der geringsten käuflichen Sorten nehmen, man braucht durchaus nicht auf chemische Reinheit der angewandten Stoffe zu sehen. Stets wird man einen Kreis herstellen können aus metallischen Leitern und Zinkvitriollösung, in welchem selbst die feinsten stromprüfenden Vorrichtungen keine Spur elektromotorischer Kräfte zeigen, wenn man den metallischen Theil der Leitung durch gut amalgamirte Zinkelektroden mit der Lösung in Verbindung setzt. Auch bleibt

in diesem Kreise keine durch Polarisation entstandene elektromotorische Kraft zurück, wenn man während einger Zeit einen sonst irgendwie erzeugten Strom durchleitet.

Den auf den Eigenschaften der besprochenen Combination beruhenden unpolarisirbaren Elektroden hat nun du Bois-Reymond verschiedene zweckmässige Gestalten gegeben, je nach den verschiedenen Zwecken. Bei den Versuchen über die elektromotorische Wirksamkeit thierischer Gewebe handelt es sich darum, die letzteren mit den Multiplicatorenden dergestalt in mittelbare Verbindung zu setzen, dass ausserhalb der thierischen Gewebe selbst keine uncompensirte elektromotorische Kraft vorhanden sei. Da nun der Multiplicatordraht (resp. der Draht der Spiegelbussole) der Natur der Sache nach metallisch ist, so müssen seine beiden Enden aus verquicktem Zink verfertigt werden und nur mit Zinkvitriollösung in Berührung stehen, die dann ihrerseits mit den zu prüfenden thierischen Geweben durch flüssige Leiter in Verbindung gesetzt wird. Dies bewirkt du Bois-Reymond durch folgende Vorrichtung. Zwei viereckige Tröge von Zinkguss werden inwendig amalgamirt, aussen mit Asphaltlack gefirnisst. An ihnen angelöthete Schraubenklemmen nehmen die Kupferdrahtenden des Multiplicators auf. Die Tröge sind gefüllt mit Zinkvitriollösung von genau gleicher Concentration hüben und drüben. Aus jedem Troge ragt nun ein Bausch von Fliesspapier hervor, der mit derselben Zinkvitriollösung gut getränkt ist. Die Tröge werden einander so gegenübergestellt, dass die Stirnseiten der Bäusche, die über die Räder der Tröge etwas vorragen, einander parallel gegenüberstehen und nur einen schmalen Zwischenraum zwischen sich lassen (siehe Fig. 131). Dieser Zwischenraum wird nun durch das zu prüfende thierische Gewebe (Nerv, Muskel oder was es sei) überbrückt und so der Kreis geschlossen. Man sieht in Fig. 131 die Anordnung der aus den Gefässen hervorragenden Bäusche, über der Lücke ist noch ein viereckiger, ebenfalls mit Lösung getränkter Bausch gezeichnet, den man vielfach benutzt, um den Kreis zu schliessen vor oder nach Anstellung eines Versuches. Die Tröge selbst sind übrigens in der neueren Einrichtung etwas anders als in der Figur gezeichnet ist, die nur die Lage der Bäusche anschaulich machen soll. Es ist natürlich nicht gerathen, ein lebendes thierisches Gewebe ganz unmittelbar mit den Bäu-

Fig. 131.



schen in Berührung zu bringen, weil es sonst von der Tränkungsflüssigkeit angeätzt wird, denn bekanntlich gehört starke Zinkvitriollösung zu den Flüssigkeiten, welche wenigstens Nerven und Muskeln nicht unversehrt

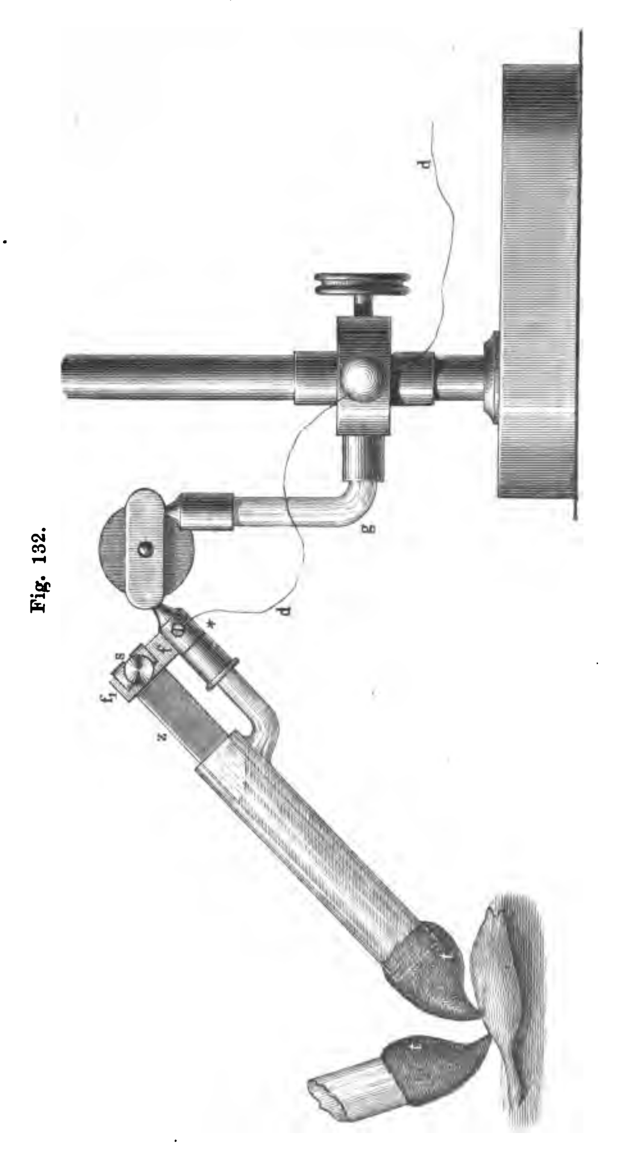


Fig. 132.

lassen. Man bedeckt deshalb die Bäusche an passenden Stellen mit dünnen Scheibchen feines Modellirthones, der mit einprocentiger Kochsalzlösung durchtränkt ist. Diese Lösung ätzt thierische Gewebe nicht an.

Eine andere sehr zweckmässige Form der unpolarisirbaren Elektroden ist in Fig. 132 (a. v. S.) dargestellt. Ein amalgamirtes Zinkstreifchen *z* ragt in eine plattgedrückte Glasröhre hinab. Die untere Oeffnung derselben wird mit einem Thonpfropfe *t* geschlossen, der mit einprocentiger Kochsalzlösung getränkt ist. Hierauf wird in die Röhre Zinkvitriollösung gegossen, welche das Zinkstreifchen umspült. Dieses ist am oberen Ende bei *f* mit dem Zuleitungsdrahte *d* verbunden. Die Elektrode ist durch zwei Kugelgelenke an einem zweckmässig eingerichteten Messingstativ befestigt, so dass ihr mit Leichtigkeit jede beliebige Lage gegeben werden kann. Von der Metallmasse des Stativs ist sie dadurch isolirt, dass das Verbindungsstück *g* von Glas angefertigt ist. Der Thonpfropf *t* kann leicht mit einigen Fingerdrucken in jede gewünschte Form gebracht, namentlich auch fein zugespitzt werden, so dass man die Berührung der Elektrode mit dem zu untersuchenden Körper auf einen Punkt beschränken kann. So ist in der Figur beispielsweise angedeutet, wie zwei solche Elektroden dicht neben einander an einen Froschgastrocnemius angelegt sind.

Fünftes Capitel.

Polarisation feuchter Leiter.

Im vorigen Capitel haben wir die Annahme stillschweigend vorausgesetzt, dass von Polarisation überall nur an den Grenzen zwischen Metallen und feuchten Leitern die Rede sein könne. Diese Annahme hat auch in der That bis vor nicht sehr langer Zeit in der Physik allgemein als selbstverständlich gegolten. Man glaubte daher für die elektrophysiologische Anwendung genug gethan zu haben, wenn man die Mittel zeigte, wie der Strom ohne Polarisation über die Grenze zwischen dem metallischen und elektrolytischen Theil des Kreises zu schaffen ist; einmal in irgend einen flüssigen Leiter eingetreten, könnte er dann ohne Gefahr für seine Constanz in jeden beliebigen anderen übergeleitet werden, mit anderen Worten, es schien als ob wir den elektrolytischen Theil der Leitung aus jeder beliebigen Reihenfolge solcher Körper zusammenstellen könnten, wenn nur dafür gesorgt ist, dass die beiden Enden dieses Theiles der Leitung mit der metallischen Leitung in gleichartiger und unpolarisirbarer Weise verknüpft sind.

Du Bois-Reymond[1]) hat nun aber entdeckt, dass der aus Elektrolyten gebildete Theil einer Stromleitung doch nicht immer ganz frei

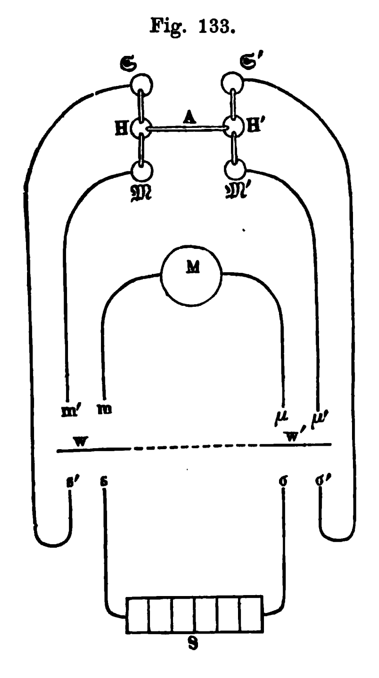
---

[1]) Sitzungsber. der Berliner Akademie, 17. Juli 1856. 4. August 1856. 31. Januar 1859. 20. December 1860.

von Polarisation ist. Es sind verschiedene Erscheinungen dieser Art von einander zu unterscheiden, welche sämmtlieh bei elektrophysiologischen Versuchen Beachtung verdienen. Erstens hat du Bois-Reymond eine Polarisation an der Grenze zweier Elektrolyte nachgewiesen, die ganz analog der Polarisation an der Grenze zwischen Metallen und Elektrolyten zu sein seheint, nur ist der absolute Werth der durch sie ins Spiel gebrachten elektromotorischen Kräfte ausserordentlich viel geringer als bei der gewöhnlichen Polarisation, und es ist daher nicht zu verwundern, dass diese neue Art der Polarisation den Physikern gänzlich entging, die nicht oft Veranlassung hatten, so feine stromprüfende Werkzeuge zu gebrauchen, wie sie in der Elektrophysiologie unentbehrlich sind.

Um eine deutliche Vorstellung von den hier in Rede stehenden Erscheinungen zu geben, wollen wir die Art und Weise beschreiben, wie du Bois-Reymond seine Versuche angestellt hat. Wie in nebenstehendem Schema, Fig. 133, angedeutet ist, sind zwei Leiterkreise vorbereitet, von denen der eine oder der andere geschlossen ist, je nachdem eine Wippe $W W'$ die eine oder die andere Stellung hat. Lehnen nämlich die beiden von einander isolirten Leiterstücke der Wippe bei $s's$ und $\sigma\sigma'$ an, so ist der Stromkreis $S\sigma W'\sigma'\mathfrak{S}'H'AH\mathfrak{S}s'WsS$ geschlossen. Darin befindet sich bei S eine galvanische Säule von grosser elektromotorischer Kraft. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ sind Gefässe mit Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd, in welche die metallischen Leitungen $\sigma'\mathfrak{S}'$ und $s'\mathfrak{S}$ mit kupfernen Enden eintauchen, H und H' sind Gefässe mit Kochsalzlösung, welche mit der Kupferlösung bei $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ durch heberförmige Glasröhren, die ebenfalls Kochsalzlösung enthalten, verbunden sind. Zum Schluss des Kreises sind die Gefässe H und H' unter einander verbunden, durch ein heberförmiges Glasrohr A, welches diejenige Flüssigkeit enthält, deren Polarisirbarkeit in Berührung mit Kochsalzlösung untersucht werden soll. Nachdem nun in dem beschriebenen Kreise der durch die Säule S in Bewegung gesetzte Strom eine Zeit lang geflossen ist, legt man die Wippe um, so dass die beiden Leiterstücke W und W' Verbindungen zwischen m' und m und zwischen μ und μ' herstellen. Dann ist der vorhin beschriebene Kreis offen und

Fig. 133.



dafür der Kreis $M \mu W' \mu' \mathfrak{M}' H' A H \mathfrak{M} m' W m M$ geschlossen. Dieser enthält bei M den Multiplicator. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ sind zwei Gefässe mit Kochsalzlösung, welche mit den Gefässen H und H' durch Röhren mit derselben Lösung verbunden sind, in die Gefässe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ tauchen als Enden der metallischen Leitungen, $m' \mathfrak{M}$ und $\mu' \mathfrak{M}$ Platinplatten, die auf vollständige Gleichartigkeit geprüft sind; sie können auch bei der ersten Lage der Wippe keine Polarisation annehmen, weil sie ja bei ihr nicht im Stromkreise befindlich sind. Da in dem neu gebildeten Kreise die Flüssigkeit A und ihre beiden Berührungsstellen mit Kochsalzlösung auch wieder enthalten ist, so muss sich eine während des Stromes hier etwa entstandene secundäre elektromotorische Kraft durch eine Ablenkung der Multiplicatornadel bei M sofort zu erkennen geben. Beiläufig mag noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass nur die an den Berührungsstellen zwischen der in A enthaltenen Flüssigkeit und der in H und H' befindlichen Kochsalzlösung entstehende Polarisation beim Umlegen der Wippe am Multiplicator M zur Erscheinung kommt, nicht aber diejenige Polarisation, welche während der Stromdauer an den Berührungsstellen der Kupferlösung in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ mit der Kochsalzlösung der Verbindungsröhren etwa auch noch entwickelt wird. Dass auch an diesen Stellen Polarisation stattfindet, ist höchst wahrscheinlich, aber sie kann in dem beschriebenen Versuche deswegen nicht zur Erscheinung kommen, weil die fraglichen Berührungsstellen heterogener Flüssigkeiten in den Gefässen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ nach Umlegen der Wippe nicht im neuen Kreise enthalten sind.

Du Bois-Reymond hat nun verschiedene Flüssigkeiten in der Röhre A auf ihr Verhalten in Berührung mit Kochsalzlösung geprüft. Schwefelsäure, Salzsäure, Salpetersäure, Ammoniak und Salpeterlösung lieferten eine Polarisation im gewöhnlichen Sinne, d. h. die secundäre elektromotorische Kraft, welche unter dem Einflusse des Säulenstromes an den Berührungsstellen entsteht, ist der elektromotorischen Kraft der Säule entgegengerichtet. Dagegen zeigen Kalilösung, Brunnenwasser, destillirtes Wasser, Hühnereiweiss eine anomale Polarisation, d. h. sie geben eine secundäre elektromotorische Kraft von gleicher Richtung mit der Säule. Was die Ursache der verschiedenen Erscheinungen betrifft, so glaubt du Bois-Reymond sie in der Elektrolyse suchen zu müssen, welche an den beiden Grenzen des in A befindlichen Elektrolyten nothwendig heterogene Grenzschichten bilden müsse, freilich lässt sich die Erklärung nicht im Einzelnen durchführen, namentlich nicht in Beziehung auf die anomale Polarisation der zuletzt genannten Flüssigkeiten; jedoch lassen sich alle andere Möglichkeiten der Erklärung, an die man allesfalls denken könnte, insbesondere die, dass die secundäre elektromotorische Kraft etwa thermoelektrischer Natur, leicht ausschliessen.

Eine fernere von du Bois-Reymond gefundene Thatsache dieses Gebietes ist die „innere Polarisation“ durchfeuchteter poröser Körper. Wird nämlich ein solcher, etwa ein Prisma von nassem Holz oder feuch-

tem Thon oder dergl., eine Zeit lang von einem elektrischen Strome durchflossen, so ist es hernach eine Zeit lang in allen seinen Theilen Sitz elektromotorischer Kräfte, welche die Elektricität in entgegengesetztem Sinne zu bewegen streben, als in welchem der Strom den Leiter durchfloss. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man an das vorher durchströmt gewesene Prisma die Multiplicatorenden unpolarisirbar anlegt. Der Multiplicator wird dann stets einen Strom anzeigen, welcher in dem zwischen den Elektroden befindlichen Leiterstücke die umgekehrte Richtung hat von der, welche der polarisirende Strom hatte. Die Grösse dieser secundären elektromotorischen Kraft ist in augenfälliger Weise abhängig von der Beschaffenheit des porösen Körpers und von seiner Tränkungsflüssigkeit. Denken wir uns zunächst einen porösen Körper mit verschiedenen Flüssigkeiten getränkt, so wird die innere Polarisation am grössten für einen gewissen nicht gar grossen Werth der Leitungsfähigkeit, d. h. wenn die Flüssigkeit entweder sehr gut oder sehr schlecht leitet, so ist die innere Polarisation schwach oder nicht merklich, sie wird merklich und verhältnissmässig stark eben für jenen Werth der Leitungsfähigkeit, den wir als einen nicht gar grossen bezeichneten. So zeigt beispielsweise ein Fliesspapierbausch keine innere Polarisation, wenn er getränkt ist mit dem sehr schlecht leitenden Alkohol oder mit sehr gut leitenden Salzlösungen. Er zeigt sie in hohem Grade, wenn er mit annähernd reinem Wasser getränkt ist, dessen Leitungsfähigkeit gering, aber doch grösser als die des Alkohols ist.

Der Einfluss der Beschaffenheit des festen porösen Körpers auf die innere Polarisation erhellt leicht aus einigen Beispielen. Thon, Kreide, thierische und pflanzliche Gewebe geben mit Flüssigkeiten von gehörigem Leitungswiderstande getränkt innere Polarisation, keine solche geben Schwefelblumen, reiner Quarzsand, Seide, man mag sie tränken mit welcher Flüssigkeit man will. Man sieht leicht, dass die letztgenannten Körper lauter vollständige Isolatoren sind, während die erstgenannten zwar an sich schlecht leiten, aber doch nicht gerade aller Leitungsfähigkeit baar sind, daher sie ja auch in der Lehre von der Reibungselektricität als sogenannte „Halbleiter“ qualificirt werden.

Die beschriebenen Thatsachen geben den Schlüssel zur Erklärung. Der Strom wird in dem durchfeuchteten Körper theilweise ganz auf dem Wege des feuchten Leiters gehen, manche Stromfäden werden aber stellenweise auch die festen Theile durchsetzen, wofern diese eben nicht absolute Nichtleiter sind. Sind sie aber leitend, so darf man sich wohl denken, dass sie nach Art der Metalle leiten und dass daher jedes feste Theilchen da, wo der Stromfaden in es ein- oder aus ihm heraustritt, Polarisation annimmt. Jedes kleinste Theilchen unseres Körpers wird somit Sitz secundärer elektromotorischer Kräfte, welche durch einen angelegten Bogen Ströme senden müssen in dem oben beschriebenen Sinne. Man sieht aber auch, dass diese Polarisation um so kleiner werden muss, je besser die Flüssigkeit leitet im Verhältniss zu den festen Theilen, zwi-

schen welchen sie eingeschlossen ist, denn um so schwächere Stromfäden werden durch diese festen Theile gehen, um so mehr wird im Gegentheil der ganze Strom sich an die Flüssigkeit halten. Dass andererseits die Polarisation unmerklich wird, wenn die Tränkungsflüssigkeit (wie z. B. Alkohol) gar zu schlecht leitet, rührt daher, dass alsdann der polarisirende Strom überhaupt zu sehr geschwächt wird.

Für die elektrophysiologische Technik geht aus dem Vorstehenden die Regel hervor, feuchte poröse Körper, welche etwa dazu verwandt werden, elektrische Ströme den thierischen Geweben zuzuführen, mit möglichst gut leitenden Flüssigkeiten zu tränken. Die gewöhnlich angewandten Lösungen von Kochsalz oder von Zinkvitriol genügen übrigens in dieser Beziehung.

Die Polarisation an der Grenze verschiedener feuchter Leiter scheint ganz besonders stark zu sein beim Muskel- und Nervengewebe, das ja aus verschiedenen Substanzen gebildet ist. In der Muskelfaser ist nämlich das umhüllende Sarkolemm vom Inhalte der Faser verschieden und in der Nervenfaser können wir drei Stoffe unterscheiden, nämlich das Neurolemm, die Markscheide und den Axencylinder, an deren Grenze bei elektrischer Durchströmung des Gebildes möglicherweise Polarisation auftreten kann.

Dass an den erwähnten Grenzen wirklich Polarisation stattfindet, zeigt sich in einer von Hermann gefundenen und genau untersuchten Erscheinung. Nerven und Muskeln zeigen nämlich anscheinend einen viel grösseren Leitungswiderstand, wenn sie senkrecht zur Faserrichtung als wenn sie parallel zu derselben durchströmt werden. Bei lebendem Muskelgewebe ist der scheinbare Widerstand bei querer Durchströmung meist etwa sechs- bis achtmal grösser als bei Durchströmung der Länge nach. Wenn man eine Polarisation an der Grenze des Muskelschlauches und Muskelinhalts annimmt, so ist dieses Ueberwiegen des scheinbaren Widerstandes bei querer Durchströmung selbstverständlich, denn bei ihr kommt diese Polarisation viele Male hinter einander ins Spiel, nämlich beim Eintritt und Austritt des Stromes in jede Faser. Es summiren sich also sehr viele elektromotorische Gegenkräfte. Bei Durchströmung in der Richtung der Fasern findet wesentlich nur an den Elektroden Polarisation statt. Ganz ausgeschlossen ist sie freilich auch im Innern nicht, da die Stromfäden sich doch nicht ganz genau an die einzelnen Fasern des Muskels halten werden.

Bei erstarrten Muskeln ist der Unterschied zwischen Längs- und Querwiderstand bedeutend kleiner, der letztere ist nämlich höchstens noch das $1^{1}/_{2}$fache des ersteren.

Beim Nerven findet sich ein Unterschied zwischen Längs- und Querwiderstand in demselben Sinne, doch ist er etwas kleiner, indem beim lebenden Nerven der Querwiderstand durchschnittlich etwa das Fünffache des Längswiderstandes ist. Auch beim Nerven sinkt der Unterschied durch Tödten des Gewebes, doch bleibt er im todten Nerven im-

mer noch verhältnissmässig grösser als im todten Muskel. Es beträgt nämlich im todten Nerven der Querwiderstand durchschnittlich etwa das 2,4fache des Längswiderstandes.

Es wurde schon vorhin erwähnt, dass die Annahme einer Polarisation an der Grenze von Hüll- und Kernsubstanz im Stande ist, vom Ueberwiegen des Querwiderstandes über den Längswiderstand Rechenschaft zu geben. Es könnte aber auch aus der besonderen Anordnung zweier Substanzen von wesentlich verschiedenem specifischem Widerstande erklärt werden. Die Gründe dafür, dass wenigstens hauptsächlich Polarisation die Ursache der beschriebenen Erscheinung ist, fasst Hermann in folgende Sätze zusammen: 1. Durchströmte Muskeln und Nerven zeigen nach der Oeffnung des Stromes einen inneren Polarisationsbestand, der wenigstens im Muskel bei querer Durchströmung grösser ist. 2. Der Querwiderstand erscheint von einer gewissen Stromstärke an um so kleiner, je stärker der Strom ist, ein Beweis, dass eine Gegenkraft zu Grunde liegt, welche einen gewissen Maximalwerth nicht überschreitet. 3. Der Querwiderstand nimmt während der Durchströmung zu, wie jede Polarisation zu ihrer Entstehung Zeit braucht.

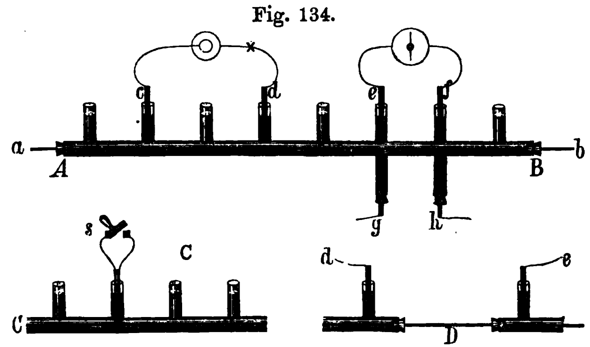
Diese Polarisation an der Grenze der verschiedenen Schichten der Nervenfasern ist deswegen von besonderem Interesse, weil sich darauf eine Erklärung der elektrischen Erscheinungen des Elektrotomes gründen lässt, welche allen Einzelheiten gerecht wird, ohne dass unwahrscheinliche Hypothesen zu Hülfe genommen zu werden brauchten.

Die physikalischen Principien dieser Theorie des Elektrotomes hat ihr Begründer Hermann durch Versuche folgender Art an schematischen Vorrichtungen erläutert. Ein Platindraht wird in der Axe eines cylindrischen Glasrohres ausgespannt, welches mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, in der Platin sowohl positiv als negativ polarisirbar ist. Das Rohr hat eine Anzahl von offenen Seitenzweigen, von denen mindestens zwei den übrigen gegenüber angesetzt sind, so wie es in Fig. 134 (a. f. S.) angedeutet ist. Die Seitenzweige sind mit derselben Flüssigkeit, z. B. Zinksulfatlösung, gefüllt, wie das Hauptrohr. Zwei von diesen Seitenzweigen können nun zur Zuleitung eines elektrischen Stromes durch unpolarisirbare Elektroden dienen — wir wollen ihn den polarisirenden Strom nennen — und zwei andere von ihnen kann man dann gleichfalls durch unpolarisirbare Elektroden mit einer galvanometrischen Vorrichtung verknüpfen und so prüfen, ob an den Fusspunkten der Seitenzweige in Folge der Durchströmung der anderen Strecke ein elektrischer Spannungsunterschied gesetzt ist, welcher durch die ableitenden Bogen einen Strom sendet.

Diese Vorrichtung zeigte nun folgendes Verhalten. Die abgeleiteten Stromzweige sind stets dem polarisirenden gleich gerichtet, auch wenn die Ableitung auf der entgegengesetzten Seite des Rohres geschieht wie die Zuleitung des polarisirenden Stromes. Wird z. B. der polarisirende Strom (Fall der Zeichnung Fig. 134) durd *c* und *d* zugeleitet, so dass er im Rohre von *c* nach *d* fliesst und wird *e* und *f* zur Ableitung zum

Galvanometer benutzt, so geht der abgeleitete Stromzweig von *f* nach *e* durch das Galvanometer, seine Fortsetzung im Rohr hätte also die Richtung von *e* nach *f* entsprechend der Richtung von *c* nach *d*. Werden unter denselben Umständen die Punkte *g* und *h* an der gegenüberliegenden Seite des Rohres benutzt, so geht gleichfalls der abgeleitete Stromzweig von *h* durch das Galvanometer nach *g*, also durch das Rohr von *g* nach *h* entsprechend wie von *c* nach *d*. Die Stromzweige sind um so schwächer, je weiter die abgeleitete Strecke von der durchflossenen liegt. Die abgeleiteten Ströme zeigen sich nicht, wenn der Kerndraht fehlt oder wenn er aus einem Material besteht, welches in der Flüssigkeit nicht polarisirt wird, z. B. ein amalgamirter Zinkdraht in Zinklösung ist. Es kommen keine abgeleiteten Stromzweige zu Stande, wenn zwischen der durchflossenen und der abgeleiteten Strecke entweder der Draht oder die Flüssigkeitssäule (Fig. 134 *D*) unterbrochen ist. Dagegen darf der (po-

Fig. 134.

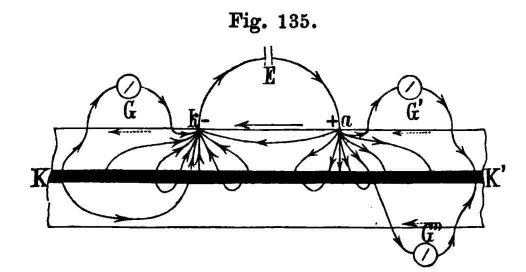


larisirbare) Draht eine Strecke weit ausserhalb der Flüssigkeit verlaufen, wofern diese nicht unterbrochen ist (Schliessung und Oeffnung des Schlüssels s, Fig. 134 *C*). Es lassen sich keine Stromzweige ableiten, wenn das Rohr genau quer (z. B. von *e* nach *g* in Fig. 134 *A*) durchströmt wird. Die abgeleiteten Stromzweige sind, alles Uebrige gleichgesetzt, insbesondere bei gleicher Entfernung der abgeleiteten Strecke von der nächstgelegenen Elektrode des polarisirenden Stromes zu beiden Seiten desselben, also oberhalb der Anode und unterhalb der Kathode gleich stark, wenn ein Platindraht in Schwefelsäure oder in Zinklösung angewendet wird. Bei anderen Combinationen, wo die Polarisation an der einen Elektrode fehlt, kommen auf der betreffenden Seite keine ableitbaren Stromzweige zu Stande. Die Ströme sind dem polarisirenden Strome ceteris paribus an Stärke proportional. Sie wachsen ferner mit der Länge der durchflossenen Strecke, wofern bei Aenderung derselben die Stärke des polarisirenden Stromes constant erhalten wird. Die Ströme entstehen merklich gleichzeitig mit Schliessung des polarisirenden Stromes und nehmen dann allmälig ab. Wird der Flüssigkeit zwischen durchflossener und abgeleiteter Strecke ein metallischer leitender Bogen angelegt, so werden die abgeleiteten Ströme stärker.

Diese Versuchsergebnisse lassen sich leicht theoretisch erklären. Der der flüssigen Hülle zugeleitete Strom strebt sich natürlich vorzugsweise durch den gut leitenden metallischen Kern abzugleichen. Ist dieser unpolarisirbar (wie etwa ein amalgamirter Zinkdraht in Zinklösung), so nehmen die in ihn eintretenden Stromfäden mit zunehmender Länge rasch ab, d. h. der Strom tritt fast ganz an den Elektrodenstellen in den Kern ein und aus ihm aus. Der Ein- und Austritt geschieht rings herum mit ziemlich gleicher Intensität, wenn der Kern so dünn ist, dass seine Umfangsdimension zur Länge eines Stromfadens in der Flüssigkeit zugefügt, dessen Widerstand nicht beträchtlich erhöht, d. h. also nur einen kleinen Bruchtheil von der übrigen Länge des Stromfadens bildet.

Findet dagegen an der Grenze von Kern und Hülle Polarisation statt, so fügt deren Gegenkraft zu dem Widerstande der Stromfäden noch einen Uebergangswiderstand hinzu, der an allen Stellen der Kernoberfläche gleich gross ist. Ist nun dieser Uebergangswiderstand gross im Vergleich zu den von der Länge abhängigen Widerständen der Stromfäden selbst, so hat die Länge nur geringen Einfluss auf die Vertheilung des Stromes in der Hülle und es werden sich also sehr merkliche Stromzweige weithin längs des Kernes verbreiten. Sie werden auch auf jedem Querschnitte **rings um den Kern herum** ziemlich gleichmässig in den Kern einbiegen, wenn dessen Umfang gegen die Länge der Stromfäden klein ist, was bei ihrer jetzt weiter gehenden Ausbreitung immer der Fall sein wird. Wir werden also ein System von Stromfäden erhalten, wie es in Fig. 135 dargestellt ist. Von diesen Stromfäden lassen sich nun überall merkliche Antheile durch angelegte leitende Bogen zum Galvanometer abzweigen, wie in der Fig. 135 bei G, G_{I}, G_{II} angedeutet ist, und man sieht, dass diese abgezweigten Ströme überall dem polarisirenden Strome gleichgerichtet sind. Man sieht auch leicht, dass die sämmtlichen oben angeführten Einzelheiten der Versuchsresultate sich aus der entwickelten Anschauung von der Stromvertheilung folgern lassen.

Fig. 135.



Anhang.

Ueber Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf medicinische Statistik.

Bekanntlich sucht man viele Probleme der medicinischen Wissenschaft durch statistische Zusammenstellungen zu lösen. Diese Methode hat ohne Zweifel in der Medicin wie in anderen Wissenschaften ihre volle Berechtigung, wofern sie nur in der richtigen Weise angewandt wird. Die Regeln dieser Anwendung können aber durchaus nur der „Wahrscheinlichkeitsrechnung" entlehnt werden, welche nach Laplace's treffenden Worten „nichts Anderes ist, als der auf scharfen Ausdruck gebrachte gesunde Menschenverstand". Im Folgenden sollen die wichtigsten Resultate dieser mathematischen Disciplin, welche auf medicinische Statistik Anwendung erleiden, mitgetheilt werden. Wir müssen jedoch einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken, um womöglich gewisse Vorurtheile zu zerstreuen, die leider noch immer in Betreff der Anwendung statistischer Methoden unter den Aerzten zu herrschen scheinen. Schon von verschiedenen Seiten [1]) sind den medicinischen Forschern die mathematischen Hülfsmittel fertig zugerichtet dargeboten worden, so dass es sich nur noch um eine rein mechanische Benutzung handelt. Noch immer aber haben dieselben keinen umfassenden Gebrauch davon gemacht. Ja es haben sich sogar öfters gewichtige Stimmen principiell dagegen erhoben. So wendet beispielsweise ein Arzt [2]) von wohlbegründetem Rufe gegen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Probleme der organischen Natur ein: „Wir können genau berechnen, wie gross die Leistungsfähigkeit einer Dampfmaschine unter gegebenen Verhältnissen ist, und wie weit sich dieselbe ändert, sobald diese Verhältnisse geändert

---

[1]) Gavarret, Principe généraux de statistique médicale, Paris 1840. Radicke, Die Bedeutung und der Werth arithmetischer Mittel etc. Arch. f. physiol. Heilk. Neue Folge, Bd. II, S. 145.

[2]) Benecke, Arch. f. physiol. Heilk. Neue Folge, Bd. II, S. 552.

werden. Wir gewinnen damit untrügliche Zahlen und die weitere Verwerthung derselben bietet keine Schwierigkeiten dar. Der thierische Organismus aber, und am wenigsten der menschliche, ist keine solche Maschine. Alltäglich und stündlich wirken Einflüsse auf ihn ein, die den Fluss der Lebenserscheinungen in mehr weniger bedeutendem Grade alteriren können, und welcher Art die Untersuchungen auch sind, die man am menschlichen Organismus anstellt, es wird bei der Resultirung immer mehr darauf ankommen, diese Einflüsse richtig abzuwägen, mit einem Worte, das Experiment physiologisch zu prüfen, als auf die gewonnenen Zahlen den Scharfsinn eines Mathematikers verwenden." Die citirte Aeusserung ist zwar nur eine einzelne, aber sie dürfte doch wohl annähernd den Sinn aller Derer ausdrücken, die der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Medicin abgeneigt sind, und es dürfte daher erlaubt sein, an diese Aeusserung unsere allgemeinen Bemerkungen zunächst anzuknüpfen. Es ist offenbar ein einfaches Missverständniss, wenn in dem fraglichen Zusammenhange die Anwendbarkeit des Calculs auf organische Vorgänge bestritten, auf die Vorgänge in einer Dampfmaschine dagegen statuirt wird — handelt es sich ja doch um den Wahrscheinlichkeitscalcul. Das Anwendungsgebiet dieses Calculs sind aber eben diejenigen Erscheinungen, auf welche uns ganz unbekannte oder wenigstens unberechenbare Ursachen einwirken, also jedesfalls eher die Erscheinungen am Menschen als an der Dampfmaschine, und es ist auch wohl noch keinem vernünftigen Ingenieur in den Sinn gekommen, den fraglichen Calcul auf seine Maschinen anzuwenden. Nach dem Vordersatze meint man nun, die Vorgänge am menschlichen Körper sollten dem (Wahrscheinlichkeits-) Calcul für unzugänglich erklärt werden, weil man zu wenig davon wisse, aber im Nachsatze wird dann die Behauptung gebracht, man könne des Wahrscheinlichkeitscalculs entbehren, weil man genug davon wisse. Ich kann wenigstens die Worte, dass es bei Ziehung von Schlüssen darauf ankomme, „die Einflüsse richtig abzuwägen", nicht anders verstehen. Das wäre auch ganz wahr, wenn wir die Einflüsse nur richtig abwägen könnten, dann brauchten wir allerdings keine Wahrscheinlichkeitsrechnung und keine Statistik mehr. Das Abwägen der einzelnen Umstände wäre eben „Gewissheitsrechnung". Soweit sind wir aber mit dem Menschen nicht, wir können die Einflüsse, die hier wirken, nicht abwägen, ja es handelt sich in den hier in Betracht kommenden Fällen gerade darum, zu ermitteln, ob irgend ein Agens ein Einfluss ist oder nicht, und dazu soll Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen. Man hat auch in der That von ihren Principien zu diesem Zwecke seit Menschengedenken Gebrauch gemacht, und es thun es tagtäglich diejenigen, die sich in principiellen Aeusserungen dagegen sträuben. Hat man sich doch in der Therapie von jeher, wenige Fälle abgerechnet, auf die Erfolge berufen. Wer wüsste z. B. den Einfluss des Chinins auf einen Wechselfieberkranken richtig „abzuwägen", dass ein solcher und zwar ein günstiger statthaft, schliesst

man aus den Erfolgen. Das heisst aber gar nichts Anderes, als die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Anwendung bringen. Es kann sich überhaupt kein Mensch in der Welt der täglichen Anwendung dieser Principien in Leben und Wissenschaft erwehren, sie wurzeln zu fest im gesunden Menschenverstande. Es ist daher schwer begreiflich, dass sich die Aerzte so hartnäckig gegen die Anwendbarkeit der besonderen Folgerungen aus den anerkanntesten Principien sträuben. Dies heisst nichts Anderes als behaupten, dass die ersten Köpfe der beiden verflossenen Jahrhunderte, ein Pascal, Fermat, Bernouilli, Laplace, Gauss, Unsinn behauptet haben. Diese Mathematiker sagen alle mit den klarsten Worten, dass die von ihnen entwickelten Resultate der Wahrscheinlichkeitsrechnung streng logische Consequenzen aus den allgemein zugestandenen Grundsätzen des gesunden Menschenverstandes sind, und dass sie auf allen Gebieten Anwendung finden, wo es sich um Erscheinungen handelt, auf die zahllose unbekannte und unberechenbare Ursachen einwirken.

Der Streit gegen die Nothwendigkeit, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch numerisch auf die medicinische Statistik anzuwenden, gleicht dem Streite Don Quixotes gegen die Windmühlen, denn wenn die Gegner ihre eigenen Begriffe scharf zergliederten, so würden sie ihren Streit aufgeben und würden überdies finden, dass der numerische Wahrscheinlichkeitscalcul oft ihre eigenen wissenschaftlichen Behauptungen besser stützen würde, als sie dieselbe selbst gestützt glauben. Ein concretes Beispiel wird die Behauptung am besten rechtfertigen. Gavarret hat in seinem oben citirten Werkchen aus Gründen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Fug und Recht die Schlüsse angefochten, welche Louis aus einer Reihe von Beobachtungen über die Wirkung des Aderlasses und des Tartarus emeticus gezogen hatte. In einer an Phrasen überhaupt und für Gavarret anerkennenden Phrasen insbesondere sehr reichen Kritik[1]) leugnet nun Valleix factisch vollkommen die von ihm nicht verstandenen Principien, welche Gavarret vertritt, und nimmt Louis' Schlüsse in Schutz. Es wird dabei viel davon geredet, dass in Louis' Statistik nicht bloss die Zahlen eine Rolle spielten, sondern die genaue Beobachtung. Hierin liegt natürlich schon ein Missverständniss, denn die genaue Beobachtung hat bei der statistischen Methode immer nur den Zweck, festzustellen, was gezählt werden soll, das Beweisende bleibt rein das numerische Verhältniss. Den Todesstoss glaubt aber Valleix der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu versetzen, indem er Louis' Beweis für die Wirksamkeit des Brechweinsteins in der Pneumonie vorführt, der, wie er meint, jedem einleuchten müsse, obwohl er den von Gavarret vertretenen Principien zuwiderlaufe. „Der Brechweinstein," beginnt Valleix, „wurde 20 Kranken gegeben und davon starben bloss drei. Ein sehr

---

[1]) Archives générales de médicine, 3me serie, Bd. VIII, S. 1.

günstiges Resultat, doch streng genommen von geringem Werthe. Denn, wie Gavarret gezeigt hat, kann, wo es sich um so kleine Zahlen handelt, der Irrthum so gross sein, dass man keinen bindenden Schluss ziehen kann. Bleiben wir jedoch dabei nicht stehen. Betrachten wir, unter welchen Umständen sich die Kranken befanden, denen der Brechweinstein in grossen Dosen gegeben wurde. Wir finden zunächst, dass dies geschah nach mehreren fruchtlosen Aderlässen, während die Krankheit sich stetig verschlimmerte. Diese Thatsache giebt dem in Rede stehenden Resultate schon einen grösseren Werth, denn man sieht mehr Erfolg da, wo man weniger hätte erwarten sollen.“ Diese Betrachtung kann man in folgende Worte übersetzen: Louis hat mit Brechweinstein nicht einfach 20 Pneumonieen, sondern 20 (nach seinem Urtheile) sehr schwere Pneumonieen behandelt, und bloss drei davon starben. Wenn irgend ein verständiger Mensch hieraus einen Schluss auf die Wirksamkeit des Brechweinsteins machen will, so muss er sich zuvor eine numerische Vorstellung von jener Schwere der betreffenden Pneumonieen machen. Irgend welche derartige Vorstellung hat jedesfalls auch Valleix vorgeschwebt. Nehmen wir an, er wäre stillschweigend von der Voraussetzung ausgegangen, unter Pneumonieen von der Qualität, welche Louis mit Brechweinstein behandelte, verliefen durchschnittlich 50 Procent tödtlich, wofern kein Brechweinstein gegeben wird. Wenn aber diese Voraussetzung richtig ist, dann verwirft die Wahrscheinlichkeitsrechnung keineswegs, wie Valleix meint, den Louis'schen Schluss trotz der kleinen Anzahl der Fälle. Die numerische Rechnung zeigt im Gegentheil, dass unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 Fällen nicht mehr als drei tödtlich verlaufen, so gering ist, dass man wohl berechtigt ist zu der Vermuthung, es sei eine constante Ursache (der Brechweinstein) im Spiel, nicht der blosse Zufall. Ja, ich glaube, Valleix selbst würde keine so hohe Wette darauf wagen, dass beim Roulett in 20 Spielen nicht mehr als dreimal Schwarz fällt, als ihm die Wahrscheinlichkeitsrechnung vernünftiger Weise zu wagen gestattet. Man sieht also, dass Valleix's Argument den Vertreter der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchaus nicht in der Weise in Verlegenheit setzt, dass er einen Schluss zugeben müsste, der seinen Regeln zuwider gemacht wäre. Wenn er den Schluss überhaupt verwerfen will (was hier nicht zu erörtern ist), so verwirft er ihn nicht, weil er falsch gezogen ist, sondern weil er die freilich nur stillschweigend eingeschmuggelte Voraussetzung nicht zugiebt. Mit blosser „Betrachtung der Umstände“ kann sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung eben nicht begnügen. Im vorliegenden Falle hätte eine zweite Statistik, von möglichst ähnlich schweren Pneumonieen ohne Brechweinstein behandelt, der ersten an die Seite gestellt werden müssen, aus welcher irgend eine angenäherte Zahl für die durchschnittliche Sterblichkeit bei der betreffenden Krankheitsintensität entnommen werden konnte; denn wer bürgt dafür, dass nicht solchen ein sehr gefährliches Ansehen darbietenden Fällen

doch nur eine durchschnittliche Sterblichkeit von 15 Procent zukommt. Solche numerische Grundlagen verlangt aber nicht nur die Wahrscheinlichkeits**rechnung**, sondern es verlangt sie auch der gesunde Menschenverstand, wenn er auch nicht gerade auf dem Papiere mit geschriebenen Zahlen rechnet und, wie gesagt, hat **Valleix** selbst bei den oben citirten Betrachtungen irgend eine quantitative Beziehung vorgeschwebt, vielleicht nicht gerade die beispielsweise angenommene bestimmte Voraussetzung einer durchschnittlichen Sterblichkeit von 50 Procent, so doch etwas wie: die durchschnittliche Sterblichkeit ohne Brechweinstein würde nicht kleiner als 40 Procent sein oder irgend etwas derart in Zahlen Ausdrückbares. Die Gefahr des blossen Schätzens ohne eigentlich numerische Rechnungen mit geschriebenen Zahlen besteht nun gerade darin, dass man dabei zu geneigt ist, sich halb unbewusst unrichtige oder wenigstens gänzlich unbewiesene quantitative Voraussetzungen vorschweben zu lassen, vor denen man vielleicht zurückschrecken würde, sähe man sie schwarz auf weiss vor sich.

Es wird hoffentlich nunmehr klar sein, dass die Beurtheilung des Werthes einer statistischen Zusammenstellung **lediglich** und **ausschliesslich** Sache des allgemeinen gesunden Menschenverstandes, d. h. der Mathematik und zwar der Wahrscheinlichkeitsrechnung insbesondere ist, und dass dabei die Kenntniss vom Gegenstande, um den es sich handelt, gar nicht in Betracht kommt. Diese Kenntniss ist nöthig, um die Zusammenstellung zu machen, d. h, um anzugeben, welche Fälle gezählt werden sollen und welche nicht. Der einfache gesunde Menschenverstand, d. h. die Mathematik, giebt aber an, welche Tragweite und welchen Grad von Sicherheit die aus der Zusammenstellung gezogenen Schlüsse haben. Der gesunde Menschenverstand kann nicht wissen, ob dieser oder jener Mensch eine Pneumonie überhaupt oder eine doppelseitige Pneumonie hat. Liegt ihm aber eine mit Sachkenntniss zusammengestellte Statistik über n Pneumonieen vor, worunter m tödtlich verliefen, so kann er berechnen, zwischen welchen Grenzen die durchschnittliche Sterblichkeit bei Pneumonie überhaupt wahrscheinlich liegt, oder aus einer Statistik über doppelseitige Pneumonie insbesondere kann er berechnen, zwischen welchen Grenzen sie bei dieser besonderen Form der Pneumonie wahrscheinlich liegt.

Eines darf man natürlich bei der Statistik vor Allem nicht vergessen, dass es die Wahrscheinlichkeitsrechnung eben mit **Wahrscheinlichkeit** zu thun hat, nie mit Gewissheit. Daher kann es sehr wohl vorkommen, dass der Fachmann, auf irgend eine der Statistik fremde Erwägung gestützt, etwas annimmt, das nach den Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausserordentlich unwahrscheinlich ist. Darin liegt natürlich kein Widerspruch, denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt nie zu dem Resultate, dass etwas unmöglich ist. So z. B. werde ich trotzdem, dass vor meinen Augen 20 mal hinter einander mit einem Würfel Vier geworfen ist, doch annehmen, dass auch andere Zahlen auf

den Seiten des Würfels stehen, wenn ich denselben vorher besehen habe. Ich wäre damit auch nicht im Widerspruch mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die eben nur sagt, es sei ganz ausserordentlich unwahrscheinlich, dass mit einem gewöhnlichen Würfel 20mal nach einander Vier geworfen wird, keineswegs aber, es sei unmöglich. Für solche Fälle, wo man den Würfel vorher gesehen hat, ist dann freilich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung überflüssig, aber es bleiben leider noch Fälle genug übrig, in denen man durch anderweitige Erwägungen zu keiner Gewissheit kommen kann, und diese sind es gerade, wo uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung eben einen mehr oder weniger hohen Grad von Wahrscheinlichkeit bietet, den sie uns auch numerisch bestimmen lehrt.

Die Möglichkeit, in irgend einem Gebiete des menschlichen Wissens Statistik als Hülfsmittel der Forschung zu verwenden, beruht auf einem Satze, der zu den bemerkenswerthesten und allgemeinsten Wahrheiten gehört, die bis jetzt vom menschlichen Geiste mit Sicherheit erkannt sind. Es ist dies das sogenannte Gesetz der grossen Zahlen und kann folgendermaassen ausgesprochen werden: Wenn ein Ereigniss A an sich eine gewisse Wahrscheinlichkeit hat, und man beobachtet eine Anzahl von Fällen, in welchen das Ereigniss A entweder eintreten muss oder nicht, so wächst mit wachsender Anzahl der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der Anzahl der Fälle, in welchen das Ereigniss A stattgefunden hat, zur Gesammtzahl der Beobachtungen der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A an sich sehr nahe kommt. Dieser für die Entwickelung aller Wissenschaft unendlich folgenschwere Satz ist nicht etwa bloss eine plausible Annahme, sondern er ist streng mathematiseh erweisbar, und dass er nach dem Urtheile der erleuchtetsten Geister auch eines Beweises bedarf, lässt sich daraus entnehmen, dass J. Bernouilli nach seiner eigenen Aussage 20jähriges Nachdenkens zur Auffindung des Beweises aufgewandt hat. Jetzt ist der Beweis freilich in fünf Minuten zu durchschauen und ist in jedem Elementarlehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu finden [1]).

Wenn in der That der soeben ausgesprochene Satz die Grundlage für alle statistische Forschung ist, so kann dieselbe offenbar nur da Anwendung finden, wo bei dem einzelnen Ereignisse von einer Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinne des Wortes die Rede sein kann, d. h. da, wo das Eintreten oder Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses von unberechenbaren Umständen, von sogenannten Zufälligkeiten abhängt, wie schon in den einleitenden Bemerkungen angedeutet wurde. Alle Gegenstände statistischer Forschung lassen sich daher auf ein Schema reduciren, das auch in den Abhandlungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung beständig benutzt wird: man kann sich nämlich unter dem

---

[1]) Man sehe z. B. Lacroix' Traité élémentaire du Calcul des probabilités 4me édit. Paris 1864. Das Studium dieses vortrefflichen Werkchens dürfte überhaupt allen denen zu empfehlen sein, welche sich eine vollständigere Einsicht in diese wichtigen Lehren verschaffen wollen.

Eintreten des Ereignisses A immer denken das Erscheinen einer schwarzen Kugel bei einem blinden Griffe in eine Urne, welche schwarze und weisse Kugeln enthält, unter dem Nichteintreten des Ereignisses A wäre denn das Erscheinen einer weissen Kugel zu verstehen. Dies Schema, dessen wir uns auch ferner bedienen werden, ist nicht bloss ein einzelnes Beispiel, es ist vielmehr ein Repräsentant aller möglichen Gegenstände statistischer Behandlung. Ein Gebiet, das nicht durch dies Schema repräsentirt werden kann, ist überall nicht der statistischen Behandlung fähig. Dass das Schema auf die Erscheinungen passt, welche Gegenstand der medicinischen Statistik sein sollen, ist offenbar, und wird sich im Laufe unserer Betrachtungen noch deutlicher herausstellen.

Wir wollen nun zunächst das oben ausgesprochene Grundgesetz noch etwas näher erläutern. Stellen wir uns vor, eine Urne enthielte zwei schwarze und drei weisse Kugeln und es würde viele Male hinter einander eine Kugel blind herausgezogen. Natürlich wird die gezogene Kugel sofort wieder hineingelegt, so dass das Verhältniss der schwarzen und weissen ungeändert bleibt. Die abstracte Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist hier bekanntlich für jeden einzelnen Griff $^2/_5$. Nehmen wir jetzt zwei Verhältnisse, die von $^2/_5$ wenig verschieden sind, z. B. $^5/_{10}$ und $^3/_{10}$, zwischen denen $^2/_5$ ($= {}^4/_{10}$) mitten inne liegt, dann sagt der Bernouilli'sche Satz: Je öfter wir das Ziehen einer Kugel wiederholen, desto grösser wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der Anzahl der Fälle, wo eine schwarze Kugel erschienen ist, zur Gesammtzahl der Fälle zwischen den Grenzen $^5/_{10}$ und $^3/_{10}$ enthalten ist. Schon bei 10 Zügen würde die Wahrscheinlichkeit, nicht mehr als fünfmal und nicht weniger als dreimal eine schwarze Kugel zu ziehen, merklich grösser als $^1/_2$ sein. Bei tausend Versuchen aber würde die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel nicht mehr als 500 mal und nicht weniger als 300 mal erschiene, kaum noch von 1 verschieden sein, d. h. es würde fast gewiss sein, dass das Verhältniss der Fälle, wo eine schwarze Kugel erscheint, zn der Gesammtzahl der Fälle von der abstracten Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, um weniger als $^1/_{10}$ abweicht. Die volle Gewissheit ist aber in der Wirklichkeit nie zu erlangen, was seinen symbolischen Ausdruck durch die mathematische Zeichensprache darin findet, dass die Wahrscheinlichkeit erst dann genau gleich 1 wird, wenn die Anzahl der Fälle unendlich gross ist.

Wenden wir eine zweite Ausdrucksweise des Bernouilli'schen Satzes auf unser Beispiel an. Wir setzen einen bestimmten Wahrscheinlichkeitsgrad, z. B. $\frac{200}{201}$, fest. Nun sagt der Bernouilli'sche Satz: Diese Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, dass das Verhältniss der gezogenen schwarzen Kugeln zur Anzahl aller Züge um so weniger von $^2/_5$ abweicht, je grösser diese Anzahl aller Züge ist. So könnten wir z. B. vernünftiger Weise 200 gegen 1 wetten, dass bei hundert Zügen nicht mehr als etwa 54 und nicht weniger als etwa 26 schwarze Kugeln

herauskommen, d. h. dass jenes Verhältniss nicht mehr als um etwa 0,14 von $^2/_5$ verschieden ist. Bei tausend Zügen könnten wir aber schon 200 gegen 1 darauf wetten, dass nicht mehr als etwa 445 und nicht weniger als etwa 355 schwarze Kugeln erscheinen, d. h. dass das fragliche Verhältniss um weniger als 0,045 von $^2/_5$ verschieden ist. Bei einer unendlichen Anzahl von Zügen würde man 200 gegen 1 (oder auch jeden anderen Satz) wetten können, dass das Verhältniss der Anzahl der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln sich gar nicht von $^2/_5$ unterscheidet.

Das Wesen aller Statistik besteht nur in der umgekehrten Anwendung des in Rede stehenden Satzes. In der That, wenn das Verhältniss der gezogenen schwarzen Kugeln zur Anzahl aller gezogenen Kugeln bei einer genügenden Anzahl von Zügen dem Verhältniss der in der Urne enthaltenen schwarzen Kugeln zu der Anzahl aller darin enthaltenen Kugeln sehr wahrscheinlich nahe kommt, so kann man aus jenem beobachteten Verhältniss einen Schluss machen auf dies letztere Verhältniss, wofern es unbekannt ist. Ganz allgemein gesprochen, kann man aus einer Reihe von Beobachtungen, wo ein Ereigniss A entweder eintreten oder nicht eintreten musste, auf die abstracte Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses einen Schluss machen. Aber man muss wohl bedenken, dass der Schluss eben nur ein Wahrscheinlichkeitsschluss, kein sicherer ist.

Das gewöhnliche Ziel einer statistischen Untersuchung ist, zu untersuchen, ob ein gegebener Umstand bei einer gewissen Erscheinung die Rolle eines mitwirkenden Einflusses spielt, mit anderen Worten, ob die abstracte Wahrscheinlichkeit der fraglichen Erscheinung bei Anwesenheit dieses Umstandes eine andere ist, als bei Abwesenheit desselben. Diese Frage soll entschieden werden durch Beobachtung der Erscheinung einerseits bei Anwesenheit, andererseits bei Abwesenheit des betreffenden Umstandes. Es wird nach den vorhergehenden Erörterungen nunmehr ein Leichtes sein zu zeigen, in welcher Art der numerische Wahrscheinlichkeitscalcul bei Erreichung eines derartigen Zieles Anwendung erleidet. Bringen wir wiederum die allgemeine Frage auf das Schema der Ziehung von Kugeln aus einer Urne. Jetzt haben wir anzunehmen, dass wir nicht wissen, in welchem Verhältniss die Urne schwarze und weisse Kugeln enthält. Es sei aus einer Urne U eine Anzahl r_1 von Kugeln gezogen (natürlich ist nach jedem Zuge die gezogene Kugel wieder hineingelegt und geschüttelt) und darunter seien m_1 schwarze, dann ist schon nach dem Vorhergehenden klar, dass, wofern r_1 eine sehr grosse Zahl, z. B. grösser als 1000 ist, das Verhältniss $\frac{m_1}{r_1}$ sehr wahrscheinlich dem Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne sehr nahe kommt, indessen wird es ihm sehr wahrscheinlich nicht ganz genau gleich sein. Es sei zweitens aus einer anderen Urne V eine Anzahl r_2 von Kugeln gezogen, darunter m_2 schwarze. Man will nun wissen, ob die Urne V schwarze und weisse Kugeln im selben oder in anderem Verhält-

niss enthält, als die Urne *U*. Es versteht sich ganz von selbst, dass man dies auf dem in Rede stehenden statistischen Wege niemals absolut sicher erfahren kann — um es sicher zu erfahren, müsste man in die Urne hineinsehen können —, aber man wird doch unter Umständen behaupten können, dass sehr wahrscheinlich die schwarzen und weissen Kugeln in *V* in anderem Verhältnisse als in *U* enthalten sind. Wann diese Behauptung und mit welchem Grade von Wahrscheinlichkeit sie aufgestellt werden darf, lässt sich aber keineswegs nach blossem Gutdünken entscheiden, dazu ist durchaus ein numerisch ausgeführter Wahrscheinlichkeitscalcul nöthig. Seien beispielsweise aus jeder Urne 50 Kugeln gezogen worden, aus *U* 15 schwarze und 35 weisse, aus *V* 25 schwarze und 25 weisse. Es wäre sehr gewagt, daraus zu schliessen, dass die Urne *V* verhältnissmässig mehr schwarze Kugeln enthält als *U*. Denn es hat offenbar gar nichts Unwahrscheinliches, aus einer Urne, welche zu zwei Fünftheilen schwarze Kugeln enthält, einmal bei 50 Zügen 15, ein andermal bei 50 Zügen 25 schwarze Kugeln zu ziehen. Der vorausgesetzte Thatbestand würde sich also ganz gut mit der Annahme vertragen, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in beiden Urnen dem Verhältniss $^2/_5$ genau oder nahezu gleich wäre.

Hätte man dagegen in jede der beiden Urnen *U* und *V* 5000 mal gegriffen, und aus *U* 1500, aus *V* 2500 schwarze Kugeln erhalten, dann würde man offenbar berechtigt sein, anzunehmen, dass sehr wahrscheinlich in der Urne *U* wirklich verhältnissmässig weniger schwarze Kugeln sind als in *V*. Wenn auch in manchen Fällen ein Schluss, wie der in Rede stehende, oder die Unmöglichkeit eines solchen auf der Hand liegt, so kann doch nur der eigentliche Wahrscheinlichkeitscalcul lehren, wie im Allgemeinen die Zahlen beschaffen sein müssen, um durch sie einen Schluss der fraglichen Art zu begründen. Die Regeln darüber sind höchst einfach, obwohl nur die verwickeltsten mathematischen Speculationen dazu führen konnten, und es sollen im Folgenden diese Regeln aufgestellt und erläutert werden. Zuvor jedoch wollen wir noch näher betrachten, in welcher Weise in der That das Schema von zwei Urnen, die schwarze und weisse Kugeln enthalten, alle Probleme der medicinischen Statistik genau repräsentirt.

Es sei beispielsweise unsere Aufgabe zu ermitteln, ob auf den Verlauf der Lungentuberculose die Lebensweise der wohlhabenden Gesellschaftsclasse einen vortheilhaften Einfluss übe oder nicht. Diese Aufgabe lässt sich offenbar auf das Schema der zwei Urnen mit schwarzen und weissen Kugeln zurückführen, und ist mithin der statistischen Behandlung fähig. In der That besteht offenbar für einen der unbemittelten Volksclasse Angehörigen, mit Tuberculose Behafteten, eine gewisse Wahrscheinlichkeit, der Krankheit zu erliegen, d. h. man weiss ebenso wenig zum Voraus, ob er ihr erliegen wird oder nicht, wie man zum Voraus weiss, ob man beim einzelnen Zuge aus einer Urne weiss, ob man eine schwarze oder weisse Kugel ziehen wird, aber es muss ein bestimm-

tes, freilich nicht a priori erkennbares Zahlenverhältniss geben, welches angiebt, wie viel mehr Grund wir haben, zu erwarten, der Kranke werde erliegen, als genesen. Der unbemittelte Tuberculose steht also gleichsam vor einer Urne *U* mit schwarzen und weissen Kugeln im bestimmten Verhältnisse, aus der er einen Zug thun muss, der ihm entweder eine schwarze Kugel — Erliegen — oder eine weisse — Genesung — bringt. Die Analogie besteht einzig darin, aber dies genügt, dass der Eintritt des Erliegens oder Genesens ebenso von unberechenbaren Umständen (sogenannten Zufälligkeiten) abhängt, wie das Erscheinen einer weissen oder schwarzen Kugel, und dass der ganze Complex von theils günstigen, theils ungünstigen Umständen für alle Individuen der betrachteten Classe derselbe ist, das drückt sich im Schema dadurch aus, dass die sämmtlichen Individuen aus derselben Urne eine Kugel ziehen. In derselben Weise ist man berechtigt, alle Tuberculosen aus der bemittelten Volksclasse zu denken als vor einer Urne *V* stehend, aus welcher jeder einen Zug zu thun hat, der entscheidet, ob er genest oder erliegt. Wenn man nun eine grosse Anzahl von Zügen aus der Urne *U* beobachtet, d. h. an einer grossen Anzahl von unbemittelten Tuberculosen Erliegen resp. Genesen beobachtet, so kann man mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen, wie gross ungefähr das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne *U* ist, mit anderen Worten, wie gross ungefähr die Wahrscheinlichkeit, zu erliegen, für jeden einzelnen unbemittelten Tuberculosen ist, — man kann Grenzen angeben, zwischen denen ihr Werth sehr wahrscheinlich enthalten ist. Ebenso kann man aus einer Anzahl von Beobachtungen an bemittelten Tuberculosen schliessen, wie gross wahrscheinlich für einen Tuberculosen der letzteren Classe die Wahrscheinlichkeit zu erliegen ungefähr ist, — man kann auch für den Werth dieser Wahrscheinlichkeit Grenzen angeben, welche dieselbe sehr wahrscheinlich nicht überschreitet. Die Vergleichung zwischen den beiden Ergebnissen kann nun offenbar möglicher Weise zu dem Schlusse berechtigen, dass sehr wahrscheinlich in der Urne *U* verhältnissmässig mehr schwarze Kugeln sind, als in der Urne *V*, d. h. dass für einen unbemittelten Tuberculosen die Wahrscheinlichkeit, der Krankheit zu erliegen, grösser ist, als für einen bemittelten. Dieser Schluss käme darauf hinaus, dass die Lebensweise der bemittelten Stände einen günstigen Einfluss auf den Verlauf der Tuberculose übte, oder die der unbemittelten Volksclasse einen ungünstigen. Es kann sich natürlich auch umgekehrt das Resultat ergeben, dass wir durch unsere Statistik nicht zu dem Schlusse berechtigt sind, in der Urne *U* seien wahrscheinlich verhältnissmässig mehr schwarze Kugeln als in *V*. Dann können wir durch die Statistik die Behauptung eben nicht stützen, dass die Lebensweise der unbemittelten Volksclasse zu den ungünstigen Umständen für die Tuberculosen gehöre.

Angenommen, es hätte sich bei der gedachten statistischen Untersuchung herausgestellt, wir wären zu dem besprochenen Schlusse be-

rechtigt, dann könnten wir weiter versuchen, durch Statistik zu ermitteln, welche unter den Lebensverhältnissen der unbemittelten Volksclasse vorwiegend jenen schädlichen Einfluss ausüben, wir könnten z. B. fragen, ob es vorwiegend etwa angestrengte körperliche Arbeit ist? Wir brauchten zu diesem Ende nur die unbemittelten Tuberculosen selbst wieder in zwei Classen zu bringen, deren eine zu angestrengter körperlicher Arbeit gezwungen ist, während die andere dies nicht ist.

Hoffentlich wird aus diesem einen Beispiel ersichtlich geworden sein, wie sich alle Probleme der medicinischen Statistik im engeren Sinne des Wortes reduciren lassen auf das Schema: Es wird gefragt, wie gross ist wahrscheinlich das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in einer Urne, aus welcher man eine gewisse Anzahl von Zügen beobachtet hat? und wir können nunmehr zur Erörterung der Rechnungsregeln übergehen.

Dem Bernouilli'schen Satze gleichsam als Umkehrung entsprechend lässt sich folgender Satz aufstellen: Wenn bei r Beobachtungen im Ganzen m mal das Ereigniss A eingetreten [und mithin $(r-m)$ mal nicht eingetreten] ist, so ist ein bestimmter, beliebig zu wählender Grad von Wahrscheinlichkeit w vorhanden, dass die abstracte Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A nicht mehr vom Verhältnisse $\frac{m}{r}$ differirt, als um einen aus den Zahlen w, m und r berechenbaren Bruch. Oder mit andern Worten: Wenn aus einer Urne r mal nach einander eine Kugel gezogen (und wieder hineingelegt) ist, und wenn m mal die gezogene Kugel eine schwarze war, so ist ein gewisser willkürlich anzunehmender Grad von Wahrscheinlichkeit w vorhanden, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne von dem Verhältniss $\frac{m}{r}$ nicht mehr abweicht, als um einen aus w, m und r berechenbaren Bruch. Es mag hier ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass in dem Calcul über den Werth statistischer Ermittelungen stets ein rein willkürliches Element enthalten ist, nämlich der Grad von Wahrscheinlichkeit, mit welchem man sich begnügen will, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen die zu berechnenden Grenzen fällt. Dies liegt aber in der Natur der Sache, denn der gesunde Menschenverstand sagt uns schon ohne Rechnung und die vorhergehenden Betrachtungen haben wiederholt darauf hingewiesen, dass durch Statistik niemals unbedingte Gewissheit, sondern immer nur Wahrscheinlichkeit zu erlangen ist, und es bleibt daher nothwendig dem Ermessen des einzelnen Forschers überlassen, bei welchem Grade der Sicherheit er sich befriedigt erklärt. Um so mehr ist aber die wirkliche Ausführung der Rechnung geboten, weil nur dadurch zu erkennen ist, welcher Grad von Sicherheit erreicht ist.

Es ist also nun vor allen Dingen eine Verabredung darüber zu treffen, welchen Grad von Wahrscheinlichkeit man verlangen will. Man muss darin natürlich ein gewisses Maass halten. Da uns die Wahrscheinlichkeit

hier doch mehr oder weniger die Gewissheit ersetzen soll, so darf man sich mit keiner zu geringen Wahrscheinlichkeit begnügen, und es wäre z. B. geradezu unsinnig, bloss die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ zu verlangen. Andererseits dürfen wir aber doch auch wieder nicht zu weit gehen, weil sonst das Resultat dadurch unbrauchbar wird, dass man Grenzen findet, die zu weit aus einander liegen. Poisson hat in seinem berühmten Werke über die Wahrscheinlichkeit der richterlichen Urtheile in einigen beispielsweise durchgeführten numerischen Rechnungen die Wahrscheinlichkeit $0.995 \left(\text{etwa} = \frac{212}{213}\right)$ als Ersatz für die Sicherheit gelten lassen, und dies Maass ist von Gavarret in der oben citirten Schrift angenommen. Die Wahl gerade dieser Zahl hat durchaus nicht etwa innere Gründe. Sie beruht bloss darauf, dass dadurch die Rechnung an Einfachheit gewinnt, und dass es zugleich eine der Einheit (dem Symbol der Gewissheit) nahe liegende Zahl ist. Wenn wir uns mit diesem Maasse von Sicherheit begnügen wollen, dann berechnet sich der Bruch, um welchen die Wahrscheinlichkeit des $m$mal in r Fällen beobachteten Ereignisses A von $\frac{r}{m}$ höchstens abweichen kann, zu $\sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}}$. Mit anderen Worten, man kann vernünftiger Weise 212 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A an sich nicht grösser ist als $\frac{r}{m} + \sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}}$ und nicht kleiner als $\frac{r}{m} - \sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}}$. Um den Satz endlich noch einmal in den Ausdrücken des allgemeinen schematischen Beispiels zu geben: Wenn wir aus einer Urne in r Zügen m schwarze Kugeln gezogen haben, so dürfen wir vernünftiger Weise 212 gegen 1 wetten, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne nicht grösser ist als $\frac{r}{m} + \sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}}$ und nicht kleiner als $\frac{r}{m} - \sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}}$. Der Werth dieser Formel ist in jedem einzelnen Falle in weniger als fünf Minuten (mit Hülfe der Logarithmentafel) ausgerechnet, was hernach durch Beispiele deutlich gemacht werden soll. Es muss übrigens hier bemerkt werden, dass unsere Formel eine Näherungsformel ist, die nur anwendbar ist, wenn r eine ziemlich grosse Zahl ist. Sowie z. B. r kleiner als 100 ist, so verliert die Formel ihre Gültigkeit, und man kann nicht mehr 212 gegen 1 wetten, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen den aus der Formel zu berechnenden Grenzen eingeschlossen ist. In einem solchen Falle müsste man die Grenzen auf einem anderen directen aber höchst mühseligen Wege berechnen. Man würde übrigens damit doch kaum zu einem brauchbaren Ergebniss kommen, weil man allemal finden würde, dass die Grenzen sehr weit aus einander liegen. Uebrigens ist diese Einschränkung weiter kein Schade, denn Statistik machen mit weniger als minde-

stens einigen hundert Fällen, heisst die Principien, worauf die statistische Forschung beruht, missverstehen. Wer mit weniger als 100 Fällen Statistik zu machen glaubt, der macht in Wahrheit nicht Statistik, sondern der verlässt sich auf jenes trügerische Abwägen der einzelnen Fälle, das den subjectiven Vorurtheilen Thür und Thor öffnet, die man so gern mit den schönen Namen: Sachkenntniss, individueller Tact u. s. w. nennt.

Nehmen wir jetzt wieder an, das Ereigniss A sei unter gewissen Umständen in r Fällen $m$mal eingetreten und wir könnten daher den obigen Schluss in Beziehung auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A unter den gedachten Umständen machen. Hierauf sei mit Hinzufügung eines neuen constanten Umstandes a abermals eine lange Reihe von r_1 Beobachtungen angestellt und das Ereigniss A wäre in m_1 Fällen eingetreten, dann könnten wir nach den obigen Sätzen schliessen: es ist 212 gegen 1 zu wetten, dass unter Hinzufügung des neuen Umstandes die Wahrscheinlichkeit von A zwischen den Grenzen

$$\frac{r_1}{m_1} + \sqrt{\frac{8\,m_1\,(r_1 - m_1)}{r_1^3}} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{m_1} - \sqrt{\frac{8\,m_1\,(r_1 - m_1)}{r_1^3}}$$

enthalten ist. Liegt nun die obere Grenze, welche diese letztere Rechnung ergiebt, unterhalb der unteren Grenze, welche die erstere Rechnung (die r Fälle betreffend) liefert, oder liegt die untere Grenze der zweiten Rechnung oberhalb der oberen Grenze der ersten Rechnung, so kann man noch weit mehr als 212 gegen 1 wetten, dass durch Einführung des neuen Umstandes a in den Complex der Bedingungen die abstracte Wahrscheinlichkeit von A verändert worden ist, d. h. mit anderen Worten, es ist so gut wie gewiss, dass der Umstand a Einfluss hat auf das Ereigniss A und zwar, dass er einen ungünstigen Einfluss auf dies Ereigniss hat, wenn die erstere, einen günstigen Einfluss, wenn die letztere Bedingung erfüllt ist.

Man kann sich nun aber noch immer mit dem Sicherheitsgrade $\frac{212}{213}$ begnügen wollen dafür, dass der hinzugefügte Umstand a von Einfluss ist. Dann brauchen die Verhältnisse $\frac{m}{r}$ und $\frac{m_1}{r_1}$ nicht soweit von einander zu differiren, wie es die soeben angedeutete Rechnung verlangen würde, aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung giebt eine Formel, wie weit sie von einander differiren müssen. Sowie nämlich die Differenz $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1}$ $\left(\text{resp. wofern } \frac{m_1}{r_1} > \frac{m}{r} \text{ ist, die Differenz } \frac{m_1}{r_1} - \frac{m}{r}\right)$ gleich oder grösser ist als $\sqrt{\frac{8\,m\,(r - m)}{r^3} - \frac{8\,m_1\,(r_1 - m_1)}{r_1^3}}$, so darf man mindestens 212 gegen 1 wetten, dass in der zweiten Reihe von r_1 Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A eine andere gewesen ist als in der ersten Reihe, dass mithin der Complex von Ursachen bei der zweiten

Reihe ein anderer gewesen als bei der ersten, oder da nur der Umstand a hinzugefügt wurde, dass gerade dieser Umstand zu den wirksamen Ursachen zu rechnen ist.

Findet sich die Differenz $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1}$ $\left(\text{resp. } \frac{m_1}{r_1} - \frac{m}{r}\right)$ kleiner als die soeben gegebene Wurzelgrösse, so heisst dies zunächst nur: man ist nicht berechtigt, auf die Wirksamkeit des Umstandes a 212 gegen 1 zu wetten. Keineswegs darf man aus diesem Befunde etwa allemal schliessen, dass der Umstand a höchst wahrscheinlich unwirksam sei. Wie die Zahlen r, m, r_1, m_1 beschaffen sein müssten, um diesen Schluss zu rechtfertigen, liesse sich zwar gleichfalls durch Formeln ausdrücken, doch wollen wir diese hier nicht weiter verfolgen, da sie am Ende doch praktisch nicht von grossem Interesse sein dürften. In der That wird ein vorsichtiger Forscher, wenn sich aus einer Statistik nicht mindestens mit der Sicherheit $\frac{212}{213}$ die Wirksamkeit eines Umstandes folgern lässt, eine bestimmte Behauptung vorläufig nicht aufstellen, sondern sich nur zu ferneren Untersuchungen aufgefordert finden.

Wir wollen nun das Vorstehende durch ein fingirtes Beispiel erläutern. Das Ereigniss A sei der Tod durch eine bestimmte Krankheit K, der Begriff dieser Krankheit kann so eng oder so weit gefasst werden als er will, nur muss die Anzahl der beobachteten Fälle um so grösser genommen werden, je weiter der Begriff von K gefasst wird. Wollte man z. B. unter K den exanthematischen Typhus verstehen, so dürfte man sich vernünftiger Weise auf eine kleinere Anzahl von Fällen beschränken (indessen immer noch einige hundert) als wenn man unter K Typhus überhaupt verstehen wollte. Nehmen wir an, wir hätten 900 Fälle der Krankheit K beobachtet und davon wären 180 gestorben, 720 genesen. Wir hätten also $r = 900$, $m = 180$, $r - m = 720$. Aus diesen Zahlen ist vor Allem die Grösse $\sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}}$ zu berechnen, was nach folgendem Schema geschieht:

$$\begin{aligned} log.\, 8 &= 0{,}903 \\ log.\, m = log.\, 180 &= 2{,}255 \\ log.\, (r - m) = log.\, 720 &= 2{,}857 \\ \hline \text{daher} \qquad log.\, [8 \cdot m\,(r - m)] &= 6{,}015 \\ log.\, (r^3) = log.\, (900)^3 = 3\, log.\, 900 &= 8{,}862 \\ \hline \text{folglich} \qquad log. \left[\frac{8 \cdot m\,(r - m)}{r^3}\right] &= 0{,}153 - 3 \\ &= 1{,}153 - 4 \end{aligned}$$

Die Hälfte davon ist $log. \sqrt{\frac{8m(r-m)}{r^3}} = 0{,}576 - 2$. Suchen wir zu diesem Logarithmus in der Tafel den Numerus, so finden wir 0,0377

$=\sqrt{\frac{8 . m\,(r-m)}{r^3}}$. Man kann also 212 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit, an der Krankheit K zu sterben, enthalten ist zwischen den Grenzen $\frac{180}{900}+0{,}0377$ und $\frac{180}{900}-0{,}0377$ oder vollständig decimal ausgedrückt zwischen den Grenzen 0,2377 und 0,1623, das Resultat unserer Statistik wäre mit anderen Worten, dass an der Krankheit K höchst wahrscheinlich im Durchschnitt nicht weniger als 16 und nicht mehr als 24 Procent der Befallenen sterben. Man beachte, dass trotz der ansehnlichen Anzahl von Fällen diese Grenzen doch noch ziemlich weit aus einander liegen.

Wir wollen jetzt zweitens annehmen, wir hätten 700 ($=r_1$) neue Fälle derselben Krankheit mit einem gewissen Mittel behandelt, welches in jenen 900 Fällen nicht angewandt wurde, alle übrigen Umstände wären sich aber gleich geblieben, und namentlich wäre auch bei dieser zweiten Beobachtungsreihe der Begriff der Krankheit K wieder in demselben Umfange gefasst, die Kranken wären aus denselben Bevölkerungsclassen zufällig gegriffen etc. Es seien nun von den 700 Kranken 12 Procent, d. h. 84 ($=m_1$) gestorben und 616 ($=r_1-m_1$) genesen. Es fragt sich, ob wir einen Schluss auf Wirksamkeit des in Rede stehenden Mittels ziehen können. Wir haben also jetzt zu berechnen die Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}+\frac{8\,m_1\,(r_1=m)}{r_1^3}}$, indem wir darin setzen $r=900$, $m=180$, $r_1=700$, $m_1=84$. Diese Rechnung kann nach folgendem Schema leicht gemacht werden:

$$\begin{aligned} log.\ 8 &= 0{,}903 \\ log.\ m = log.\ 180 &= 2{,}255 \\ log.\ (r-m) = log.\ 720 &= 2{,}857 \\ \hline log.\ [8\,m . (r-m)] &= 6{,}015 \\ log.\ r^3 = log.\ 900^3 = 3\ log.\ (900) &= 8{,}862 \\ \hline \end{aligned}$$

daher
$$log.\ \frac{8\,m\,(r-m)}{r^3} = 0{,}153-3$$

hierzu der Numerus

$$0{,}00142=\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}.$$

$$\begin{aligned} log.\ 8 &= 0{,}903 \\ log.\ m_1 = log.\ 84 &= 1{,}924 \\ log.\ (r_1-m_1) = log.\ 616 &= 2{,}790 \\ \hline log.\ 8\,m_1\,(r_1-m_1) &= 5{,}517 \\ log.\ r_1^3 = 3\ log.\ 700 &= 8{,}535 \\ \hline \end{aligned}$$

daher
$$log.\ \frac{8\,m_1\,(r_1-m_1)}{r} = 0{,}082-3,$$

hierzu der Numerus

$$0{,}00121 = \frac{8\,m_1\,(r_1 - m_1)}{r_1^3}.$$

Mithin haben wir

$$\frac{8\,m\,(r - m)}{r^3} + \frac{8\,m_1\,(r_1 - m_1)}{r_1^3} = 0{,}00263.$$

Hieraus ist die Wurzel zu ziehen, man sucht daher in der Tafel *log.* 0,00263 = 0,420 — 3 = 1,420 — 4. Davon die Hälfte = 0,710 — 2 ist *log.* $\sqrt{0{,}00263}$. Diese Wurzel ist also die Zahl, deren Logarithmus 0,710 — 2 ist, d. h. die Zahl 0,0513. Der Werth der fraglichen Wurzelgrösse ist also in unserem Falle = 0,0513. Da wir nun hatten $\frac{m}{r} = 0{,}20$ und $\frac{m_1}{r_1} = 0{,}12$, folglich $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1} = 0{,}08$, so ist diese Differenz grösser als die berechnete Wurzelgrösse ($0{,}08 > 0{,}0513$) und wir können also mehr als 212 gegen 1 wetten, dass das Arzneimittel einen Einfluss auf die Krankheit hat und zwar einen günstigen, da es die durchschnittliche Sterblichkeit vermindert hat.

Wir wollen nun eine andere Annahme discutiren. Es seien von den 700 mit dem Medicamente behandelten Kranken 105 (d. h. 15 Procent) gestorben und 595 genesen. Dies wäre immer noch anscheinend ein sehr schlagendes Resultat gegenüber der ersten Beobachtungsreihe, wo 20 Procent gestorben waren. Berechnen wir aber unter der neuen Annahme die charakteristische Wurzelgrösse, so finden wir dieselbe = 0,0536. Der Unterschied $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1} = 0{,}05$ ist also kleiner als dieselbe. Wenn wir uns daher mit keiner geringeren Sicherheit als $\frac{212}{213}$ begnügen wollen, so hat diese Statistik keine Beweiskraft für die Wirksamkeit des angewandten Mittels. Wir können nicht 212 gegen 1 wetten (wie unter der erstgemachten Annahme), dass unser Medicament wirksam ist. Eine gewisse nicht unbeträchtliche Wahrscheinlichkeit dafür wäre offenbar auch jetzt noch vorhanden, da $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1}$ dem Werthe der berechneten Wurzelgrösse doch ziemlich nahe kommt, aber es wäre doch gewagt, einen Satz in der Wissenschaft als streng erwiesen gelten zu lassen, für welchen nicht mindestens eine Wahrscheinlichkeit $\frac{212}{213}$ vorhanden ist. In der nachstehenden kleinen Tabelle sind einige Werthe des Ausdruckes $\sqrt{\frac{8\,m\,(r - m)}{r^3}}$ für verschiedene Werthe von r und m verzeichnet. Jedoch ist in einem Eingange der Tabelle statt der Grösse m die aus m und r zu berechnende Grösse $\frac{m}{r}$ angegeben, wodurch begreiflicher Weise Zahlen gespart werden.

	$r = 300$	$= 400$	$= 500$	$= 600$	$= 700$	$= 800$	$= 900$	$= 1000$
$\frac{m}{r} = 0,10$	0,0490	0,0424	0,0379	0,0346	0,0321	0,0300	0,0283	0,0270
$= 0,15$	0,0583	0,0505	0,0452	0,0412	0,0382	0,0357	0,0337	0,0319
$= 0,20$	0,0653	0,0566	0,0506	0,0462	0,0428	0,0400	0,0377	0,0358
$= 0,25$	0,0707	0,0612	0,0548	0,0506	0,0463	0,0433	0,0408	0,0387
$= 0,30$	0,0748	0,0648	0,0580	0,0529	0,0490	0,0458	0,0432	0,0410
$= 0,35$	0,0779	0,0674	0,0603	0,0551	0,0510	0,0477	0,0450	0,0427
$= 0,40$	0,0800	0,0693	0,0620	0,0566	0,0524	0,0490	0,0462	0,0438
$= 0,45$	0,0813	0,0703	0,0629	0,0575	0,0532	0,0498	0,0469	0,0445
$= 0,50$	0,0817	0,0707	0,0632	0,0578	0,0535	0,0500	0,0471	0,0447

Aus dieser Tabelle kann man die Grenzen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses höchst wahrscheinlich eingeschlossen ist, direct entnehmen, wofern die betreffenden Werthe von r und $\frac{m}{r}$ in den Eingängen der Tabelle verzeichnet sind. Man habe beispielsweise eine Statistik, von 600 Fällen in 150 Fällen sei das Ereigniss A eingetreten und in 450 Fällen nicht, dann hat man $r = 600$, $m = 150$ und $\frac{m}{r} = \frac{150}{600} = 0,25$. Nun sucht man in der Tabelle die Zahl, welche in der 600 überschriebenen Längsspalte und in der 0,25 bezeichneten Querspalte enthalten ist — sie ist 0,0506. Nach der Bedeutung dieser Zahl kann man also zufolge unserer Statistik 212 gegen 1 wetten, dass die abstracte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A zwischen den Grenzen $0,25 + 0,0506$ und $0,25 - 0,0506$ oder zwischen den Grenzen 0,2706 und 0,1994 liegt.

Die Tabelle kann übrigens auch benutzt werden, wenn das Ereigniss A öfter als in der Hälfte aller Fälle eingetreten ist, d. h. wenn $\frac{m}{r}$ grösser als 0,5 ist, obgleich grössere Werthe von $\frac{m}{r}$ nicht im Eingange der Tabelle verzeichnet sind. Man braucht alsdann nur m zu betrachten als die Anzahl der Fälle, in welchen das Ereigniss A nicht eingetreten ist, und die Tabelle ergiebt die Grenzen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens des Ereignisses A höchst wahrscheinlich enthalten ist. Sei z. B. das Ereigniss A in 425 von 500 Fällen eingetreten und in 75 Fällen nicht. Wir setzen jetzt $75 = m$ und haben mithin $\frac{m}{r} = 0,15$. Die Tabelle ergiebt dazu und zu $r = 500$ die Zahl 0,0452. Das bedeutet: wir dürfen 212 gegen 1 wetten, dass die

Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens des Ereignisses A enthalten ist zwischen den Grenzen 0,15 + 0,0452 und 0,15 — 0,0452, d. h. zwischen den Grenzen 0,1952 und 0,1048. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A ist also mit demselben Grade von Sicherheit zu suchen zwischen den Grenzen 1 — 0,1952 und 1 — 0,1048, d. h. zwischen den Grenzen 0,8048 und 0,8952.

Die Tabelle giebt natürlich auch für solche Fälle wenigstens annähernd eine Anschauung von dem Werthe einer Statistik, wo weder die betreffende Zahl r noch $\frac{m}{r}$ genau in den Eingängen zu finden ist.

Eine bemerkenswerthe Folgerung mag noch ausdrücklich hier hervorgehoben werden, welche durch den oberflächlichsten Blick auf die Tabelle ersichtlich wird. Man kann nämlich sagen, dass eine statistische Zusammenstellung einer bestimmten Anzahl von Fällen gewissermaassen um so grösseres Gewicht hat, je mehr das Verhältniss der Fälle, wo das Ereigniss A eingetreten ist, zu allen beobachteten Fällen von $^1/_2$ abweicht. In der That, man sieht in jeder Längsspalte unserer Tabelle die Zahlen von oben nach unten wachsen, d. h. je mehr sich das Verhältniss der positiven Fälle zu allen Fällen der Zahl 0,5 nähert, um so weiter rücken die Grenzen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses wahrscheinlich eingeschlossen ist, aus einander, um so weniger Bestimmtheit hat folglich die aus der Statistik zu ziehende Folgerung. Wenn also das beobachtete Verhältniss der positiven Fälle zu allen Fällen $\left(\frac{m}{r}\right)$ von $^1/_2$ sehr verschieden ist, so wird man schon aus einer kleineren Statistik ein ebenso bestimmtes Resultat ableiten können, wie aus einer viel unfangreicheren, in welcher das Verhältniss der positiven Fälle zu allen Fällen nahezu $^1/_2$ ist.

ALPHABETISCHES INHALTSVERZEICHNISS.

A.

B.

C.

D.



